



Т. Шевченко





П. Чебышевъ

OEUVRES

DE

P. L. TCHEBYCHEF,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

de MM. A. MARKOFF et N. SONIN,

MEMBRES ORDINAIRES DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

TOME II.

(Avec deux portraits.)

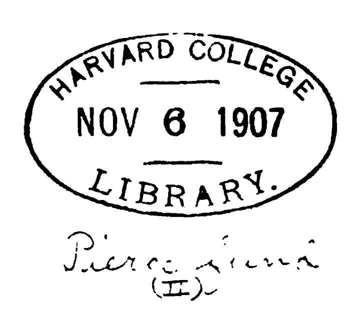


ST.-PÉTERSBOURG. 1907.

Commissionaires de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences.

J. Glasounof et **C. Ricker** à St.-Pétersbourg; **N. Karbasnikof** à St.-Pétersbourg, Moskou, Varsovie et Vilna; **M. Klukine** à Moscou; **N. Oglobline** à S.-Pétersbourg et Kief; **E. Raspopof** à Odessa; **N. Kymmel** à Riga; **Voss' Sortiment (G. W. Sorgenfrey)** à Leipsic; **Luzac & Cie** à Londres.

Prix: 17 Mrk. 50 Pf.



Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Mai 1907. S. d'Oldenbourg, Secrétaire perpétuel.

IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Vass. Ostr., 9 Ligne, № 12.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

NOTES ET EXTRAITS.

NOTICE BIOGRAPHIQUE *).

Traduit par M-me C. Jossa.

Pafnouty Lvovitch Tchebychef naquit le 14 mai 1821 dans la propriété de son père, le village d'Okatovo (district de Borovsk, gouvernement de Kalouga). Sa famille était de vieille noblesse; son père était un homme instruit (selon les idées de ce temps-là) et jouissait d'une fortune considérable.

L'instruction primaire, jusqu'à l'entrée à l'université, fut reçue par P. L. chez ses parents. La mère lui apprit à lire et à écrire et quelques autres matières, l'arithmétique et la langue française lui furent enseignées par sa cousine germaine, A. K. Soukharef, personne très instruite et qui semble avoir joué un rôle important dans son éducation.

En 1832 la famille Tchebychef se rendit à Moscou afin de préarer P. L. et son frère aîné à l'université. On prit les meilleurs aîtres de tout Moscou, entre autre le mathématicien alors bien nnu Pogorelsky, dont Tchebychef déclarait dans la suite „l'Albre" le meilleur manuel écrit en russe, comme étant „le plus ırt".

A cette époque les talents mathématiques de P. L. se manièrent définitivement et il arrêta son choix sur la faculté des ıématiques.

---

*) Cette Notice est empruntée, presqu'en entier, d'un article (russe) de M. le prof. C. A. inséré dans le *Dictionnaire des écrivains et savants russes rédigé par M. Vénguerof;* le contient encore un aperçu des travaux de Tchebychef.

armi d'autres aperçus de la vie et des travaux de Tchebychef on peut mentionner un usse) de M. le prof. A. M. Liapounoff inséré dans le t. IV de la II série des *Commu- de la Société mathématique de Kharkof* et un travail (français) de M. le prof. A. Vas- s le titre: «P. L. Tchebychef et son oeuvre scientifique» inséré dans le *Bolletino afia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di Gino Loria*, 1898, et llemand par B. G. Teubner à Leipzig.

Entré à l'université de Moscou en 1837, Tchebychef écrivit au bout d'un an un ouvrage intitulé „Calcul des racines d'une équation", qui lui valut une médaille d'argent et, prouvant les capacités du jeune auteur, tourna vers lui l'attention du professeur de grand renom N. D. Braschmann. Celui-ci devina un homme de génie dans son jeune élève et se mit dès lors à guider soigneusement ses occupations et à le persuader constamment de se consacrer exclusivement aux mathématiques. A ce savant Tchebychef, ainsi que ses autres élèves, voua un sentiment de profond respect et garda jusqu'à sa mort comme une relique une photographie que Braschmann lui avait donnée jadis.

Tchebychef termina ses études à l'université en 1841.

En 1840 une partie considérable de la Russie fut en proie à la famine et les affaires de beaucoup de propriétaires, entre autres des parents de Tchebychef, tournèrent trés mal. Toute la famille se vit obligée de s'installer dans ses propriétés et il devint impossible au père de donner à son fils de quoi subsister à Moscou.

Pour ne pas tomber dans la misère, un jeune homme, ayant récemment terminé ses études à l'université, serait tout naturellement entré au service quelque part ou se serait procuré de leçons; mais Tchebychef ne fit ni l'un ni l'autre. Il considérait non sans raisons que ces occupations le détourneraient de sa science de prédilection et choisit la misère. Depuis 1841, n'ayant pas encore atteint sa majorité, P. L. ne recevait de son père que le logement gratuit dans sa maison à Moscou. Il s'installa dans cette maison avec ses deux frères, après avoir pris comme pensionnaires deux jeunes garçons, qui se préparaient à entrer au collège en même temps que les deux jeunes Tchebychef. Pendant un certain temps il essaya de leur enseigner lui-même les mathématiques, mais ces leçons ne durèrent pas longtemps, car, de son propre aveu, il s'y montra pédagogue peu patient, se fâchant contre ses élèves et criant après eux.

C'est à cette époque que parurent les premiers travaux scientifiques de Tchebychef et sa thèse de licence (ès sciences) „Essai d'une analyse élémentaire de la théorie des probabilités" qu'il soutint à l'université de Moscou en 1846.

En 1847 Tchebychef s'installa à St. Pétersboug, où, après avoir soutenu sa thèse „De l'intégration à l'aide des logarithmes", il reçut l'emploi de professeur adjoint à l'université de St. Pétersbourg, à la place du professeur W. A. Ankoudovitsch. Cette thèse dont le sujet entra dans les travaux ultérieurs de Tchebychef, ainsi que son dis-

cours d'ouverture est conservée en manuscrit et accompagnée d'un résumé imprimé. Cette thèse valut à Tchebychef le droit de faire un cours à l'université; il fut nommé docteur en mathématiques en 1849 pour sa troisème thèse qui fut son oeuvre célèbre „La théorie des congruences"-

Presque en même temps que Tchebychef, V. J. Bouniakovsky, un des plus célèbres mathématiciens russes, qui était à cette époque académicien ordinaire de l'Académie des Sciences, entra à l'université de St. Pétersbourg comme professeur ordinaire. La chaire de mathématiques appliquées était alors occupée par un autre mathématicien non moins célèbre, J. J. Somof. Ces deux hommes, si éminents non seulement par leurs mérites scientifiques, mais aussi par leurs qualités morales, furent les premiers avec lesquels Tchebychef se lia à son arrivée à St. Pétersbourg et garda les meilleures relations jusqu'à leur mort. C'est surtout avec Bouniakovsky qu'il était lié et celui-ci, ayant aperçu dans Tchebychef une énorme force scientifique, l'attira à l'Académie des Sciences d'abord en qualité de son collaborateur dans l'édition des travaux du célèbre Euler, et puis comme membre (en 1853 Tchebychef fut élu adjoint et en 1859 — membre ordinaire de l'Académie des Sciences).

La position pécuniaire de Tchebychef lors son installation à St. Pétersbourg était trés pénible. Les affaires de ses parents se trouvaient en désarroi et il n'avait pour vivre que ses modestes appointements de professeur-adjoint. Cette gêne le forçait d'être trés économe; tel il est resté jusqu'à la fin de ses jours.

La seule chose, pour laquelle il ne ménageait pas son argent, c'étaient les modèles des mécanismes de son invention; pour leur construction il dépensait des centaines et des milliers de roubles. Dès son enfance il aimait à construire différents appareils. Parti d'un joujou fait avec son canif, il arriva à la construction de sa fameuse machine arithmétique très-compliquée qui se trouve au „Conservatoire des arts et métiers" à Paris; beaucoup de ses appareils sont conservés à l'université de St. Pétersbourg et à l'Académie des Sciences.

Tchebychef ne fréquentait qu'un cercle très étroit de connaissances; le plus souvent il allait chez Bouniakovsky, où se réunissaient beaucoup de mathématiciens, entre autres le célèbre M. V. Ostrogradsky.

Dans sa jeunesse, Tchebychef allait souvent voir J. J. Somof pour lui conter ses découvertes et pour mettre au profit la grande érudition de son collègue plus agé, afin de savoir, si la découverte

n'avait pas été déjà faite par quelque autre mathématicien. A en croire le frère de J. Somof, celà arrivait parfois. Il va sans dire que ce ne pouvait être qu'à l'époque où Tchebychef n'avait pas encore abordé les questions mathématiques que personne n'avait touchées avant lui et où il ne courait pas le risque d'être dévancé. Il est à remarquer que Tchebychef préférait les investigations originales à l'étude des travaux d'autres mathématiciens, des contemporains surtout. Ayant étudié à fond les oeuvres des grands mathématiciens Euler, Lagrange, Gauss, Abel etc., Tchebychef ne prêtait pas d'importance à la lecture de la littérature mathématique courante, affirmant que le trop de zèle à étudier les travaux des autres nuisait à l'originalité des ses propres travaux.

Les voyages à l'étranger furent les distractions favorites de Tchebychef. D'abord il entreprit ces voyages non pas pour se reposer, mais avec un but tout scientifique. Dans le rapport (reproduit plus bas) de sa mission à l'étranger on trouve la description de son voyage, de ses visites d'usines pour l'étude de la mécanique appliquée, de la fréquentation des séances des sociétés scientifiques, et de ses entretiens avec les savants illustres de différents pays.

Dans les années suivantes, Tchebychef, sans négliger le but scientifique des ses voyages, en profita aussi pour se reposer de ses occupations continuelles. Il aimait surtout à voyager en France, où il avait beaucoup de relations parmi les savants, allait aux congrès et y faisait des communications sur ses découvertes scientifiques.

Très-économe, Tchebychef descendait lors ses premiers voyages à Paris dans un hôtel très modeste („Hôtel Corneille“ vis-à-vis de l'Odéon), ne dînait que dans de petits restaurants et allait en omnibus; ce n'est que beaucoup plus tard qu'il changea ses habitudes et même invita ses amis français à dîner.

Lorsqu'il restait pour les vacances en Russie, il passait l'été le plus souvent près de Reval à Catherinenthal.

L'activité de Tchebychef comme professeur au sens propre du mot dura juste 35 ans, — de 1847 à 1882 (de 1847 à 1853 professeur adjoint, de 1853 à 1857 — professeur extraordinaire et depuis 1857 — ordinaire), et fut consacrée exclusivement à l'université de St. Pétersbourg sans compter un cours de mécanique de peu de durée au Lycée de l'Empereur Alexandre I. A diverses époques il fit des cours de géometrie analytique, d'algèbre supérieure, de théorie des nombres, de calcul intégral, de théorie des probabilités et de calcul des

différences finies, de théorie des fonctions elliptiques et de théorie des intégrales définies.

Tchebychef comme professeur était d'une rigueur pédantesque; presque jamais il ne manquait, n'était jamais en retard, mais ne restait pas une minute après l'heure, dût-il interrompre la leçon au milieu d'une phrase. S'il lui arrivait de ne pas achever une déduction, il la reprenait depuis le commencement à la leçon suivante, si cette leçon ne faisait pas une suite immédiate de la leçon précédente. Il précédait chaque calcul tant soit peu compliqué par une explication de son but, et en indiquant la marche à grands traits. Il faisait son calcul presque toujours silencieusement de sorte que les étudiants devaient le suivre à l'aide des yeux et non des oreilles. Le calcul se faisait assez vite et d'une manière très détaillée de sorte qu'il était facile d'en suivre la marche. Pendant les leçons Tchebychef faisait souvent des digressions du cours systématique, communiquait ses opinions et ses entretiens avec d'autres mathématiciens concernant les questions traitées pendant les leçons et expliquait l'importance comparée et la liaison réciproque des diverses questions mathématiques. Ces digressions animaient l'exposé, donnaient un relâche à l'attention tendue des auditeurs et éveillaient l'intérêt pour le sujet étudié.

Les cours de Tchebychef n'étaient pas gros, mais substantiels, d'une exposé accessible et aisé à comprendre.

Aux examens des étudiants Tchebychef n'était ni trop sévère, ni trop indulgent, mais toujours extrêmement retenu et courtois. Ses objections aux soutenances de thèses à l'Université concernaient toujours les questions générales sans toucher les détails et se distinguaient par leur finesse et leur ingéniosité.

Les mérites de Tchebychef comme professeur resteront toujours gravés dans la mémoire de ceux qui ont eu l'honneur de l'avoir pour maître. Il continuait d'instruire ses anciens élèves même après leur sortie de l'université. C'était lui qui guidait les premiers pas de ceux de ses auditeurs qui s'étaient voués aux mathématiques, donnant de précieuses indications à tous ceux qui voulaient et savaient en tirer profit.

Une fois par semaine à heure fixe, sa porte était ouverte pour tous ceux qui voulaient apprendre au grand mathématicien le résultat de leurs études et recevoir de lui quelque indication. Rarement le visiteur s'en allait sans emporter de nouvelles idées et sans être encouragé dans ses études.

Un des mérites inoubliables de Tchebychef comme maître des mathématiciens russes fut, dans ses conversations scientifiques, de faire trouver à ses élèves, par ses travaux et ses indications, des sujets féconds de recherches personnelles, et d'appeler leur attention sur des questions dont les résultats avaient toujours une certaine valeur scientifique.

Tchebychef mourut dans sa 74-ième année, il vit les deux jubilés (celui de 25 ans et celui de 50 ans) de son activité scientifique, sans cependant les fêter. Toutes les tentatives de ses admirateurs et de ses élèves de souligner ces époques par quelque manifestation usitée furent declinées par le grand savant d'une façon très énergique.

Sur la fin de Tchebychef on sait seulement qu'il avait contracté, quelques jours avant sa mort, une forme légère d'influenza, et tout en ne se sentant pas bien, n'avait pas pris le lit.

La veille de sa mort il reçut ses visiteurs à l'heure habituelle et personne ne croyait sa fin si proche. Le matin du 26 novembre 1894, en prenant un verre de thé assis à son bureau, il eut une faiblesse, ot, après une courte agonie, succomba à une paralysie du coeur.

RAPPORT

du professeur extraordinaire de l'université de St. Pétersbourg Tchebychef sur son voyage à l'étranger.

Traduit par M-me C. Jossa.

(Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія. Часть LXXVIII. Отдѣленіе IV, стр. 1–14).

Le 21 juin 1852, après avoir obtenu le passeport pour passer la frontière, je me suis embarqué sur un vapeur pour Stettin, où j'ai débarqué le 24 Juin et me suis rendu le même jour à Berlin. Suivant le plan que j'ai tracé pour mon voyage, je n'ai passé à Berlin que 12 heures et je suis parti pour Paris, choisissant le chemin le plus court. Passant près de Lille, j'ai cru nécessaire de visiter cette ville dans les environs de laquelle se trouve une quantité de moulins-à-vent construits d'après le système hollandais et connus dans la Mécanique appliquée d'après les observations de Coulomb. L'instabilité du vent le rend inadmissible comme moteur dans les fabriques, où l'interruption continuelle des travaux causerait des pertes considérables, mais, d'autre part, le vent nous présente le moteur le moins cher, c'est pourquoi il est souvent employé pour moudre le grain, pour faire l'huile, pour piler le lin etc. Les moulins-à-vent de Lille sont particulièrement intéressants au point de vue de la théorie actuelle du vent comme moteur: cette théorie vérifie ses résultats à l'aide des observations de Coulomb. Il faut constater cependant que la théorie et les observations, tout en étant d'accord dans les traits généraux, diffèrent sérieusement dans le détail. Ainsi, d'après la théorie, l'inclinaison des ailes du moulin-à-vent vers l'axe de rotation devrait diminuer continuellement en s'éloignant de leurs extrémités; au contraire, les observations de Coulomb, faites sur les moulins-à-vent de Lille, nous dé-

montrent que la courbure de la surface des ailes suit une autre loi: au commencement l'angle formé par les éléments de l'aile et l'axe de rotation décroît en s'éloignant de l'extrémité de l'aile, mais, arrivé à une certaine limite, il commence à croître, de sorte que ses différences premières vont constamment en décroissant, tandis que la théorie enseigne qu'elles doivent s'accroître. Ce désaccord entre la théorie actuelle et les résultats de beaucoup d'observations faites par Coulomb sur les moulins-à-vent, dont la construction est tenue par les mécaniciens-praticiens pour modèle, nous suggère naturellement l'idée que, peut-être, certaines circonstances que la théorie actuelle ne prend généralement pas en considération, comme le changement de direction et d'intensité du vent sous l'influence de l'édifice même du moulin, la courbure de l'axe des ailes, etc., exercent une influence considérable sur la marche du moulin. En tenant compte de cela, on trouve aisément des expressions analytiques pour la quantité de travail du moulin-à-vent et la forme la plus avantageuse de ses ailes; il n'y a que quelques constantes, différentes pour chaque type de moulin, qui restent inconnues. Pour vérifier ces expressions à l'aide des observations de Coulomb sur les moulins-à-vent de Lille, il faut avoir des données plus détaillées que celles qui suffisaient pour l'exposé de l'ancienne théorie des moulins-à-vent. C'est pourquoi en passant près de Lille j'ai trouvé utile de visiter cette ville et je suis resté deux jours à examiner les moulins-à-vent des environs.

Le 28 juin je me suis rendu de Lille à Paris, où j'arrivai le soir même. A cette époque les études dans les hautes écoles étaient déjà finies; mais j'ai trouvé la plupart des professeurs à Paris, ce qui était d'une grande importance pour le succès de mon voyage, car, vu sa courte durée, il me fallait des renseignements sur place pour trouver immédiatement ce qui était d'intérêt principal pour mes études de la Mécanique appliquée et, outre cela, pour obtenir des recommandations, sans lesquelles on n'arrive pas à voir beaucoup de choses, ou on les voit d'une façon superficielle.

Arrivé à Paris, je me suis adressé au célèbre géomètre Liouville, Membre de l'Académie des Sciences de Paris et éditeur d'un journal de mathématiques, auquel je collabore depuis 1842. Grâce à l'obligeance de ce géomètre, j'ai trouvé l'occasion de lier connaissance avec les savants dont le concours était d'une grande importance pour le succès de mon voyage.

D'après les renseignements que j'ai tirés des entretiens avec eux, j'ai conclu qu'il me serait utile d'employer une partie de mon séjour

en France (ce séjour devait durer 3 mois) à examiner les machines et les modèles du „Conservatoire des arts et métiers“, à observer la construction des machines dans les usines de Paris et des environs, surtout dans celle de M. Cavé, connue par ses machines-à-vapeur à cylindres oscillants, et d'autres établissements mécaniques, présentant un intérêt particulier, ou se rattachant aux sujets de mes investigations de Mécanique appliquée; l'autre partie de mon séjour à l'étranger devrait être employée à voyager en France pour étudier divers objets intéressants, à visiter les usines métallurgiques d'Hayange, où sont fabriquées aussi diverses machines; les célèbres fabriques de papier des environs d'Angoulême; la fonderie de l'Etat de Ruelle etc., dont la visite ne me prendrait pas beaucoup de temps.

Conformément à ce projet, j'ai étudié jusqu'au 8 août les objets se trouvant à Paris et aux environs. Ayant à ma disposition très peu de temps, que je devais partager entre le „Conservatoire des arts et métiers“, les usines de M. Cavé et autres établissements touchant à la Mécanique appliquée, ainsi que le chemin de fer atmosphérique de St.-Germain, le chemin de Sceaux, reputé par sa sinuosité, la machine de Marly etc., je tâchais néanmoins d'enrichir mes connaissances théoriques à l'aide d'entretiens avec les célèbres géomètres français. Je passais en conséquence les après-midis tantôt au „Conservatoire des arts et métiers“, tantôt aux fabriques, surtout chez Cavé, et les soirées étaient consacrées tant aux conversations avec M.M. Cauchy, Liouville, Bienaimé, Hermite, Serret, Lebesgue et d'autres savants, qu'aux études théoriques en rapport immédiat avec les données fournies par l'examen des machines de différents systèmes, ou avec les questions d'Analyse, vers lesquelles mon attention était tournée par la conversation avec les savants. C'est ainsi que M.M. Liouville et Hermite m'ont suggéré l'idée de développer les principes sur lesquels fut jadis fondée ma dissertation, présentée en 1847 à l'université de St. Pétersbourg *pro venia legendi.* Dans cet écrit j'examinai le cas, où la différentielle à intégrer renferme la racine carrée d'une fonction rationnelle — le cas le plus simple et le plus fréquent dans les applications. Mais il était intéressant sous plusieurs rapports d'étendre ces principes au cas d'un radical de degré quelconque.

Ainsi dans le calcul intégral l'attention est surtout attachée à l'intégration des différentielles connues sous le nom de binomes; on propose pour cela un certain nombre de procédés particuliers, en expliquant dans quels cas ces procédés réussissent.

Excepté ces quelques cas on ne pouvait rien affirmer de positif

à propos de l'intégrale des différentielles binomes. Sont-ce nos procédés qui sont insuffisants, ou ces intégrales n'existent pas sous forme finie? On ne pouvait certainement trancher cette question à l'aide de procédés particuliers, si grande que soit la quantité des cas que ces procédés embrassent; il fallait un procédé général, embrassant tous les cas particuliers, et ce procédé se trouvait dans les principes dont j'ai parlé plus haut.

Je me suis occupé du développement de ces principes pour déterminer les cas, où les intégrales des différentielles binomes existaient sous forme finie, et ceux, où elles se présentent sous forme de transcendantes particulières.

Mes recherches m'ont mené à la conclusion que les procédés particuliers proposés pour l'intégration des différentielles binomes (algébriques) embrassent tous les cas, où cette intégration est possible sous forme finie, et, par suite, la question de leur intégration sous forme finie doit être considérée comme résolue définitivement. Entre autres je suis arrivé à un théorème qui contient, comme un cas particulier, le fameux théorème d'Abel qu'il a laissé sans démonstration*).

Des nombreux sujets d'étude qui se sont présentés pendant l'examen de différents mécanismes de transmission de mouvement, surtout dans la machine-à-vapeur, où l'économie du chauffage et la stabilité de la machine dépendent des procédés de transmission du travail de la vapeur, je me suis occupé surtout de la théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. En recherchant les moyens de tirer de la vapeur le maximum de travail dans le cas, où l'on exige un mouvement de rotation, Watt a inventé un mécanisme spécial pour transformer le mouvement rectiligne du piston en mouvement circulaire du balancier, mécanisme connu sous le nom de parallélogramme. L'histoire de la Mécanique appliquée nous apprend que l'idée d'un pareil mécanisme fut suggérée au célèbre transformateur des machines-à-vapeur par l'examen d'un dispositif spécial, où la combinaison de divers mouvements de rotation formait des courbes dont quelques-unes

---

*) . . . . le théorème suivant très remarquable a lieu: «Lorsqu'une intégrale de la forme $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, où ρ et R sont des fonctions entières de x, est exprimable par des logarithmes, on peut toujours l'exprimer de la manière suivante:

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$

où A est constant et p et q des fonctions entières de x. Je me réserve de démontrer ce théorème dans une autre occasion. *Abel*, Oeuvres complètes, T. I, p. 65.

étaient presque rectilignes. Mais nous ne savons pas, comment il est arrivé à la forme la plus avantageuse de son mécanisme et à la dimension nécessaire de ses éléments. Les règles que suivait Watt dans la construction des parallélogrammes ne pouvaient garder leur sens pratique que jusqu'au moment, où l'on a reconnu la nécessité d'en changer la forme; ce changement de forme demanda de nouvelles règles. La pratique et la théorie actuelle tirent ces règles d'un principe suivi sans doute par Watt pour la construction de ses parallélogrammes. Les raisonnements que l'on fait pour démontrer ce principe ne peuvent certainement soutenir aucune critique; il arrive souvent que les éléments du parallélogramme trouvés à l'aide de ce principe ne conviennent pas en pratique, et il a fallu tracer des tables spéciales pour les corriger.

On voit bien la nécessité de soumettre les parallélogrammes de Watt et leurs modifications à une analyse rigoureuse, substituant au principe en question les propriétés essentielles de ce mécanisme et les conditions de la pratique. Pour arriver à ce but je me suis mis à étudier les conditions dont dépendaient plusieurs des éléments de ce mécanisme dans les machines des usines aussi bien que sur les bateaux-à-vapeur, et d'autre part — l'effet nuisible de l'irrégularité de sa marche, dont les traces étaient visibles sur les machines longtemps en usage.

Me proposant de déduire les règles pour la construction des parallélogrammes de la nature même de ce mécanisme, je me suis trouvé en présence de questions d'Analyse fort peu connues jusque-là. Tout ce qui est fait sous ce rapport est dû au Membre de l'Académie des Sciences de Paris, M. Poncelet, qui s'est créé un nom dans la Mécanique appliquée; on emploie souvent les formules, trouvées par lui, pour calculer les résistances nuisibles des machines. La théorie du parallélogramme de Watt demande des formules plus générales et leur application ne doit pas se restreindre à l'étude de ces mécanismes. La Mécanique appliquée et les autres sciences appliquées contiennent beaucoup de questions pour la solution desquelles ces formules sont nécessaires.

Comme j'avais très-peu de temps à ma disposition pour traiter un sujet de si grande étendue, je n'ai achevé que la première partie de mon Mémoire, qui a été présenté à l'Académie Impériale des Sciences.

La question des parallélogrammes de Watt est étroitement liée à la question de la construction des machines-à-vapeur sans balancier,

c'est à dire — sans ce mécanisme. Le système de machines-à-vapeur de Cavé à cylindres oscillants est des plus remarquables sous ce rapport. Cela me fit m'intéresser à sa fabrique. A l'aide de ces cylindres oscillants la composition de la machine-à-vapeur devient beaucoup plus simple. Mais la mobilité des cylindres présente beaucoup de difficultés dans leur construction, surtout dans l'aménagement des soupapes. C'est surtout pour cette raison que je suivais avec un vif intérêt la construction de divers organes de ces machines, très avantageux dans certains cas.

Outre la fabrique de M. Cavé, la collection de modèles de machines du „Conservatoire des arts et métiers" (où se trouve entre autres le modèle d'une machine-à-vapeur très originale, inventée par le comte Roumiantzef), la machine mobile, achetée par le Gouvernement Français à Londres à l'Exposition Universelle, mon attention fut surtout attirée par deux machines: celle du chemin de fer atmosphérique de St.-Germain, et celle de Marly. Cette dernière présentait pour moi un intérêt tout spécial non seulement grâce à la combinaison ingénieuse de plusieurs machines-à-vapeur, mais surtout parceque son travail, consistant à élever l'eau à une hauteur considérable, est facilement déterminé par l'indication d'un manomètre ajouté aux pompes; en même temps d'autres manomètres déterminent la pression de la vapeur dans le cylindre et dans le condenseur. Cette machine prouve nettement l'influence que différentes conditions, généralement négligées par la théorie actuelle, exercent sur la quantité de travail. Ce n'est que d'observations pareilles que l'on peut espérer de tirer des formules déterminant avec une exactitude suffisante la quantité de travail de la machine-à-vapeur ainsi que les dimensions les plus avantageuses de ses parties.

M'occupant ainsi des machines-à-vapeur, je ne négligeais pas, autant que le temps me le permettait, les roues hydrauliques. Le „Conservatoire des arts et métiers" me fournissait une collection nombreuse de modèles de diverses roues, entre autres d'une turbine, qui se trouve dans un moulin à St.-Maur que j'avais visité trois fois. Cela m'a procuré l'occasion de trouver quelques données sur l'usage de ce moteur, qui n'est pas encore entièrement étudié théoriquement.

En outre, le „Conservatoire des arts et métiers", ainsi que les usines que j'ai visitées, me fournirent d'amples matériaux concernant les différents mécanismes pour la transmission du mouvement et les machines destinées à un travail spécial. Mon attention fut attirée entre autres par les machines d'un mécanicien très-intéressant Vau-

canson, par la machine arithmétique de Pascal, par des dispositifs pour l'élevation de l'eau, par des machines de filature de coton et de lin, et par des machines métallurgiques.

Le 8 août je suis parti pour Metz. Je me suis arrêté pour quelques heures à Meaux pour y examiner les roues d'un moulin-à-eau, après quoi j'ai repris mon voyage pour Metz, où je suis arrivé le 9 août. Dans cette ville j'ai rencontré les Membres de la Commission Mathématique pour l'examen d'entrée à l'Ecole Polytechnique. Cette rencontre m'a fourni l'occasion d'assister à cet examen. C'est à Metz que j'ai rencontré M. de Polignac, connu en France par ces recherches en Mathématiques. Lui et moi, nous nous sommes occupés des mêmes questions, — nous avons cherché la démonstration du postulat de Bertrand et d'autres propositions de ce genre, et en suivant des voies différentes, nous sommes venus à bout des difficultés, présentées par ces questions. Le 15 octobre 1849 M. de Polignac donnait à l'Académie des Sciences de Paris un rapport sur l'étude des séries spéciales nommées ***diatomiques*** et sur les applications qu'on peut en faire. Il disait en particulier être arrivé, en partant de ces séries, à démontrer rigoureusement que dans les limites a^n et a^{n+1} il se trouve au moins un nombre premier. Quoique cela soit insuffisant pour faire la démonstration du postulat de Bertrand, dans lequel les limites données sont plus étroites, même dans ces limites la présence d'un nombre premier ne pouvait être démontrée qu'à l'aide des procédés spéciaux. Les limites dans lesquelles on démontrait auparavant la présence d'un nombre premier étaient beaucoup plus larges.

Les recherches de M. de Polignac ont attiré l'attention des Membres de l'Académie des Sciences de Paris, surtout du géomètre Cauchy qui présenta à l'Académie, peu de temps avant mon départ de Paris, la seconde partie de ses recherches. Cependant en 1850 j'ai présenté à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg un article sur les „nombres premiers“ contenant la démonstration du postulat de Bertrand; dans cet article j'ai démontré la présence des nombres premiers dans les limites plus étroites, et tout cela sans me servir des séries diatomiques. En publiant l'année suivante la première partie de son ouvrage, M. de Polignac compare, dans la préface, les procédés auxquels il a eu recours avec ceux dont je me suis servi et insiste sur les avantages présentés par les séries diatomiques. Cette différence d'opinions sur le même sujet, très peu étudié jusqu'à ce temps, explique bien le grand intérêt qui nous poussait l'un vers l'autre, et c'est à Metz que nous trouvâmes l'occasion de causer. — J'employais

mes après-midis à causer avec M. de Polignac et les Membres de la Commission Mathématique, les célèbres géomètres Hermite et Serret, et les matinées étaient consacrées à la visite des usines de fer avec des fabriques de machines qui se trouvent en grand nombre près de Metz. Mon attention fut spécialement attirée par l'usine de Charles Wendel à Hayange connue pour son excellente prépartion de fer et sa construction de machines. Je suis resté à Metz jusqu'au 16 août et je suis retourné à Paris le 17.

Arrivé à Paris, j'ai repris mes travaux de Mécanique appliquée. En outre, M. Liouville s'était offert à m'exposer un abrégé de la nouvelle théorie des fonctions elliptiques, professée par lui au Collège de France. Jusqu'à ce temps cette théorie, si intéressante et si importante par ses applications, ne consistait principalement que dans l'étude des procédés spéciaux, propres à elle. M. Liouville, célèbre par ses découvertes dans l'Analyse, eut l'idéé de baser cette théorie sur un principe général, déterminant l'importance des fonctions elliptiques entre les matières de l'Analyse pure. Sans s'arrêter sur la considération des fonctions déterminées par une telle ou telle intégrale, il commence par l'étude des propriétés générales des fonctions, et les partage en deux classes: ***les fonctions bien déterminées*** et celles qui ne le sont pas complètement.

S'arrêtant sur les premières, qui sont les plus simples, il démontre quelques-unes de leurs propriétés générales; puis, passant au cas où elles sont périodiques, il démontre sur elles des théorèmes d'autant plus intéressants qu'ils ne dépendent aucunement ni de la forme des fonctions, ni de leur origine, mais uniquement de leurs propriétés essentielles, — détermination complète, continuité, périodicité.

Partant de là, il fait une théorie des fonctions doublement périodiques, les supposant partout bien déterminées. Il partage ces fonctions en classes, suivant le nombre ***des zéros et des infinis:*** il donne ces dénominations aux valeurs de la variable indépendante, qui, dans l'étendue d'une période, annulent la fonction ou la rendent infinie. Il démontre ensuite que le plus petit nombre de ces zéros et de ces infinis est 2, et trouve l'expression de la fonction avec un nombre quelconque des zéros et des infinis au moyen des fonctions, dans lesquelles ces nombres ont la moindre valeur, c'est à dire sont égaux à 2. Ceci démontre l'importance des fonctions doublement périodiques à deux zéros et deux infinis. S'arrêtant sur ces fonctions, il recherche l'équation différentielle, à laquelle elle doivent satisfaire, en partant des propriétés générales des fonctions périodiques. L'équation qu'i,

trouve ainsi est la même, qui sert à déterminer les fonctions elliptiques inverses de première espèce. C'est ainsi que M. Liouville passe des principes généraux aux intégrales elliptiques, qui ont d'abord attiré l'attention des savants par leur forme et leurs différentes applications: c'est à une de ces applications qu'elles doivent leur nom.

Jusqu'à présent les investigations de M. Liouville présentent un intérêt purement théorique; mais nous n'avons aucune raison d'admettre qu'ici, ainsi que dans les autres parties de l'Analyse, un profond coup d'oeil ne découvre quelque chose de nouveau, si variées que soient les investigations antérieures.

Outre la théorie des fonctions elliptiques de M. Liouville, j'ai trouvé l'occasion d'en connaître les principes fondamentaux élaborés par un autre géomètre français, M. Hermite. Les principes de ce géomètre sont inférieurs comme théorie à ceux de Liouville, mais ils leur sont préférables dans les applications, surtout dans les fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce, auxquelles les principes de Liouville ne peuvent être appliqués immédiatement.

Comme mon cours de l'université de St. Pétersbourg comportait entre autres matières la théorie des fonctions elliptiques, il m'était bien utile d'apprendre ce que les deux célèbres géomètres français avaient fait sur ce sujet. Il m'était aussi intéressant de vérifier mes propres idées sur la périodicité des fonctions en général.

Le 28 août M. Liouville se rendit à Toul après m'avoir chargé de publier dans son journal deux de mes articles. Je passai les soirées à les rédiger, tout en continuant à m'occuper de Mécanique appliquée.

Le 16 septembre je suis parti à Angoulême connu par sa production de papier à lettre d'excellente qualité. En route j'ai trouvé l'occasion d'examiner une quantité d'objets très curieux touchant à la Mécanique, surtout la fabrique d'armes à Châtellerault. Je suis arrivé à Angoulême le 16 septembre au soir et j'y suis resté jusqu'au 26 septembre.

Excepté les trois jours que j'ai mis à visiter Bordeaux (ce qui m'a procuré, entre autres, l'occasion de voir le pont suspendu sur la Garonne), j'ai employé tout mon temps à étudier la fabrication du papier à Angoulême et aux environs, surtout à la fabrique de M. Comte, avec lequel j'ai lié connaissance en route. J'ai visité en outre la fabrique de canons de Ruelle, près Angoulême. A Coronne j'ai eu aussi l'occasion de visiter une fabrique de papier dont une partie était mise en mouvement par deux turbines.

Le 28 septembre je suis rentré à Paris pour obtenir de notre ambassadeur l'autorisation d'aller en Angleterre, où je suis parti le 2 octobre.

Arrivé à Londres, je me suis adressé aux deux géomètres anglais, M. M. Sylvester et Cayley. C'est à l'amabilité de ces savants que je dois d'un côté les conversations intéressantes concernant différentes branches des Mathématiques, — auxquelles je consacrais les soirées et les dimanches, pendant lesquels toutes les fabriques chôment, — et d'un autre côte la connaissance que j'ai faite avec le célèbre ingénieur-mécanicien Gregory. Ayant appris le but de mon voyage et s'intéressant aux questions de Mécanique appliquée, qui étaient l'objet de mes recherches, il s'était offert à m'aider de trouver dans les fabriques de Londres tout ce qui m'était le plus indispensable. A cet effet il m'accompagna dans plusieurs fabriques, où il croyait pouvoir trouver des machines construites par Watt lui-même. Ces machines m'offraient le plus grand intérêt, comme données sur les principes suivis par Watt dans la construction de ses parallélogrammes, et que je devais comparer aux résultats de mes recherches dont j'ai parlé plus haut. Il se trouva malheureusement qu'une des plus anciennes machines de Watt, longtemps conservée, en ces derniers temps fut vendue pour être détruite; mais M. Gregory a eu la chance de trouver deux machines, qui, suivant les documents, avaient été refaites par Watt et sont gardées comme des raretés. En ce qui concerne la construction des machines, M. Gregory m'a conseillé de visiter les fabriques de Maudsley, de Nipper et de Penn, et sa recommandation me fut d'une grande utilité. Outre plusieurs machines-à-vapeur de différents systèmes, j'ai vu dans la première de ces fabriques une machine rotative construite d'après le plan de Maudsley père lui-même.

Londres ne possède pas un Musée pareil au „Conservatoire des arts et métiers", mais il possède un établissement d'un autre genre, qui aide beaucoup à répandre dans la population les connaissances en Technologie et en Mécanique appliquée, — c'est le „Royal Polytechnic Institution". Dans cet établissement se trouve une collection considérable de modèles qui ont rapport aux différentes branches de la Mécanique appliquée, ainsi que de différentes machines-à-vapeur. Plusieurs de ces machines sont en mouvement. Dans cet „Institution" on expose diverses nouvelles inventions dont on démontre sur place l'utilisation. Dans un des salons est aménagé un énorme bassin constamment alimenté à l'aide de canaux; on y démontre la

mise en mouvement des roues hydrauliques, l'arrangement des écluses, le mouvement des vaisseaux, l'organisation des travaux sousmarins etc. En outre, les expériences chimiques faites au laboratoire sont très intéressantes par leurs applications pratiques. Cet établissement est très visité par le public.

Faute de temps, j'ai du me borner seulement à l'examen des objets que j'ai trouvés à Londres et aux environs.

Le 14 octobre je suis parti de Londres pour Paris, où j'attendis des instructions du Lycée de l'Empereur Alexandre I pour l'achat de quelques appareils pour mon cours de Mécanique appliquée. Cela fait, j'ai profité de l'occasion pour aller, accompagné de M. Hermite, voir M. Foucault et assister à ses expériences nouvelles; après quoi je suis parti le 22 octobre pour Berlin. Comme le chemin de Berlin passe près de Bruxelles, où se trouve une quantité d'objets ayant trait à la Mécanique appliquée, et où sont faites des leçons publiques de cette science, j'ai résolu de visiter cette ville. N'ayant pas à ma disposition assez de temps, je me suis borné à visiter le Musée des machines, où se trouvent, entre autres, beaucoup de machines agricoles très intéressantes, et, en outre, beaucoup de modèles des machines-à-vapeur de différents systèmes, ainsi qu'une machine rotative d'une construction spéciale. C'est encore ici que j'ai vu nombre de produits de l'industrie belge et assisté à une leçon de la Mécanique appliquée faite par M. Kent. Après avoir passé 3 jours à Bruxelles, j'ai continué mon voyage pour Berlin, où je suis arrivé le 26 octobre.

Il m'intéressait beaucoup de faire la connaissance du célèbre géomètre Lejeune-Dirichlet. Parmi les investigations faites par ce savant en l'Analyse, la première place appartient à ses principes de l'application du calcul des infiniment petits à la recherche des propriétés des nombres. Mais il n'a été publié jusqu'à ce jour qu'une certaine partie de ses recherches sur cette question; quant au reste de ses travaux, nous n'en savons rien, excepté quelques résultats définitifs restés sans démonstration. Les investigations de M. Lejeune-Dirichlet m'intéressaient particulièrement, car je m'occupais des mêmes questions; dans mon article, présenté à l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg sous le titre „Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", j'ai démontré que la formule trouvée, par analogie, par Legendre pour déterminer la quantité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, devait être remplacée par une autre; ce résultat était d'autant plus inattendu que M. Lejeune-Dirichlet, parlant de ses recherches

touchant cette question, ne dit rien de l'inexactitude de la formule de Legendre.

Pendant mon séjour à Berlin je trouvai chaque jour l'occasion de m'entretenir avec ce géomètre sur les recherches susdites ainsi que sur d'autres points d'Analyse pure et appliquée.

J'assistai avec un plaisir particulier à une de ses leçons sur la Mécanique théorique.

A Berlin j'ai appris, à mon grand regret, que, grâce aux gelées imprévues, la navigation au golfe de Finlande vient de cesser. Comme il ne restait que 10 jours jusqu'au terme de mon voyage, je courais le risque, en restant plus longtemps à Berlin, de retarder mon arrivée à St.-Pétersbourg. C'est pourquoi je suis parti le 30 octobre pour Tauroggen et je suis rentré à St.-Pétersbourg le 7 novembre.

C'est ainsi que j'ai profité de la permission Impériale de me rendre à l'étranger. La courte durée de mon voyage m'ôtant la possibilité d'embrasser toutes les questions faisant l'objet de la Mécanique appliquée, j'avais néanmoins étudié en détails les questions les plus importantes, ainsi que la construction des machines-à-vapeur de différents systèmes; le mouvement de ces machines suivant diverses conditions; les roues hydrauliques en général et en particulier les turbines; la construction des moulins-à-vent suivant le système hollandais; différents appareils pour la transmission du mouvement, la fabrication du papier à lettre, le filage du lin et le travail du fer. En outre je me suis beaucoup intéressé à la disposition de différents ateliers dans les fabriques, — ce qui est très important au point de vue pratique.

RÉSUMÉ

de la thèse sur l'intégration à l'aide des logarithmes.

I.

Dans la théorie de l'intégration des différentielles irrationnelles, la première place appartient aux différentielles qui contiennent rationnellement la racine carrée d'une fonction rationnelle.

II.

Si ces différentielles ne s'intègrent pas sans l'aide des logarithmes, on ne possède aucun procédé général d'intégration dans l'état actuel de l'Analyse.

III.

Un tel procédé est indispensable pour le perfectionnement de la théorie des fonctions d'Abel.

IV.

Il exige la solution de la question suivante: trouver des nombres entiers sous la condition que la somme de leurs produits par des quantités données (irrationnelles ou imaginaires) soit nulle, si c'est possible; dans le cas contraire, démontrer l'impossibilité.

V.

Dans l'état actuel de la Théorie des nombres nous ne pouvons résoudre cette question que dans certains cas particuliers.

VI.

Cette question étant résolue, l'intégration se ramène à la détermination de fonctions à l'aide d'équations indéterminées.

VII.

La solution de ces équations par la méthode des coefficients indéterminés présente de grandes difficultés.

VIII.

La solution s'obtient à l'aide des fractions continues.

IX.

Le rapport des intégrales, à l'aide desquelles Jacobi détermine les indices des fonctions inverses d'Abel et d'autres de la même espèce, peut avoir une valeur irrationnelle et réelle.

St.-Pétersbourg,
le 8 (20) mai 1847 r.

1.

DES MAXIMA ET MINIMA DES SOMMES

COMPOSÉES DE VALEURS D'UNE FONCTION ENTIÈRE ET DE SES DÉRIVÉES

(TRADUIT PAR M. N. DE KHANIKOF.)

(Liouville. Journal de mathématiques pures et appliquées. II série, T. XIII, 1868, p. 9—42.)

О наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ суммъ,

составленныхъ изъ значенiй цѣлой функцiи и ея производныхъ.

(Приложенiе къ XII тому Записокъ Императорской Академiи Наукъ, № 8, 1867 г., стр. 1—47.)

Des maxima et minima des sommes composées de valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées.

§ 1 Le calcul des variations nous donne le moyen de déterminer les valeurs *maxima* et *minima* des intégrales uniquement dans le cas, où la forme des fonctions inconnues, renfermées sous le signe de l'intégration, est supposée entièrement arbitraire. Mais si, d'après la nature de la question, la forme de ces fonctions inconnues est limitée par quelques conditions, leur détermination, en vue de rendre *maximum* ou *minimum* une intégrale, ou en général une somme quelconque de leurs valeurs, exige des procédés particuliers.

Nous nous bornerons ici à considérer le cas le plus simple de ce genre de questions; savoir, celui où la fonction inconnue est supposée entière et d'un degré déterminé, et où tous les termes de la somme proposée s'expriment au moyen de cette fonction, de ses dérivées et de la variable indépendante, et forment une fonction également entière et de forme déterminée.

Ce cas mérite une attention particulière à cause de ses applications, qui comprennent, entre autres, la solution de la question de l'interpolation parabolique d'après la méthode *des moindres carrés.*

§ 2. Soit

$$F(x, y, y', y'', \dots)$$

une fonction donnée et entière de la variable indépendante x, du polynôme inconnu

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_l x^l + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

et de ses dérivées

$$y', y'', \dots$$

Désignons par

$$x_1, x_2, x_3, \ldots .$$

une série de valeurs quelconques de la variable indépendante x, que pour plus de simplicité nous supposerons différentes entre elles, et par

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)$$

la somme des valeurs de la fonction

$$F(x, y, y', y'', \ldots .)$$

pour ces valeurs de la variable x. La valeur de cette somme dépendra de celle des coefficients

$$A_0, A_1, \ldots . A_l, \ldots . A_{m-1}$$

du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots . + A_l x^l + \ldots . + A_{m-1} x^{m-1},$$

et les valeurs de ces coefficients qui rendront la somme

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)$$

un *maximum* ou un *minimum*, d'après les principes du calcul différentiel, seront données par les équations:

$$\frac{d \Sigma F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dA_0} = 0,$$

$$\frac{d \Sigma F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dA_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d \Sigma F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dA_l} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d \Sigma F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dA_{m-1}} = 0.$$

Mais comme les quantités

$$A_0, A_1, \ldots . A_l, \ldots . A_{m-1}$$

n'entrent pas dans la formule

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)$$

indépendamment des fonctions y, y', y'',...., la dérivée de cette somme par rapport à A_l s'exprimera en général ainsi:

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_l} = \sum \frac{dF(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_l} =$$

$$\sum \frac{dF(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dy_i}\frac{dy_i}{dA_l} + \sum \frac{dF(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dy_i'}\frac{dy_i'}{dA_l} +$$

$$\sum \frac{dF(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dy_i''}\frac{dy_i''}{dA_l} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or la forme de la fonction

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

et de ses dérivées

$$y' = 1 . A_1 + \ldots + l A_l x^{l-1} + \ldots + (m-1) A_{m-1} x^{m-2},$$

$$y'' = 1.2\, A_2 + \ldots + l(l-1) A_l x^{l-2} + \ldots + (m-1)(m-2) A_{m-1} x^{m-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

nous donne

$$\frac{dy_i}{dA_l} = x_i^l, \quad \frac{dy_i'}{dA_l} = l x_i^{l-1}, \quad \frac{dy_i''}{dA_l} = l(l-1) x_i^{l-2}, \ldots.$$

En mettant ces valeurs des dérivées

$$\frac{dy_i}{dA_l}, \quad \frac{dy_i'}{dA_l}, \quad \frac{dy_i''}{dA_l}, \ldots.$$

dans l'expression trouvée pour la dérivée

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y_i'\ y_i'', \ldots)}{dA_l}$$

et en désignant, pour abréger, les valeurs des dérivées

$$\frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy}, \quad \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'}, \quad \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''}, \ldots,$$

pour x quelconque par

$$M, \ N, \ P, \ldots,$$

et pour $x = x_i$ par

$$M_i, \ N_i, \ P_i, \ldots,$$

nous aurons

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_l} = \sum M_i x_i^l + \sum l N_i x_i^{l-1} + \sum l(l-1) P_i x_i^{l-2} + \ldots.$$

En déterminant, à l'aide de cette formule, les valeurs de la dérivée

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_l}$$

pour

$$l = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ m-1,$$

nous verrons que les équations qui déterminent les valeurs des coefficiens du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

qui rendent la somme

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)$$

un *maximum* ou un *minimum*, se réduisent donc à:

$$\sum M_i x_i^0 = 0,$$
$$\sum M_i x_i + \sum 1 . N_i x_i^0 = 0,$$
$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1 . 2 P_i x_i^0 = 0,$$
. . . .
$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x_i^{m-2} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \ldots = 0.$$

§ 3. Faisant, pour abréger,

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1}) = \varphi(x)$$

et désignant par

$$U,\ V,\ W, \ldots$$

les fonctions entières qu'on obtient en divisant les produits

$$M\varphi'(x),\quad N\varphi'(x),\quad P\varphi'(x), \ldots$$

par $\varphi(x)$, nous remarquons que les fractions

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)},\quad \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)},\quad \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \ldots,$$

transformées en fractions simples, s'expriment ainsi:

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)}=U+\sum\frac{M_i}{x-x_i};\ \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}=V+\sum\frac{N_i}{x-x_i};\ \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}=W+\sum\frac{P_i}{x-x_i};\ldots;$$

où, d'après notre notation (n° 2)

$$M_i,\ N_i,\ P_i,\ldots.$$

désignent les valeurs de

$$M,\ N,\ P,\ldots.$$

quand on y fait $x=x_i$, et les sommations doivent être étendues à toutes les valeurs de x, depuis $x=x_1$ jusqu'à $x=x_n$.

Si, à l'aide de ces formules, nous déterminons la valeur de l'expresion

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx}+\frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2}-\ldots.,$$

nous trouverons qu'elle se réduit à

$$U-\frac{dV}{dx}+\frac{d^2W}{dx^2}+\ldots.+\sum\left(\frac{M_i}{x-x_i}+\frac{N_i}{(x-x_i)^2}+\frac{2P_i}{(x-x_i)^3}+\ldots.\right);$$

où les termes

$$U-\frac{dV}{dx}+\frac{d^2W}{dx^2}-\ldots.$$

expriment une fonction entière. Quant à la somme

$$\sum\left(\frac{M_i}{x-x_i}+\frac{N_i}{(x-x_i)^2}+\frac{2P_i}{(x-x_i)^3}+\ldots.\right),$$

après y avoir transformé les fractions

$$\frac{M_i}{x-x_i},\quad \frac{N_i}{(x-x_i)^2},\quad \frac{2P_i}{(x-x_i)^3},\ldots.$$

en séries

$$\frac{M_i x_i^0}{x}+\frac{M_i x_i}{x^2}+\frac{M_i x_i^2}{x^3}+\ldots.,$$

$$\frac{N_i x_i^0}{x^2}+\frac{2N_i x_i}{x^3}+\frac{3N_i x_i^2}{x^4}+\ldots.,$$

$$\frac{1.2.P_i x_i^0}{x^3}+\frac{2.3\ P_i x_i}{x^4}+\frac{3.4.P_i x_i^2}{x^5}+\ldots.$$

. . . .

et après y avoir réuni les termes de dénominateurs communs, elle nous donne la série suivante:

$$\frac{\Sigma M_i x_i^0}{x}+\frac{\Sigma M_i x_i+\Sigma N_i x_i^0}{x^2}+\frac{\Sigma M_i x_i^2+\Sigma 2N_i x_i+\Sigma 1.2\,P_i x_i^0}{x^3}+\ldots.$$

Donc il résulte que les sommes

$$\sum M_i x_i^0,$$

$$\sum M_i x_i + \sum N_i x_i^0,$$

$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1.2\, P_i x_i^0,$$

. . . .

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x_i^{m-2} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \ldots,$$

sont les coefficients de

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x^3},\ \ldots\ \frac{1}{x^m}$$

dans le développement de l'expression

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\,\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots$$

selon les puissances décroissantes de la variable x. Mais nous savons, d'après le n° 2, que ces sommes forment les premiers membres des équations qui déterminent les valeurs des coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

pour lesquels la somme

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)$$

devient un maximum ou un minimum, et nous concluons que ces équations s'obtiennent en réduisant à zéro les coefficients de

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x^3},\ \ldots,\ \frac{1}{x^m}$$

dans le développement de l'expression

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\,\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots$$

suivant les puissances décroissantes de la variable x. Partant sous cette condition:

L'expression

(1) $$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\,\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots,$$

avec une approximation poussée jusqu'aux puissances x^{-m} inclusivement, est égale à une fonction entière où M, N, P, ... sont, comme nous l'avons vu dans le n° 2, les dérivées partielles de la fonction $F(x, y, y', y'', \ldots)$, prises par rapport à $y, y', y'', \ldots$

§ 4. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

étaient entièrement arbitraires: examinons maintenant le cas où le choix de ces coefficients est limité par plusieurs équations de la forme

$$\sum f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) = \alpha_1,$$
$$\sum f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où

$$f_1(x, y, y', y'', \ldots), \quad f_2(x, y, y', y'', \ldots), \ \ldots$$

sont des fonctions entières quelconques de x, du polynôme y et de ses dérivées y', y'', ... Nous supposerons d'abord que les sommes que nous venons d'écrire s'étendent aux mêmes valeurs de la variable x

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1},$$

ainsi que la somme

$$\sum f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots),$$

dont on cherche la valeur maximum ou minimum.

Par les propriétés connues des *maxima* et *minima relatifs*, les valeurs des coefficients

$$A_0, A_1, A_2, \ldots A_{m-1},$$

qui rendent la somme

$$\sum f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)$$

un maximum ou un minimum sous les conditions exprimées par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) = \alpha_1, \\ \sum f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

se déterminent en égalant à zéro les dérivées partielles prises par rapport à $A_0, A_1, \ldots, A_m$ de la somme

$$\sum f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \lambda_1 \sum f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \lambda_2 \sum f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \ldots,$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont des facteurs constants.

Cette somme se ramène à la suivante:

$$\sum\left[f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \lambda_2 f_2(x, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \ldots\right],$$

qui peut être remplacée par

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots),$$

en supposant que

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = f_0(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x, y, y', y'' \ldots) + \lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \ldots) + \ldots$$

Ainsi, d'après ce qui vient d'être exposé dans les nos 2 et 3 concernant les équations

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_0} = 0,$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_{m-1}} = 0,$$

nous concluons que, dans le cas actuel, les équations propres à déterminer les coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

se réduiront à la condition trouvée à la fin du n° 3, en ne perdant pas toutefois de vue que la fonction

$$F(x, y, y', y'', \ldots)$$

doit être remplacée par la somme

$$f_0(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \ldots) + \ldots,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont des facteurs inconnus constants. Cette condition nous donnera les moyens de déterminer les coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

en fonction des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots.$ En mettant enfin ces coefficients du polynôme y dans les équations (2), nous aurons autant d'équations qu'il y a de facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ d'où nous obtiendrons leurs valeurs.

§ 5. Passons maintenant au cas où il s'agirait de rendre maximum ou minimum une somme

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$$

étendue aux valeurs

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

mais de façon que le choix des coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

soit limité par les équations de condition

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$
$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où les sommes s'étendent respectivement à toutes les valeurs de x:

$$x = b_1, b_2, b_3, \ldots,$$
$$x = c_1, c_2, c_3, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

différentes entre elles et différentes aussi des valeurs

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Pour réduire ce cas à celui que nous venons d'examiner dans le numéro précédent, nous remplacerons toutes ces sommes, étendues à différentes valeurs de la variable x, par des sommes étendues aux mêmes valeurs de la variable indépendante. Pour y parvenir, nous poserons

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots = \varphi_0(x),$$
$$(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \ldots = \varphi_1(x),$$
$$(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \ldots = \varphi_2(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\ldots=\varphi(x)=$$

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots.(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots.(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots.,$$

Puis nous déterminerons des fonctions entières

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ldots.,$$
$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ldots.,$$

de manière à ce qu'elles satisfassent aux équations

$$(3)\qquad\begin{cases}\varphi'(x)\,S_0=\varphi(x)\,T_0+\varphi_0'(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots.,\\ \varphi'(x)\,S_1=\varphi(x)\,T_1+\varphi_1'(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_2(x)\ldots.,\\ \varphi'(x)\,S_2=\varphi(x)\,T_2+\varphi_2'(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\ldots.,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Ces équations auront toujours une solution, car, par hypothèse, les racines de l'équation $\varphi(x)=0$, égales à a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., c_1, c_2, ..., diffèrent toutes entre elles; donc la fonction $\varphi(x)$ n'aura pas de facteur commun avec sa dérivée $\varphi'(x)$. Il sera aisé de montrer, à l'aide de ces équations (3), que les sommes

$$\sum S_0\,\Phi_0(x,y,y',y'',\ldots.),\ \sum S_1\,\Phi_1(x,y,y',y'',\ldots),\ \sum S_2\,\Phi_2(x,y,y',y'',\ldots.),\ \ldots.,$$

étendues à toutes les valeurs de

$$x=a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots.,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ldots.,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ldots.,$$

se réduiront: à la somme

$$\sum\Phi_0(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots.),$$

étendue uniquement aux valeurs de $x=a_1$, a_2, a_3, ...; à la somme

$$\sum\Phi_1(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots.),$$

étendue uniquement aux valeurs de $x=b_1$, b_2, b_3, ...: à la somme

$$\sum\Phi_2(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots.),$$

étendue uniquement aux valeurs de $x = c_1, c_2, c_3, \ldots$, et ainsi de suite. Pour le faire voir à l'égard de la somme

$$\sum S_0 \Phi_0 (x, y, y', y'', \ldots),$$

nous remarquons que, d'après l'équation

$$\varphi'(x) S_0 = \varphi(x) T_0 + \varphi_0'(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots$$

et d'après la manière dont les fonctions

$$\varphi(x), \varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots,$$

sont formées, la fonction S_0 deviendra zéro pour $x = b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots$; c'est-à-dire pour les racines communes aux équations

$$\varphi(x) = 0$$

et

$$\varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots = 0;$$

car, pour ces valeurs de la variable x, la dérivée $\varphi'(x)$ ne pourra pas devenir zéro, n'ayant pas, comme nous venons de le dire, de facteur commun avec $\varphi(x)$.

D'un autre côté, pour

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

racines communes aux équations

$$\varphi(x) = 0, \ \varphi_0(x) = 0,$$

nous voyons que la dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{d \varphi_0(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots}{dx} =$$

$$= \varphi_0'(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots + \varphi_1'(x) \varphi_0(x) \varphi_2(x) \ldots + \varphi_2'(x) \varphi_0(x) \varphi_1(x) \ldots + \ldots$$

se réduit au produit

$$\varphi'_0(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots$$

et par conséquent, en vertu de l'équation

$$\varphi'(x) S_0 = \varphi(x) T_0 + \varphi_0'(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots,$$

pour ces valeurs de x, ou bien pour $x = a_1, a_2, a_3, \ldots$, on aura

$$S_0 = 1.$$

D'où il est évident que la somme

$$\sum S_0\ \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots .),$$

étendue à toutes les valeurs de la variable x,

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots ., b_1, b_2, b_3, \ldots ., c_1, c_2, c_3, \ldots .,$$

se réduit à la somme

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots .),$$

étendue uniquement aux valeurs de

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots .$$

Nous trouverons de même que les sommes

$$\sum S_1\ \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots .), \quad \sum S_2\ \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots .), \ldots .,$$

étendues aux valeurs de la variable x,

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots ., b_1, b_2, b_3, \ldots ., c_1, c_2, c_3, \ldots .,$$

se réduisent à la somme

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots .),$$

étendue seulement aux valeurs de

$$x = b_1, b_2, b_3, \ldots .,$$

à la somme

$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots .),$$

étendue seulement aux valeurs de

$$x = c_1, c_2, c_3, \ldots .,$$

et ainsi de suite.

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y''), \ldots .),$$

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y''), \ldots .),$$

$$\sum \Phi_2(x, y, y', y''), \ldots .),$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ,$$

En remplaçant, d'après ce qui vient d'être dit, les sommes

$$\sum S_0\, \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots\ldots),$$
$$\sum S_1\, \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots\ldots),$$
$$\sum S_2\, \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots\ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

étendues chacune à des valeurs différentes de la variable x, par les sommes étendues aux mêmes valeurs de la variable x données par l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

nous concluons que dans ce cas les coefficients du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

se détermineront par la méthode indiquée dans le numéro précédent, quand on remplacera dans les formules de ce numéro les fonctions

$$f_0(x, y, y', y'', \ldots\ldots),\ f_1(x, y, y', y'', \ldots\ldots),\ f_2(x, y, y', y'', \ldots\ldots), \ldots\ldots$$

par les produits

$$S_0\, \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots\ldots),\ S_1\, \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots\ldots),\ S_2\, \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots\ldots), \ldots\ldots$$

et par conséquent ils se détermineront par la condition établie à la fin du n° 3 si l'on y pose

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots) = S_0\, \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots\ldots) + \lambda_1 S_1\, \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots\ldots)$$
$$+ \lambda_2 S_2\, \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots\ldots) + \ldots\ldots,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$, sont des facteurs constants, mais inconnus.

En déterminant, pour cette forme de la fonction $F(y, y, y', y'', \ldots\ldots)$, la valeur des dérivées

$$M = \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots\ldots)}{dy},$$
$$N = \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots\ldots)}{dy'},$$
$$P = \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots\ldots)}{dy''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en désignant les dérivées partielles des fonctions

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots), \quad \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots), \quad \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots), \ldots$$

prises par rapport à

$$y, y', y'', \ldots$$

par

$$\begin{array}{l} M_0, M_1, M_2, \ldots, \\ N_0, N_1, N_2, \ldots, \\ P_0, P_1, P_2, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

nous obtenons

$$\begin{array}{l} M = S_0 M_0 + \lambda_1 S_1 M_1 + \lambda_2 S_2 M_2 + \ldots, \\ N = S_0 N_0 + \lambda_1 S_1 N_1 + \lambda_2 S_2 N_2 + \ldots, \\ P = S_0 P_0 + \lambda_1 S_1 P_1 + \lambda_2 S_2 P_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

Donc l'expression (1), qui d'après le n° 3, doit être égale, pour la valeur cherchée du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

à une fonction entière, avec une approximation poussée jusqu'à la puissance x^{-m} inclusivement, s'exprimera ainsi:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{S_0 M_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \dfrac{S_1 M_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \dfrac{S_2 M_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots \\ - \dfrac{d\left\{ \dfrac{S_0 N_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \dfrac{S_1 N_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \dfrac{S_2 N_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots \right\}}{dx} \\ + \dfrac{d^2\left\{ \dfrac{S_0 P_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \dfrac{S_1 P_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \dfrac{S_2 P_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \ldots \right\}}{dx^2} \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Mais les équations (3), qui servent à déterminer les fonctions S_0, S_1, S_2, ..., nous donnent

$$\begin{array}{l} \dfrac{S_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_0 + \dfrac{\varphi_0'(x)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(x) \ldots}{\varphi(x)}, \\ \dfrac{S_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_1 + \dfrac{\varphi_1'(x)\, \varphi_0(x)\, \varphi_2(x) \ldots}{\varphi(x)}, \\ \dfrac{S_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_2 + \dfrac{\varphi_2'(x)\, \varphi_0(x)\, \varphi_1(x) \ldots}{\varphi(x)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

En remplaçant, dans les seconds membres de ces équations, $\varphi(x)$ par le produit

$$\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\ldots,$$

nous aurons

$$\frac{S_0\varphi'(x)}{\varphi(x)}=T_0+\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)},$$

$$\frac{S_1\varphi'(x)}{\varphi(x)}=T_1+\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)},$$

$$\frac{S_2\varphi'(x)}{\varphi(x)}=T_2+\frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où l'on voit que les fonctions

$$\frac{S_0\varphi'(x)}{\varphi(x)},\quad\frac{S_1\varphi'(x)}{\varphi(x)},\quad\frac{S_2\varphi'(x)}{\varphi(x)},\ldots\ldots$$

et

$$\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)},\quad\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)},\quad\frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)},\ldots\ldots$$

ne diffèrent entre elles que par des parties entières. Donc, si dans l'expression (4) nous mettons ces dernières fonctions à la place des premières, nous ne changerons que la partie entière de cette expression; quant au degré d'exactitude avec lequel cette formule représente une fonction, il restera le même, et par conséquent elle pourra toujours servir à déterminer le polynôme

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_{m-1}x^{m-1}.$$

En exécutant cette substitution nous obtenons l'expression suivante:

$$\frac{M_0\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}+\lambda_1\frac{M_1\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}+\lambda_2\frac{M_2\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)}+\ldots\ldots$$
$$-\frac{d\left\{\frac{N_0\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}+\lambda_1\frac{N_1\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}+\lambda_2\frac{N_2\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)}+\ldots\ldots\right\}}{dx}$$
$$+\frac{d^2\left\{\frac{P_0\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}+\lambda_1\frac{P_1\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}+\lambda_2\frac{P_2\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)}+\ldots\ldots\right\}}{dx^2}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette expression, d'après ce qui vient d'être exposé, doit se réduire à une fonction entière, qui la représentera exactement jusqu'à la puissance $-m$ de la variable x inclusivement, toutes les fois que le polynôme

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_{m-1}x^{m-1},$$

aura des coefficients voulus pour que la somme

$$\sum\Phi_0(x,\,y,\,y',\,y'',\ldots\ldots)$$

devienne un maximum ou un minimum, sous les conditions

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$
$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Nous sommes parvenus à cette conclusion en supposant que les séries

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots,$$
$$c_1, c_2, c_3, \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

ne contenaient pas des termes égaux entre eux; mais, par la méthode des limites, il nous serait aisé de l'appliquer aussi au cas où ces séries auraient des termes communs.

§ 6. Nous avons établi, dans ce qui précède, la condition qui sert à déterminer la valeur du polynôme d'un degré donné y, qui rend la somme

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$$

un maximum ou un minimum, et nous n'avons fait que deux hypothèses concernant les coefficients de ce polynôme. D'après l'une, leurs valeurs étaient supposées arbitraires, et d'après l'autre, elles devaient satisfaire aux équations

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$
$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Dans ce dernier cas, la condition qui sert à déterminer le polynôme cherché contient des constantes inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, dont les valeurs se trouvent par les mêmes équations de condition auxquelles doit satisfaire le polynôme y, et qui sont en nombre égal à celui des inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

La détermination du polynôme y, limité par la condition de rendre la somme

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots),$$

un maximum ou un minimum, a de l'analogie avec la solution des questions semblables dans le calcul des variations. Dans le cas particulier, quand cette somme se réduit à une intégrale, le polynôme y, déterminé comme il vient

d'être dit, peut être considéré comme une valeur approchée de la fonction qu'on obtient à l'aide de la méthode des variations. Mais dans le calcul des variations la fonction cherchée, étant déterminée par une équation différentielle, s'obtient en l'intégrant par les méthodes connues, tandis que, dans le cas que nous examinons, la détermination du polynôme y exige des procédés spéciaux, car elle se réduit à une condition qui ne se laisse pas exprimer par des équations de formes connues.

Pour montrer comment des polynômes peuvent être déterminés à l'aide de ces conditions, examinons le cas très-simple où les fonctions

$$\begin{array}{l}\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots.), \\ \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots.), \\ \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots.), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

ne contiennent y qu'à une puissance qui ne dépasse pas la seconde, ses dérivées

$$y', \; y'', \ldots.$$

à une puissance qui ne dépasse pas l'unité, et avec des coefficients qui ne dépendent que de la variable x.

Dans ce cas les dérivées

$$M_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots.)}{dy}, \quad M_1 = \frac{d\,\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots.)}{dy}, \ldots.$$

ne contiendront pas y', y'', $\ldots.$, et y ne s'y trouvera qu'à la première puissance. Quant aux dérivées

$$\begin{array}{ll} N_0 = \dfrac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots.)}{dy'}, & N_1 = \dfrac{d\,\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots.)}{dy'}, \ldots., \\ P_0 = \dfrac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots.)}{dy''}, & P_1 = \dfrac{d\,\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots.)}{dy''}, \ldots., \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

elles ne contiendront pas du tout y, y', y'', $\ldots.$ Partant l'expression

$$\begin{array}{l} \dfrac{M_0\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \dfrac{M_1\,\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \dfrac{M_2\,\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots. \\ - \dfrac{d\left\{\dfrac{N_0\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \dfrac{N_1\,\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \dfrac{N_2\,\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right\}}{dx} \\ + \dfrac{d^2\left\{\dfrac{P_0\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \dfrac{P_1\,\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \dfrac{P_2\,\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right\}}{dx^2} \\ - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

qui d'après le n° 5, moyennant le polynôme cherché

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

doit devenir égale à une fonction entière jusqu'au terme en x^{-m} inclusivement près, se réduira au binôme

$$uy - v,$$

dans lequel u et v sont fonctions de la seule variable indépendante x.

Ainsi, dans ce cas, la recherche du polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

assujetti à la condition de rendre la somme

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$$

un maximum ou un minimum, se réduit à la détermination d'un polynôme y, de degré $m-1$, tel que le binôme $uy - v$, jusqu'au terme en x^{-m} inclusivement près, soit une fonction entière. Nous allons montrer que les polynômes qui jouissent de cette propriété s'obtiennent facilement à l'aide de la série que j'ai publiée dans mon Mémoire intitulé: *Développement des fonctions en séries à l'aide des fractions continues* *).

§ 7. Nous avons établi dans ce Mémoire, qu'en développant une fonction quelconque u en fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}},$$

en désignant, de plus, par

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$$

ses fractions réduites, par

$$R_1, \; R_2, \; R_3, \ldots$$

les différences

$$uQ_1 - P_1, \quad uQ_2 - P_2, \quad uQ_3 - P_3, \ldots,$$

et par

$$\omega_1, \; \omega_2, \; \omega_3, \ldots$$

---

*) T. I, pages 617—636.

les fonctions entières qu'on obtient à l'aide de la formule

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\, \mathrm{E} q_n\, (Q_n v - \mathrm{E}\, Q_n v),$$

nous aurons pour développer la fonction v d'après les valeurs

$$R_1,\ R_2,\ R_3, \ldots .$$

la série que voici

(5) $$v = \mathrm{E} v + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \ldots .$$

où E désigne la partie entière de la fonction, et où l'on admet que u et v sont des fonctions développables suivant les puissances entières et décroissantes de la variable x.

Pour déterminer, à l'aide de cette série, le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots . + A_{m-1} x^{m-1},$$

au moyen duquel la différence

$$uy - v,$$

est réductible à une fontion entière, exactement jusqu'aux termes en x^{-m} inclusivement, désignons par

$$Q_\mu$$

le dernier dénominateur des fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3}, \ldots ,$$

dont le degré soit inférieur à m, et par

$$F_\mu,\ F_{\mu-1}, \ldots\ F_2,\ F_1,$$
$$r_\mu,\ r_{\mu-1}, \ldots\ r_2,\ r_1$$

les quotients et les restes obtenus par la division du polynôme y par Q_μ, du premier reste r_μ par $Q_{\mu-1}$, du second reste par $Q_{\mu-2}$, et ainsi de suite.

En égalant les dividendes aux produits des quotients par diveseurs ajoutés aux restes, nous obtenons une suite d'équations

$$y = F_\mu Q_\mu + r_\mu,\ r_\mu = F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + r_{\mu-1}, \ldots,\ r_3 = F_2 Q_2 + r_2,\ r_2 = F_1 Q_1 + r_1.$$

En éliminant des équations les restes

$$r_\mu,\ r_{\mu-1}, \ldots\ r_3,\ r_2$$

et en observant que le dernier reste r_1, qu'on obtient par la division de l'avant-dernier reste par $Q_1 = 1$ est zéro, nous sommes conduits à l'expression de y que voici

$$y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \ldots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1.$$

Mais comme notre polynôme cherché

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

ne sera jamais d'un degré supérieur à $m-1$, il est évident que la fonction F_μ, qui s'obtient par la division de y par Q_μ, ne pourra pas être d'un degré plus élevé que celui de

$$\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$$

et par conséquent son degré sera inférieur à celui du quotient

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu};$$

car, par hypothèse, $Q_{\mu+1}$ est d'un degré supérieur à $m-1$.

Quant aux fonctions

$$F_{\mu-1},\ F_{\mu-2}, \ldots,\ F_2,\ F_1$$

leurs degrés seront inférieurs à ceux des quotients

$$\frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}},\ \frac{Q_{\mu-1}}{Q_{\mu-2}}, \ldots,\ \frac{Q_3}{Q_2},\ \frac{Q_2}{Q_1};$$

car elles résultent de la division des restes

$$r_\mu,\ r_{\mu-1}, \ldots,\ r_2,\ r_1$$

par

$$Q_{\mu-1},\ Q_{\mu-2}, \ldots,\ Q_2,\ Q_1,$$

et ces restes eux-mêmes obtenus par la division de y par

$$Q_\mu,\ Q_{\mu-1}, \ldots,\ Q_2,\ Q_1.$$

et ainsi de suite, seront nécessairement de degrés inférieurs à ceux de

$$Q_\mu,\ Q_{\mu-1}, \ldots,\ Q_2,\ Q_1.$$

Pour déterminer les facteurs

$$F_\mu,\ F_{\mu-1}, \ldots,\ F_2,\ F_1$$

dans le développement de y par la formule

$$y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \ldots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1, \tag{6}$$

nous observons que le binôme

$$uy - v,$$

devient, en y substituant pour y sa dernière valeur, et en y exprimant v par la formule (5),

$$uy - v = F_\mu Q_\mu u + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} u + \dots + F_2 Q_2 u + F_1 Q_1 u$$
$$- \mathrm{E} v - \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2 - \omega_3 R_3 \dots,$$

d'où, en y remplaçant

$$Q_\mu u, \; Q_{\mu-1} u, \dots, \; Q_2 u, \; Q_1 u,$$

par leurs valeurs déduites des égalités

$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu, \; R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1}, \dots,$$

nous obtenons la formule que voici

$$uy - v = - \mathrm{E} v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu$$
$$+ (F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \dots +$$
$$(F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1}) R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \dots$$

En examinant cette nouvelle expression de la différence

$$uy - v,$$

nous voyons que ses termes

$$- \mathrm{E} v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu$$

forment une fonction entière, et que les autres, comme il est aisé de le voir, sont tous de puissances négatives qui vont en décroissant. En effet, conformément à notre notation,

$$R_1 = Q_1 u - P_1, \; R_2 = Q_2 u - P_2, \dots, \; R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1},$$
$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu, \; R_{\mu+1} = Q_{\mu+1} u - P_{\mu+1}, \dots;$$

et ces restes, d'après les propriétés des fractions réduites, sont de degrés égaux à ceux des fractions

$$\frac{1}{Q_2}, \; \frac{1}{Q_3}, \; \frac{1}{Q_4}, \dots, \; \frac{1}{Q_\mu}, \; \frac{1}{Q_{\mu+1}}, \; \frac{1}{Q_{\mu+2}}, \dots;$$

En rapprochant ces considérations de ce qui a été dit, dans le numéro précédent, sur les fonctions

$$F_1, \; F_2, \; F_3, \dots, \; F_{\mu-1}, \; F_\mu$$

et, dans le Mémoire cité, sur les fonctions

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_{\mu-1},\ \omega_\mu,\ \omega_{\mu+1},\ \ldots$$

il devient évident que dans les derniers termes de la formule

$$(F_1-\omega_1)R_1+(F_2-\omega_2)R_2+\ldots+(F_{\mu-1}-\omega_{\mu-1})R_{\mu-1}+$$
$$(F_\mu-\omega_\mu)R_\mu-\omega_{\mu+1}R_{\mu+1}-\ldots\ldots,$$

les facteurs de

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots$$

seront des fonctions entières de degrés inférieurs à ceux de

$$\frac{Q_2}{Q_1},\ \frac{Q_3}{Q_2},\ldots,\ \frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}},\ \frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu},\ \frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}},\ldots;$$

Donc le premier de ces termes $(F_1-\omega_1)R_1$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_2}{Q_1}\frac{1}{Q_2}=\frac{1}{Q_1}$ et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_2}$; le second terme $(F_2-\omega_2)R_2$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_3}{Q_2}\frac{1}{Q_3}=\frac{1}{Q_2}$ et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_3},\ldots$; le terme $\omega_{\mu+1}R_{\mu+1}$ sera d'un degré inférieur à $\frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}}\frac{1}{Q_{\mu+2}}=\frac{1}{Q_{\mu+1}}$, et ne sera pas inférieur à $\frac{1}{Q_{\mu+2}}$, et ainsi de suite.

D'où il résulte que dans l'expression ci-dessus trouvée pour le binôme

$$uy-v$$

la partie fractionnaire sera exprimée par la série

$$(F_1-\omega_1)R_1+(F_2-\omega_2)R_2+\ldots+(F_{\mu-1}-\omega_{\mu-1})R_{\mu-1}+$$
$$(F_\mu-\omega_\mu)R_\mu-\omega_{\mu+1}R_{\mu+1}-\ldots\ldots;$$

où les puissances des membres vont en décroissant. Donc le degré d'exactitude avec lequel notre binôme se réduit à une fonction entière sera déterminé par le degré du premier de ses termes qui ne devient pas zéro.

A l'aide de ce résultat, il nous sera aisé de trouver les valeurs des fonctions

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_{\mu-1},\ F_\mu,$$

qui entrent dans l'expression (6) du polynôme cherché, ou de nous convaincre de son impossibilité.

Les termes

$$(F_1-\omega_1)R_1,\ (F_2-\omega_2)R_2,\ \ldots,\ (F_{\mu-1}-\omega_{\mu-1})R_{\mu-1},$$

comme nous venons de le voir, ne peuvent être de degrés inférieurs à ceux des fractions

$$\frac{1}{Q_2}, \quad \frac{1}{Q_3}, \ldots, \quad \frac{1}{Q_\mu},$$

donc ils ne peuvent être d'un degré inférieur à

$$x^{-m+1};$$

car, d'après notre notation, dans la suite des dénominateurs

$$Q_1, \; Q_2, \; Q_3, \ldots, \; Q_\mu$$

il n'y en aura pas un seul d'un degré supérieur à $m-1$. Ainsi la différence ne peut se ramener à une fonction entière $uy-v$ qui la représente exactement jusqu'au terme contenant la puissance x^{-m}, que dans le cas où tous ces termes disparaissent, ce qui entraîne forcément les équations suivantes:

$$F_1 - \omega_1 = 0, \; F_2 - \omega_2 = 0, \ldots, \; F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1} = 0$$

qui nous donnent

(7) $$F_1 = \omega_1, \; F_2 = \omega_2, \ldots, \; F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1}.$$

Avec ces valeurs des fonctions

$$F_1, \; F_2, \ldots \; F_{\mu-1}$$

l'expression ci-dessus trouvée pour la partie fractionnaire du binôme

$$uy - v$$

se réduit à la série

$$(F_\mu - \omega_\mu) \, R_\mu - \omega_{\mu+1} \, R_{\mu+1} - \omega_{\mu+2} \, R_{\mu+2} - \ldots;$$

où, comme nous venons de le voir, les termes

$$\omega_{\mu+1} \, R_{\mu+1}, \; \omega_{\mu+2} \, R_{\mu+2}, \ldots$$

sont de degrés inférieurs à ceux des fractions

$$\frac{1}{Q_{\mu+1}}, \quad \frac{1}{Q_{\mu+2}}, \ldots,$$

et par conséquent inférieurs à

$$x^{-m};$$

car, d'après notre notation, les dénominateurs

$$Q_{\mu+1}, \; Q_{\mu+2}, \ldots$$

ne sont pas de degrés inférieurs à m. Nous voyons ainsi que pour réduire l'expression ci-dessus trouvée de la différence

$$uy - v$$

à une fonction entière qui la représente exactement jusqu'aux termes où la variable x est à la puissance $-m$, il est nécessaire et suffisant de donner aux fonctions

$$F_1,\ F_2, \ldots,\ F_{\mu-1}$$

les valeurs (7) et de rendre la puissance du membre

$$(F_\mu - \omega_\mu)\ R_\mu$$

inférieure à $-m$.

Mais comme, d'un autre côté, pour que le polynôme cherché, représenté par la formule

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \ldots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

reste, comme l'exigent les conditions de la question, d'un degré qui ne soit pas supérieur à m, il est nécessaire et suffisant qu'avec les valeurs (7) des fonctions F_1, $F_2, \ldots$, $F_{\mu-1}$, le terme $F_\mu\ Q_\mu$ ne soit pas d'un degré supérieur à $m - 1$, car tous les autres, comme il est aisé de le voir, seront de degrés inférieurs à $m - 1$.

En effet, conformément à ce qui vient d'être dit, les degrés des facteurs

$$F_1 = \omega_1,\ F_2 = \omega_2, \ldots,\ F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1}$$

seront inférieurs à ceux de

$$\frac{Q_2}{Q_1},\ \frac{Q_3}{Q_2}, \ldots,\ \frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}},$$

donc les produits

$$F_1 Q_1,\ F_2 Q_2, \ldots,\ F_\mu Q_\mu$$

ne contiendront que des termes de degrés inférieurs à

$$Q_2,\ Q_3, \ldots,\ Q_\mu,$$

et par conséquent inférieurs à la puissance

$$x^{m-1};$$

car, d'après notre notation, tous ces dénominateurs des fractions réduites de u ont des degrés moindres que $m - 1$.

En vertu de quoi nous concluons que le polynôme cherché y sera donné par la formule

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \ldots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

où

$$F_1 = \omega_1,\ F_2 = \omega_2, \ldots,\ F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1},$$

et où le facteur F_μ est une fonction entière déterminée par les conditions suivantes:

La puissance du produit $F_\mu\, Q_\mu$ ne surpassera pas $m-1$, et la puissance du produit $(F_\mu - \omega_\mu)\, R_\mu$ ne surpassera pas $-m-1$.

Or, d'après notre notation,

$$R_\mu = Q_\mu\, u - P_\mu,$$

de plus, d'après les propriétés des fractions réduites,

$$Q_\mu\, u - P_\mu$$

étant du même degré que la fraction

$$\frac{1}{Q_{\mu+1}};$$

on peut, en déterminant le facteur F_μ par la méthode que nous venons d'exposer, remplacer R_μ par la fraction $\frac{1}{Q_{\mu+1}}$.

Ceci nous permet d'exprimer les conditions qui déterminent le facteur F_μ de la manière suivante:

La puissance du produit $F_\mu\, Q_\mu$ ne surpassera pas $m-1$, et la puissance du quotient $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ ne surprassera pas $-m-1$.

Quant aux fonctions

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3 \ldots\ldots,$$

elles s'expriment généralement, comme nous l'avons dit dans le numéro précédent, ainsi:

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\, \mathrm{E}\, q_n\, (Q_n\, v - \mathrm{E}\, Q_n\, v)$$

Ayant déterminé à l'aide de cette formule les valeurs

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots\ldots,\ \omega_{\mu-1}$$

et les ayant mises, conformément à (7), à la place de

$$F_1,\ F_2, \ldots\ldots,\ F_{\mu-1},$$

dans l'expression du polynôme cherché y, nous obtenons pour celui-ci la formule que voici:

$$y = \omega_1\, Q_1 + \omega_2\, Q_2 + \ldots\ldots + \omega_{\mu-1}\, Q_{\mu-1} + F_\mu\, Q_\mu,$$

où le facteur F_μ doit satisfaire aux conditions que nous venons d'énoncer.

Nous allons donc nous occuper, dans le numéro suivant, de la manière de déterminer F_μ sous ces conditions.

§ 8. D'après notre notation,

$$Q_\mu$$

est le dernier dénominateur de la suite

$$Q_1,\ Q_2, \dots,\ Q_\mu,\ Q_{\mu+1}, \dots$$

dont le degré est inférieur à m; par conséquent le dénominateur

$$Q_{\mu+1}$$

sera ou du degré m, ou d'un degré supérieur à m. Dans le premier cas, comme il sera aisé de le faire voir, il n'y aura qu'une valeur de F_μ propre à satisfaire aux conditions qui limitent le choix de cette quantité, c'est-à-dire qu'il faudra que F_μ soit égal à ω_μ; dans le second cas, ou il n'y aura pas du tout de valeur de F_μ qui satisfasse à ces conditions, ou bien F_μ s'exprimera au moyen d'une fonction à plusieurs coefficients arbitraires.

En effet, d'après les conditions qui déterminent la fonction F_μ, le degré du produit $F_\mu\ Q_\mu$ ne pourra pas surpasser $m-1$, et celui du quotient $\frac{F_\mu-\omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ ne surpassera pas $-m-1$, où le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est de la puissance m. Ainsi quand le numérateur sera entier et différent de zéro, le degré du quotient

$$\frac{F_\mu-\omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$$

sera nécessairement supérieur à $-m-1$. Donc, dans ce cas, on est forcé d'admettre que

$$F_\mu-\omega_\mu=0;$$

ou bien

$$F_\mu=\omega_\mu.$$

Ensuite, d'après ce qui a été dit précédemment, le degré de la fonction ω_μ est inférieur à celui de

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu},$$

donc, en donnant à F_μ la valeur ω_μ, nous rendons la puissance du produit

$$F_\mu\ Q_\mu$$

inférieure à celle de

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu}.\,Q_\mu=Q_{\mu+1},$$

et par conséquent inférieure à celle de x^m, car, dans le cas que nous examinons, le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est du degré m.

D'où il résulte que si $Q_{\mu+1}$ est du degré m, on peut toujours faire

$$F_\mu = \omega_\mu,$$

et qu'aucune autre valeur de ce facteur F_μ ne satisfera aux conditions établies dans le numéro précédent.

Dès lors, dans ce cas, le polynôme cherché y ne peut avoir qu'une seule valeur, et elle sera déterminée par la formule que nous venons d'écrire, c'est-à-dire par

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \ldots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

pourvu que nous y fassions

$$F_\mu = \omega_\mu.$$

Passons maintenant au cas où le dénominateur $Q_{\mu+1}$ est d'une puissance supérieure à m. Conformément aux conditions qui déterminent le facteur F_μ, le produit $F_\mu Q_\mu$ doit être d'un degré qui ne soit pas supérieur à $m - 1$, et le degré du quotient $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ ne doit pas surpasser $-m-1$, ou bien, ce qui est la même chose, le facteur F_μ ne doit pas avoir un degré supérieur à celui de $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, et le degré de la différence $F_\mu - \omega_\mu$ ne doit pas surpasser celui de $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$. Or cette propriété est évidemment exprimée par les deux équations suivantes:

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots, \tag{8}$$

et

$$F_\mu - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots, \tag{9}$$

où ν désigne la puissance de la fonction $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, ν_1 celle de la fonction $\frac{Q_{\mu-1}}{x^{m+1}}$; et les quantités

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C',\ C'', \ldots$$

sont des coefficients indéterminés.

L'élimination de F_μ à l'aide de ces deux équations nous donne

$$\omega_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - C' x^{\nu_1} - C'' x^{\nu_1-1} \ldots,$$

équation qui ne peut être satisfaite par aucune valeur des coefficients C_1, $C_2, \ldots$, C', $C'', \ldots$, si le degré de la fonction ω_μ surpasse ν et ν_1.

D'où il est aisé de voir que si la puissance de ω_μ est supérieure à ν et ν_1, il est impossible de satisfaire aux conditions qui déterminent F_μ dans l'expression du polynôme cherché, et par conséquent, dans ce cas, notre problème n'a pas de solution. Dans le cas contraire, quand la puissance de ω_μ n'est pas supérieure au moins à l'un des nombres ν et ν_1, la valeur du facteur F_μ sera facile à trouver, et, comme il est aisé de le voir, elle sera déterminée, ou par la seule équation (8) ou par la seule équation (9), selon que ν sera ou ne sera pas $< \nu_1$.

En effet, mettons l'expression de F_μ, donnée par l'équation (8), dans la formule (9), nous aurons

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots . - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots .$$

Si le nombre ν est inférieur au nombre ν_1, le degré de la première partie de cette équation ne surpassera pas celui de la seconde, car si $\nu < \nu_1$ la puissance de la fonction ω_μ ne peut être supérieure à ν_1, puisque dans ce cas, contrairement à l'hypothèse, cette puissance serait supérieure aux deux nombres ν et ν_1. Donc, par un choix convenable des coefficients C', C'', ..., on pourra toujours satisfaire, dans ce cas, à l'équation

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots . - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots .$$

quels que soient les coefficients C_1, C_2, ... du premier membre de cette équation.

De même si ν n'est pas $< \nu_1$, l'équation (9) nous donne

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots .,$$

et, en y laissant tous les coefficients arbitraires, nous obtenons une valeur de F_μ qui satisfait à l'équation (8) si l'on donne des valeurs convenables aux coefficients C_1, C_2, ...

Ainsi, il est bien établi que toutes les fois que le degré de la fonction ω_μ n'est pas supérieur au moins à l'un des deux nombres ν et ν_1 $\left(\text{degrés des fonctions } \frac{x^m - 1}{Q_\mu} \text{ et } \frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}\right)$, la valeur du facteur F_μ, satisfaisant aux conditions du numéro précédent, peut être trouvée. De plus, la valeur de F_μ sera déterminée par l'équation

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots .$$

ou par l'équation

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots .,$$

selon que l'on aura $\nu < \nu_1$ ou bien $\nu \geqq \nu_1$. Quant aux coefficients

$$C_1,\ C_2, \ldots,$$
$$C',\ C'', \ldots$$

ils restent arbitraires.

§ 9. Pour donner un exemple, cherchons à determiner le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

sous la condition de rendre maximum ou minimum la valeur de la somme

$$\sum \frac{1}{2} (y_i - f(x_i))^2 \, \theta(x_i),$$

étendue aux valeurs

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

Nous commencerons par supposer que le choix des coefficients

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots A_{m-1}$$

du polynôme cherché y n'est limité par aucune condition particulière, et puis nous traiterons le cas où la valeur d'un de ces coefficients

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots A_{m-1}.$$

est donnée.

La première hypothèse, avec les valeurs réelles de x_1, x_2, $x_3, \ldots$ et l'invariabilité de signe de la fonction $\theta(x)$, nous donnera la formule déjà connue de l'interpolation parabolique d'après la methode des *moindres carrés* dans les cas ordinaires; la seconde, avec les mêmes conditions pour les quantités x_1, x_2, $x_3, \ldots$ et la fonction $\theta(x)$, nous conduira aussi à une formule d'interpolation parabolique d'après la méthode des *moindres carrés*, mais dans les cas particuliers où l'un des coefficients de l'expression y est assujetti à la condition d'avoir une valeur donnée.

Si dans les formules du n° 2 nous faisons

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = \frac{1}{2} (y - f(x))^2 \, \theta(x),$$

nous trouverons

$$M = \frac{d F(x, y, y', y'', \ldots)}{dy} = (y - f(x)) \, \theta(x),$$

$$N = \frac{d F(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'} = 0,$$

$$P = \frac{d F(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec de telles valeurs des fonctions

$$M,\ N,\ P,\ \ldots.$$

et dans l'hypothèse que le choix des coefficients du polynôme n'est limité par aucune condition spéciale, nous aurons à remplir d'après le nº 3 la condition suivante:

L'expression

$$(y - f(x))\,\theta(x)\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

doit être réductible à une fonction entière, avec une approximation poussée jusqu'au terme x^{-m} inclusivement.

Désignant par

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_{\mu-1}(x),\ \psi_\mu(x),\ \psi_{\mu+1}(x),\ \ldots.$$

les dénominateurs des réduites qu'on obtient en développant la fonction

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

en une fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{q_{\mu-1} + \cfrac{1}{q_\mu + \cfrac{1}{q_{\mu+1} + \ddots}}}}},$$

et supposant que dans la suite des fonctions

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_{\mu-1}(x),\ \psi_\mu(x),\ \psi_{\mu+1}(x),\ \ldots.$$

la dernière fonction d'un degré inférieur à m soit

$$\psi_\mu(x),$$

nous trouverons que le polynôme

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

qui satisfait à cette condition, sera donné par la formnle

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{\mu-1} \psi_{\mu-1}(x) + F_\mu \psi_\mu(x),$$

où les facteurs

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{\mu-1}$$

seront déterminés par la formule

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E} q_n \left(\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E} \frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right);$$

et le facteur F_μ, d'après le nº 8, n'aura qu'une valeur déterminée

$$F_\mu = \omega_\mu,$$

si la fonction $\psi_{\mu-1}(x)$ est du degré m. Dans le cas contraire, si notre problème admet une solution, c'est-à-dire si la somme

$$\sum \frac{1}{2} (y_i - f(x_i))^2 \, \theta(x_i)$$

peut devenir un maximum ou un minimum, le facteur F_μ contiendra plusieurs coefficients indéterminés et sera donné par l'une des formules

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots,$$
$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots,$$

où ν et ν_1 désignent les degrés des fonctions

$$\frac{x^{m-1}}{\psi_\mu(x)}, \quad \frac{\psi_{\mu+1}(x)}{x^{m+1}}.$$

Comme précédemment, on appliquera la première de ces deux formules si $\nu < \nu_1$, et la seconde dans le cas de $\nu \overset{=}{>} \nu_1$. Quant au critérium qui permet de reconnaitre que notre problème a une solution ou n'en a pas, nous avons déja vu (§ 8) que le facteur F_μ qui satisfait aux conditions de notre problème n'existe que dans le cas où le degré de la fonction ω_μ ne surpasse au moins l'un des nombres ν, ν_1.

Quand les quantités

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \ldots$$

ont des valeurs réelles, et que la fonction

$$\theta(x)$$

ne change pas de signe, la fraction continue, qu'on obtient en développant l'expression

$$\frac{\theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

comme il est connu, sera de la forme

$$q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \ldots}},$$

où A_1, B_1, A_2, B_2,.... sont des quantités constantes *). Dans ce cas les fonctions

$$q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n,\ldots$$

ont pour valeurs

$$q_1 = A_1 x + B_1,\ q_2 = A_2 x + B_2,\ldots,\ q_n = A_n x + B_n,\ldots$$

et les dénominateurs

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots,\ \psi_{m-1}(x),\ \psi_m(x),\ \psi_{m+1}(x),\ldots,$$

des fractions réduites de l'expression

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

seront de degrés

$$0,\ 1,\ldots,\ m-2,\ m-1,\ m,\ldots.$$

Comme dans ce cas le dernier dénominateur d'un degré inférieur à m, est $\psi_m(x)$, et celui qui le suit immédiatement, c'est-à-dire $\psi_{m+1}(x)$, est du degré m, d'après ce qui a été établi, le polynôme cherché y sera donné par la formule

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x).$$

Mettons à la place de q_n sa valeur $q_n = A_n x + B_n$ dans la formule du nº 7 qui sert à calculer les facteurs

$$\omega_1,\ \omega_2,\ldots\ \omega_{m-1},\ \omega_m;$$

nous aurons

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{\psi_n(x) f(x)\,\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathrm{E}\frac{\psi_n(x) f(x)\,\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right).$$

Si nous désignons par U la fonction entière qu'on obtient en divisant le produit

$$\psi_n(x)\, f(x)\, \theta(x)\, \varphi'(x)$$

par $\varphi(x)$, nous aurons, par notre notation

$$\mathrm{E}\frac{\psi_n(x) f(x)\,\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U,$$

*) Voyez le Mémoire intitulé: *Recherches sur les fractions continues* (T. I, pag. 203—230). Du reste cela résulte aussi de ce que x_1, x_2, x_3,.... étant réels, $\theta(x)$ conservant toujours le même signe, notre problème a toujours une solution, quel que soit m, car cela suppose d'après le nº 8 que dans la série $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,...., il y aura toujours un dénominateur du degré m, et que par conséquent il s'y trouvera des dénominateurs de tous les degrés, ce qui n'est possible que quand la fraction continue dont il s'agit a la forme que nous venons d'indiquer.

et

$$\frac{\psi_n(x)f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U + \frac{\psi_n(x_1)f(x_1)\theta(x_1)}{x-x_1} + \frac{\psi_n(x_2)f(x_2)\theta(x_2)}{x-x_2} + \ldots .$$

$$= U + \sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x-x_i},$$

d'où nous tirons

$$\frac{\psi_n(x)f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathrm{E}\frac{\psi_n(x_i)f(x_i)\theta(x_i)\varphi'(x_i)}{\varphi(x)}$$

$$= \sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x-x_i}.$$

Ainsi l'expression trouvée ci-dessus pour le facteur ω_n se réduit à la suivante:

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathrm{E}(A_n x + B_n)\sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x-x_i}.$$

Cette formule peut s'écrire ainsi:

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathrm{E}\left(A_n + \frac{B_n}{x}\right)\sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{1-\frac{x_i}{x}}$$

Le terme placé sous le signe E est du degré zéro; donc, en faisant $x = \infty$, nous aurons sa partie entière, et nous trouverons ainsi:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i).$$

En calculant d'après cette formule les valeurs des facteurs

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots,\ \omega_{m-1},\ \omega_m$$

et en les mettant dans l'expression du polynôme y, nous obtiendrons la formule que voici:

$$y = A_1 \sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_1(x_i)\cdot\psi_1(x) - A_2\sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_2(x_i)\ \psi_2(x) + \ldots .$$
$$+ (-1)^{m-2}A_{m-1}\sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_{m-1}(x_i)\,\psi_{m-1}(x) + (-1)^{m-1}A_m\sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_m(x_i)\,\psi_m(x).$$

C'est ainsi que l'on détermine le polynôme du degré $m-1$ qui rend maximum ou minimum la somme

$$\sum \frac{1}{2}(y_i - f(x_i))^2\,\theta(x_i),$$

étendue aux valeurs réelles de x et dont le facteur $\theta(x)$ ne change pas de signe.

Cette formule sert pour l'interpolation parabolique, d'après la méthode des *moindres carrés*, quand il n'existe aucune condition particulière relative à ses coefficients.

§ 10. Passons maintenant au cas où dans le polynôme cherché

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

le coefficient de x^l, où l est un des nombres 0, 1, 2, ..., $m-1$, est supposé donné.

La condition que le coefficient de x^l, dans le polynôme y, doit être égal à un nombre donné peut être exprimée par l'égalité

$$\sum \Phi_1 (x, y, y', y'', \dots) = \alpha_1,$$

pourvu toutefois qu'on n'étende cette somme qu'à la seule valeur de la variable x, $x = 0$, et que la fonction

$$\Phi_1 (x, y, y', y'', \dots)$$

se réduise à un seul terme $y^l = \frac{d^l y}{dx^l}$. Dans ce cas, d'après la notation du n° 5, nous aurons

$$\varphi_1(x) = x; \quad \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{1}{x};$$

et toutes les dérivées partielles de

$$\Phi_1 (x, y, y', y'', \dots) = y^l$$

prises par rapport à $y, y', y'', y''', \dots$ seront zéro, excepté la seule dérivée par rapport à y^l, qui sera égale à 1.

Supposant, comme ci-devant, que la somme qu'on se propose de rendre un maximum ou un minimum est

$$\sum \frac{1}{2} (y - f(x))^2 \, \theta(x)$$

et qu'elle s'étend aux valeurs de la variable x, telles que

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

nous aurons, en conservant la notation du n° 5,

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots) = \frac{1}{2}(y - f(x))^2 \theta(x),$$

$$M_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy} = (y - f(x))\,\theta(x),$$

$$N_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'} = 0,$$

$$P_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots = \varphi_0(x).$$

Avec ces valeurs des fonctions

$$M_0,\ N_0,\ P_0, \ldots,\ \varphi_0(x),\ \varphi_1(x)$$

et ayant en vue la remarque que nous venons de faire sur les dérivées partielles de la fonction

$$\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = y^l$$

prises par rapport à $y', y'', \ldots, y^l, \ldots$, le polynôme cherché sera déterminé, d'après le n° 5, par la condition suivante:

L'expression

$$\frac{(y - f(x))\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + (-1)^l \frac{d^l \frac{\lambda_1}{x}}{dx^l}$$

doit se réduire à une fonction entière avec une approximation poussée jusqu'au terme x^{-m} inclusivement.

Comme cette expression, après la différentiation et la multiplication indiquées, se réduit à la différence

$$\frac{\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\,y - \left(\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots l.\lambda_1}{x^{l+1}}\right),$$

pour déterminer le polynôme y nous devons, conformément à ce qui a été dit au n° 7, développer en fraction continue l'expression

$$\frac{\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}.$$

En nous bornant à examiner le cas où toutes les valeurs de

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

sont réelles, et où la fonction

$$\theta(x)$$

ne change pas de signe, nous aurons, d'après ce qui a été dit dans le numéro précédent,

$$\frac{\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} = q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \dots}}$$

où A_1, B_1, A_2, $B_2, \dots$, sont des constantes.

Ce développement de la fonction

$$\frac{\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}$$

nous donnera la suite de dénominateurs des réduites

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \dots \ \psi_{m-1}(x),\ \psi_m(x),\ \psi_{m+1}(x), \dots$$

qui seront de degré

$$0,\ 1, \dots \ m-2,\ m-1,\ m, \dots$$

Comme le dernier dénominateur de degré inférieur à m est $\psi_m(x)$, et comme celui qui le suit immédiatement, $\psi_{m+1}(x)$, est de degré m, le polynôme cherché

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

d'après le n° 8, s'exprimera par

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \dots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x).$$

Mais comme dans le cas que nous examinons

$$q_1 = A_1 x + B_1,\ q_2 = A_2 x + B_2, \dots,$$

$$Q_1 = \psi_1(x),\ Q_2 = \psi_2(x), \dots,$$

et

$$v = \frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\dots l.\lambda_l}{x^{l+1}},$$

nous aurons, d'après le n° 7, pour déterminer les facteurs

$$\omega_1,\ \omega_2, \dots \ \omega_{m-1},\ \omega_m$$

la formule que voici:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathrm{E}(A_n x + B_n) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\dots l.\lambda_l}{x^{l+1}}\right) \psi_n(x) \\ - \mathrm{E}\left(\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\dots l.\lambda_l}{x^{l+1}}\right) \psi_n(x) \end{array} \right\}$$

ce qui peut être écrit ainsi:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)\,\psi_n(x)}{\varphi_0(x)} - \mathrm{E}\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)\,\psi_n(x)}{\varphi_0(x)}\right)$$
$$-(-1)^{n-1}\, 1.2....l.\lambda_1 \mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathrm{E}\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}\right).$$

Mais, d'après ce qui a été établi dans le numéro précédent, l'expression

$$\mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)\,\psi_n(x)}{\varphi_0(x)} - \mathrm{E}\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi_0'(x)\,\psi_n(x)}{\varphi_0(x)}\right)$$

se réduit à

$$A_n \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i).$$

et la fonction $\psi_n(x)$, développée par la série de Maclaurin, nous donne

$$\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{\psi_n(0)}{x^{l+1}} + \frac{1}{1}\frac{\psi_n'(0)}{x^l} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2....l}\frac{\psi_n^{l}(0)}{x} +$$
$$+ \frac{1}{1.2....l(l+1)}\psi_n^{l+1}(0) + \frac{x}{1.2....(l+1)(l+2)}\psi_n^{l+2}(0) + \ldots.;$$

par conséquent

$$\mathrm{E}\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{1}{1.2....l(l+1)}\psi_n^{l+1}(0) + \frac{x}{1.2....(l+1)(l+2)}\psi_n^{l+2}(0) + \ldots.$$

et la différence

$$\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathrm{E}\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}$$

se réduit à la série

$$\frac{\psi_n^{l}(0)}{1.2....l}\frac{1}{x} + \frac{\psi_n^{l-1}(0)}{1.2....(l-1)}\frac{1}{x^2} + \ldots.$$

En multipliant cette expression par $A_n x + B_n$ et en rejetant dans ce produit

$$\frac{A_n \psi_n^{l}(0)}{1.2....l} + \left(\frac{B_n \psi_n^{l}(0)}{1.2....l} + \frac{A_n \psi_n^{l-1}(0)}{1.2....(l-1)}\right)\frac{1}{x} + \ldots.,$$

les termes où la variable x a des exposants négatifs, nous aurons pour la valeur de

$$\mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathrm{E}\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}\right)$$

l'expression

$$\frac{A_n \psi_n^{l}(0)}{1.2....l}.$$

Par conséquent la formule qui sert à déterminer ω_n se reduit à

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n \left(\sum f(x_i)\, \theta(x_i)\, \psi_n(x_i) - \lambda_1 \psi_n{}'(0)\right).$$

Ayant déterminé d'après cette formule les valeurs des facteurs

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_{m-1},\ \omega_m,$$

et les ayant mises dans l'expression du polynôme cherché

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x),$$

nous verrons qu'il se réduit à

$$\begin{aligned} y = {} & A_1 \left(\sum f(x_i)\, \theta(x_i)\, \psi_1(x_i) - \lambda_1 \psi_1{}'(0)\right) \psi_1(x) \\ & - A_2 \left(\sum f(x_i)\, \theta(x_i)\, \psi_2(x_i) - \lambda_1 \psi_2{}'(0)\right) \psi_2(x) + \ldots \\ & + (-1)^{m-1} A_m \left(\sum f(x_i)\, \theta(x_i)\, \psi_m(x_i) - \lambda_1 \psi_m{}'(0)\right) \psi_m(x), \end{aligned}$$

où λ_1 est une constante inconnue qui, dans notre cas, sera déterminée par la condition que le coefficient de x^l doit avoir une valeur donnée.

On trouvera aussi de la même manière l'expression du polynôme y, dans le cas où plusieurs de ses coefficients sont donnés, et les autres sont déterminés par la condition de rendre maximum ou minimum la somme

$$\sum \tfrac{1}{2} (y - f(x))^2\, \theta(x),$$

étendue à des valeurs données de la variable x.

2.

SUR L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES LES PLUS SIMPLES PARMI CELLES QUI CONTIENNENT UNE RACINE CUBIQUE.

(TRADUIT PAR A. V. VASSILIEF.)

Объ интегрированіи простѣйшихъ дифференціаловъ содержащихъ кубическій корень.

(Математическій Сборникъ. Т. II. 1867 г., стр. 71—78.)

Sur l'intégration des différentielles les plus simples parmi celles qui contiennent une racine cubique.

Dans le mémoire: *Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine cubique* *) il a été montré par quelles fonctions le plus simples s'exprime l'intégrale $\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{R}} dx$ sous forme finie lorsque cela est possible; on y a supposé que le radical $\sqrt[3]{R}$ n'a pas de diviseur rationnel et que le terme algébrique de l'expression de l'intégrale $\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{R}} dx$ a été chassé.

Le calcul de ces fonctions qui conduisent à la détermination de l'intégrale $\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{R}} dx$ correspond, comme il est facile de voir, au développement du radical $\sqrt{R}$ en fraction continue; c'est ce qui a conduit Abel dans son mémoire connu sur ce sujet à l'expression de l'intégrale $\int \frac{\rho}{\sqrt{R}} dx$ par les fonctions de la forme $A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$.

En appliquant ce procédé aux exemples, Abel trouve quelques cas particuliers de l'intégrabilité de la différentielle

$$\frac{Ax + B}{\sqrt{x^4 + ax^2 + bx + c}} dx,$$

sous forme finie.

On peut, d'après le mémoire cité plus haut, procéder de la même manière par rapport aux différentielles qui contiennent une racine cubique. Ainsi, en appliquant notre méthode à la différentielle

$$\frac{\rho}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}} dx,$$

*) Tome I, pag 563—608.

nous trouvons que, outre le cas où la fonction x^3+ax+b a un facteur multiple, cette différentielle s'intègre sous forme finie dans les suppositions suivantes

1) $b=0$;

2) $\frac{b^2}{a^3}=-\frac{1}{6}$;

3) $\frac{b^2}{a^3}=-\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{-3}}{18}$; и т. п.

Dans tous ces cas l'expression de l'intégrale

$$\int\frac{\rho}{\sqrt[3]{x^3+ax+b}}\,dx$$

est donnée par la formule générale

$$K\log\left[\varphi(\sqrt[3]{R}).\varphi^{\alpha}(\alpha\sqrt[3]{R}).\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\sqrt[3]{R})\right],$$

où K est un facteur constant, α une des racines imaginaires de l'équation $\alpha^3-1=0$; la fonction $\varphi(\sqrt[3]{R})$ se ramenant au produit

$$\psi_0(\sqrt[3]{R}).\psi_1(\sqrt[3]{R})\ldots.\psi_{\mu-1}(\sqrt[3]{R}),$$

dont les facteurs

$$\psi_0(\sqrt[3]{R}),\ \psi_1(\sqrt[3]{R}),\ldots,\ \psi_{\mu-1}(\sqrt[3]{R}),$$

déterminés successivement l'un au moyen de l'autre, ont, comme il est facile de voir, dans le cas

$$R=x^3+ax+b,$$

les valeurs suivantes:

$\psi_0(\sqrt[3]{R})=x-\sqrt[3]{R}$;

$\psi_1(\sqrt[3]{R})=x^2+3\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(3\frac{b^2}{a^3}x+\frac{b}{a}\right)+\left[x-3\left(3\frac{b^2}{a^3}+1\right)\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}$;

....

....

Le nombre μ, qui exprime combien des facteurs

$$\psi_0(\sqrt[3]{R}),\ \psi_1(\sqrt[3]{R}),\ldots.$$

entrent dans l'expression de la fonction $\varphi(\sqrt[3]{R})$ peut avoir toutes les grandeurs de zéro à l'infini.

La supposition

$$b = 0$$

s'obtient dans le cas

$$\mu = 1,$$

et dans ce cas nos formules donnent

$$\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{x^3 + ax}} dx = K \log \left[\varphi(\sqrt[3]{R}) . \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[3]{R}) . \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[3]{R}) \right],$$

où

$$\varphi(\sqrt[3]{R}) = x - \sqrt[3]{x^3 + ax}.$$

La supposition

$$\frac{b^2}{a^3} = -\frac{1}{6}$$

a lieu quand

$$\mu = 2,$$

et dans ce cas la fonction $\varphi(\sqrt[3]{R})$ qui entre dans l'expression de l'intégrale

$$\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}} dx$$

au moyen de la formule

$$K \log \left[\varphi(\sqrt[3]{R}) . \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[3]{R}) . \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[3]{R}) \right]$$

a la forme suivante

$$\varphi(\sqrt[3]{R}) = (x - \sqrt[3]{R}) \left\{ x^2 + 3\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(3\frac{b^2}{a^3}x + \frac{b}{a}\right) + \left[x - 3\left(3\frac{b^2}{a^3} + 1\right)\left(x + \frac{b}{a}\right)\right] \sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{R^2} \right\}.$$

Dans le cas

$$\frac{b^2}{a^3} = -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-3}}{18}$$

on a la même valeur de μ et, par conséquent, la même forme de la fonction $\varphi(\sqrt[3]{R})$.

Dans tous ces cas ρ reste une quantité constante et a les valeurs suivantes:

1) $-2K$ pour $b = 0$, 2) $-6K$, pour $\frac{b^2}{a^3} = -\frac{1}{6}$, et

3) $-\frac{9 \pm \sqrt{-3}}{2} K$, pour $\frac{b^2}{a^3} = -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-3}}{18}$.

Mais l'application du procédé qui a été donné par nous pour l'intégration de la différentielle

$$\frac{\rho}{\sqrt[3]{R}} dx$$

sous forme finie, n'est pas bornée à ces résultats particuliers et à d'autres semblables; ce procédé de l'intégration mérite toute l'attention d'autant plus qu'il donne la condition *nécessaire* pour que l'intégrale

$$\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{R}}\, dx$$

puisse être exprimée sous forme finie. En effet, *pour qu'il soit possible d'exprimer l'intégrale*

$$\int \frac{A}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}}$$

sous forme finie, il est nécessaire qu'au moins l'une des équations

$$X^3 = \frac{27}{4}\frac{b^2}{a^3} + 1,$$

$$3\left(\frac{b^2}{a^3}\right)^2 X^4 + 6\frac{b^2}{a^3}(X^2 + 2X) = 1$$

puisse être satisfaite par une quantité X qui est rationnelle en $\frac{b^2}{a^3}$.

En appliquant cette condition aux cas mentionnés de l'intégrale

$$\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}}\, dx,$$

nous trouvons que la quantité

$$\frac{b^2}{a^3}$$

a les valeurs suivantes:

$$0,\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-3}}{18}.$$

Pour les deux premières valeurs de $\frac{b^2}{a^3}$, l'équation

$$X^3 = \frac{27}{4}\frac{b^2}{a^3} + 1,$$

en se réduisant à

$$X^3 = 1,\ X^3 = -\frac{1}{8},$$

a évidemment une solution rationnelle en $\frac{b^2}{a^3}$.

Pour la dernière valeur de $\frac{b^2}{a^3}$, l'équation

$$X^3 = \frac{27}{4}\frac{b^2}{a^3} + 1$$

se ramène à

$$X^3 = -\frac{1}{8} \pm \frac{3\sqrt{-3}}{8},$$

qui ne peut être satisfaite par une valeur rationnelle en $\frac{b^2}{a^3} = -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-3}}{18}$. Mais dans ce cas l'équation

$$3\left(\frac{b^2}{a^3}\right)^2 X^4 + 6\,\frac{b^2}{a^3}\,(X^2 + 2X) = 1$$

se réduit à l'équation

$$3\left(-\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-3}}{18}\right)^2 X^4 + 6\left(-\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-3}}{18}\right)(X^2 + 2X) = 1,$$

et cette équation, comme il n'est pas difficile de s'en assurer, est satisfaite par

$$X = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2},$$

ce qui s'exprime rationnellement en $\frac{b^2}{a^3} = -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-3}}{18}$; à savoir

$$X = 9\,\frac{b^2}{a^3}.$$

Dans le cas où la quantité

$$\frac{b^2}{a^3}$$

est rationnelle, pour qu'il soit possible d'obtenir l'intégrale

$$\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}}\,dx$$

sous forme finie il est nécessaire, d'après ce qui précède, qu'au moins une des équations

$$X^3 = \frac{27}{4}\,\frac{b^2}{a^3} + 1,$$

$$3\left(\frac{b^2}{a^3}\right)^2 X^4 + 6\,\frac{b^2}{a^3}\,(X^2 + 2X) = 1,$$

ait une racine rationnelle.

D'après cela on reconnait facilement l'impossibilité d'obtenir sous forme finie plusieurs intégrales de la formule

$$\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}}\,dx.$$

3.

SUR UN MÉCANISME.

(TRADUIT PAR I. W. MESTSCHERSKY.)

(Lu le 8 (20) octobre 1868.)

Объ одномъ механизмѣ.

(Записки Императорской Академіи Наукъ, т. XIV, 1868 г., стр. 38—46.)

Sur un mécanisme.

Dans le mémoire intitulé: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* *), nous avons montré, de quelle manière par les approximations successives on peut trouver avec un degré désiré d'exactitude les dimensions les plus avantageuses des éléments *du parallélogramme de Watt* ainsi que d'autres mécanismes du même genre, qui réalisent le mouvement peu différent du mouvement rectiligne.

Nous avons réduit cette question par le développement en séries à la détermination des fonctions entières, qui s'approchent le plus de zéro, et nous avons traité dans un mémoire spécial sous le titre: *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* **) la détermination des fonctions entières et fractionnaires, remplissant cette condition.

Cela suffit pour trouver les solutions approximatives; mais pour la résolution exacte il faut appliquer la même analyse aux fonctions irrationnelles, qui se présentent dans ce cas.

L'application aux fonctions irrationnelles du théorème général que nous avons démontré dans le second des mémoires cités à l'égard des expressions, qui se rapprochent le plus de zéro, est intéressante sous plusieurs rapports, et comme un des résultats de telle application nous allons montrer la construction d'un mécanisme remarquable tant par sa simplicité que par la précision, avec laquelle il réalise le mouvement rectiligne.

Ce mécanisme est composé des mêmes éléments articulés de la même façon que *le parallélogramme réduit de Watt;* il ne diffère de celui-ci que par les directions des leviers, qui tournent autour des axes fixes: ils sont dirigés du même côté et se croisent.

On prend les leviers de la même longueur et le point, qui exécute le mouvement désiré, se trouve au milieu de la bielle, c'est-à-dire, de l'élément relié aux extrémités des leviers par les charnières.

*) T. I, p. 111—143.

**) T. I, p. 273—378.

En appliquant le théorème mentionné plus haut à la fonction, qui détermine le mouvement de ce point, nous trouvons, que son mouvement s'approche le plus possible du mouvement rectiligne dans l'étendue plus ou moins considérable sous les conditions suivantes:

1) *La distance des axes de rotation des leviers doit être égale au tiers de la longueur de tous les trois éléments du mécanisme, c'est-à-dire, de deux leviers et de la bielle.*

2) *La longueur de la bielle doit dépasser le quart de celle des leviers.*

A mesure que diminue l'étendue, où l'on désire réaliser le mouvement approché du mouvement rectiligne, la longueur de la bielle doit de plus en plus s'approcher du quart de celle des leviers et en même temps avec une plus grande précision on obtient le mouvement rectiligne.

La longueur de la bielle est déterminée par l'équation:

$$l^2 = \frac{(5-2a)(2a+1)(4a-1)}{(a+2)^2},$$

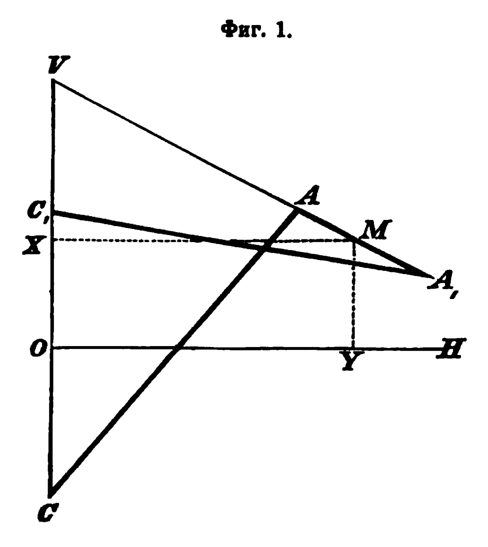
où l'on désigne par a la longueur de la bielle et par l celle de la corde de l'arc, qu'on cherche de rendre s'écartant le moins possible d'une ligne droite. (On prend pour l'unité la longueur des leviers).

Il est facile de se convaincre que cet arc sera compris tout entier entre deux parallèles dont la distance aux axes de rotation des leviers est égale respectivement à

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)}, \quad \sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)+\frac{(4a-1)^2}{12(a+2)^2}}.$$

Soit en effet CAA_1C_1 (fig. 1) le mécanisme considéré, où $AC=1$,

Фиг. 1.



$A_1C_1=1$ sont deux leviers, qui tournent autour des axes C et C_1, $AA_1=a$ la bielle, dont le point milieu M exécute le mouvement désiré.

D'après ce que nous avons dit, la distance CC_1 des axes de rotation des leviers AC et A_1C_1 doit être égale à

$$\frac{AC+A_1C_1+AA_1}{3}=\frac{2+a}{3}.$$

En élevant du milieu de CC_1 la perpendiculaire OH et prolongeant les droites CC_1 et AA_1 jusqu'à leur rencontre au point V, et considérant le triangle MXV, le rectangle $MXOY$ et les triangles ACV et A_1C_1V, nous obtiendrons pour la détermination des distances du point M aux droites CV et OH les équations suivantes:

$$MX=MV\sin OVM;$$
$$MY=OX=OV-MV\cos OVM;$$
$$AC^2=(MV-AM)^2+(OV+OC)^2-2\,(MV-AM)\,(OV+OC)\cos OVM;$$
$$A_1C_1^2=(MV+A_1M)^2+(OV-OC_1)^2-2\,(MV+A_1M)\,(OV-OC_1)\cos OVM.$$

En posant

$$\sin\frac{OVM}{2}=S$$

et observant que, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$AC=1,\quad A_1C_1=1,$$
$$AM=A_1M=\frac{AA_1}{2}=\frac{a}{2},$$
$$OC=OC_1=\frac{CC_1}{2}=\frac{2+a}{6},$$

nous trouvons des équations ci-dessus:

$$1)\qquad MX=a\sqrt{\frac{\left(\frac{4\,(1-a)}{3a}+S^2\right)\left(\frac{1+2a}{3a}-S^2\right)^2}{\frac{(1+2a)^2}{3\,(2+a)\,a}-S^2}};$$

$$2)\qquad MY=a\sqrt{\frac{\left(\frac{4\,(1-a)}{3a}+S^2\right)(1-S^2)\,S^2}{\frac{(1+2a)^2}{3\,(2+a)\,a}-S^2}}.$$

En déterminant d'après la formule (1) les valeurs des différences

$$MX^2-\frac{4}{9}\,(1-a)\,(2+a)$$

et

$$MX^2-\frac{4}{9}\,(1-a)\,(2+a)-\frac{(4a-1)^3}{12\,(2+a)^2},$$

on trouve, qu'elles se représentent respectivement sous la forme:

$$\frac{a^2\left(S^2-\frac{4a-1}{3a}\right)^2 S^2}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a}-S^2},$$

$$\frac{a^2\left(S^2-\frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a}\right)^2\left(S^2-\frac{4a-1}{(2+a)a}\right)}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a}-S^2};$$

par suite le produit

$$\left[MX^2-\frac{4}{9}(1-a)(2+a)\right]\left[MX^2-\frac{4}{9}(1-a)(2+a)-\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}\right]$$

est égal à

$$\left[\frac{a^2\left(S^2-\frac{4a-1}{3a}\right)\left(S^2-\frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a}\right)S}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a}-S^2}\right]^2\left(S^2-\frac{4a-1}{(2+a)a}\right).$$

Puisque le carré

$$\left[\frac{a^2\left(S^2-\frac{4a-1}{3a}\right)\left(S^2-\frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a}\right)S}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a}-S^2}\right]^2$$

pour toutes les valeurs réelles de S est positif et le facteur

$$S^2-\frac{4a-1}{(2+a)a}$$

pour $S^2<\frac{4a-1}{(2+a)a}$ est négatif, le produit

$$\left[MX^2-\frac{4}{9}(1-a)(2+a)\right]\left[MX^2-\frac{4}{9}(1-a)(2+a)-\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}\right]$$

reste négatif lorsque S^2 varie depuis 0 jusqu'à $\frac{4a-1}{(2+a)a}$; d'où il résulte que les facteurs

$$MX^2-\frac{4}{9}(1-a)(2+a),$$

$$MX^2-\frac{4}{9}(1-a)(2+a)-\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}$$

doivent être de signes contraires; par conséquent la valeur de

$$MX^2$$

doit être comprise entre les quantités:

$$\frac{4}{9}(1-a)(2+a),$$
$$\frac{4}{9}(1-a)(2+a)+\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}.$$

On voit de là que la distance du point M à la droite CC_1 depuis $S^2=0$ jusqu'à $S^2=\frac{4a-1}{(2+a)a}$ sera comprise entre les limites

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)},$$
$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)+\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}},$$

par suite le point M ne sortira pas de l'espace limité par les droites parallèles à CC_1, dont les distances à CC_1 sont égales à

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)},$$
$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)+\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}}.$$

D'ailleurs d'après la forme du mécanisme considéré le mouvement du point M est le même de part et d'autre de la droite OH; c'est pourquoi l'arc de la courbe décrite par ce point, lorsque S^2 croît depuis 0 jusqu'à $\frac{4a-1}{(2+a)a}$, sera disposé de la même manière de part et d'autre de la droite OH et la corde soutendant cet arc est égale à la double distance de ses extrémités à OH.

Cette distance d'après la formule (2), où l'on pose

$$S^2=\frac{4a-1}{(2+a)a},$$

peut être représentée sous la forme

$$MY=\sqrt{\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{4(2+a)^2}};$$

par suite

$$l=2\sqrt{\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{4(2+a)^2}},$$

d'où, élevant au carré, on obtient

$$l^2=\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{(2+a)^2}.$$

Ainsi nous nous assurons que pour la valeur de l, satisfaisant à cette équation, l'arc soutendu par la corde l, dont le milieu se trouve sur la droite OH, est réellement compris tout entier entre deux droites parallèles indiquées plus haut.

Toutes les fois lorsque la quantité a diffère peu de $\frac{1}{4}$, la distance de ces parallèles est petite et par conséquent l'arc que nous considérons s'écarte peu d'une ligne droite.

Mais à mesure que a s'éloigne de $\frac{1}{4}$, la distance des parallèles augmente et la courbure de l'arc devient de plus en plus grande.

Pour une valeur de a plus grande que 0,546 *) (ce qui correspond à $l > 1{,}222$) ces écarts sont si considérables que l'arc se courbe à ses extrémités vers la droite OH, en vertu de quoi les points de cet arc les plus éloignés de la droite OH ne se trouvent plus à ses extrémités, mais à certaine distance d'elles.

Pour faire voir avec quel degré de précision le mécanisme traité réalise le mouvement approché du mouvement rectiligne dans l'étendue assez considérable, nous appliquons les formules obtenues au cas

$$l = 0{,}64,$$

ce qui a lieu dans le parallélogramme de Watt, dont le fonctionnement a été examiné par Prony, qui l'a trouvé bien satisfaisant. (Annales des mines. Tome XII).

En résolvant l'équation

$$l^2 = \frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{(2+a)^2},$$

où l'on fait $l = 0{,}64$, on trouve

$$a = 0{,}327.$$

Substituons cette valeur de a dans les expressions, qui déterminent les distances des parallèles aux axes de rotation des leviers:

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)},$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)+\frac{(4a-1)^3}{12(2+a)^2}};$$

---

*) C'est une racine de l'équation $(a^2-6a+2)(2a-5)(2a+1)-\frac{27}{4}(4a-1)=0$, qu'on obtient, en égalant à zéro la dérivée de MY^2 par rapport à S et posant $S^2=\frac{4a-1}{(2+a)a}$.

on trouve alors que ces distances sont égales respectivement à

$$0{,}83428,$$

et à

$$0{,}83457.$$

Donc la distance des parallèles est égale à

$$0{,}83457 - 0{,}83428 = 0{,}00029.$$

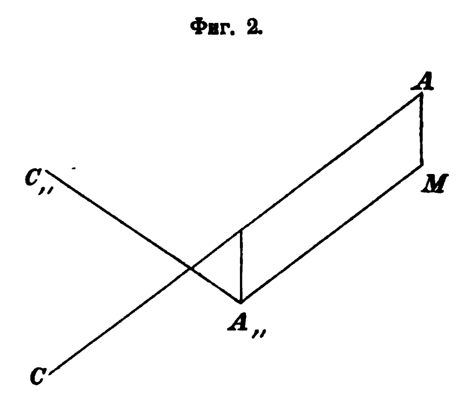
D'après les calculs de Prony le parallélogramme de Watt dans la machine à vapeur, où le bras du balancier était de $2{,}515^m$ de longueur, donnait les déviations, qui atteignaient $0{,}002^m$ ou 0,00079, si l'on prend pour l'unité la longueur du bras du balancier.

Tandis que lorsqu'on se sert du mécanisme que nous avons examiné les écarts ne surpasseront pas, comme nous venons de trouver, 0,00029, ce qui fait moins que la moitié du nombre 0,00079.

Notons en dernier lieu que la construction connue, qui sert à passer du parallélogramme réduit de Watt au parallélogramme complet, s'applique sans aucun changement au mécanisme que nous avons considéré; de cette manière on obtient le parallélogramme complet de Watt ayant un tige-guide, qui est dirigé en sens contraire et coupe le balancier.

Le parallélogramme de cette espèce est représenté sur la figure 2, où le point M décrira la courbe, qui, comme on voit de ce qui précède, s'écar-

Фиг. 2.



tera moins de la droite verticale, que celle qu'on obtient dans le cas de la disposition ordinaire du tige-guide $A_{,,}C_{,,}$.

Mais quand la forme du parallélogramme de Watt est modifiée de la manière indiquée, la courbe décrite par le point M, comme on voit de la figure, fait avec le balancier AC un angle trop aigu, ce qui présente un inconvénient très important.

4.

SUR LES FONCTIONS ANALOGUES À CELLES DE LEGENDRE.

(TRADUIT PAR A. V. VASSILIEF.)

О функціяхъ подобныхъ функціямъ Лежандра.

(Записки Императорской Академіи Наукъ, т. XVI, 1870 г., стр. 131—140.)

Sur les fonctions analogues à celles de Legendre.

La propriété remarquable des fonctions de Legendre

$$X_0,\ X_1,\ X_2, \ldots,$$

qui conduit facilement au développement en série de la forme

$$A_0 X_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots,$$

se déduit, comme on sait, d'une manière très simple de l'expression de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\, dx\ ^{*}).$$

En effet on a, d'après la définition de ces fonctions,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}} = X_0 + X_1 s + X_2 s^2 + \ldots;$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = X_0 + X_1 t + X_2 t^2 + \ldots,$$

donc l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\, dx$$

est égale à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (X_0 + X_1 s + X_2 s^2 + \ldots)(X_0 + X_1 t + X_2 t^2 + \ldots)\, dx,$$

*) Legendre, Exercices de calcul intégral, T. II, p. 250.

la quelle se ramène, si l'on ouvre les parenthèses, à la somme suivante du nombre infini des termes:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=\infty}\left(s^n t^m \int_{-1}^{+1} X_n X_m\, dx\right).$$

Mais en déterminant la valeur de cette intégrale sous forme finie, nous trouvons qu'elle s'exprime par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}},$$

qui se développe en série procédant suivant les puissances du produit st; par conséquent, dans le développement de cette intégrale il n'existe pas des termes de la forme

$$A s^n t^m,$$

où n est inégal à m.

En comparant entre elles ces deux expressions de la même intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\, dx,$$

nous remarquons que leur identité suppose l'égalité

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_m\, dx = 0,$$

pour toutes les valeurs de n et de m inégales entre elles.

De la même manière l'intégrale plus générale

$$(1) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{F(s, x) . F(t, x)}{(1+x)^\lambda (1-x)^\mu}\, dx,$$

où

$$F(s, x) = \frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\lambda (1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\mu}{\sqrt{1-2sx+s^2}},$$

$$F(t, x) = \frac{(1+t+\sqrt{1-2tx+t^2})^\lambda (1-t+\sqrt{1-2tx+t^2})^\mu}{\sqrt{1-2tx+t^2}},$$

se ramenant à l'intégrale

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{2^{\lambda+\mu+1}(1-stz)^\mu}{z^\lambda (1-z)^\mu (1-stz^2)}\, dz,$$

qui se développe en série procédant suivant les puissances du produit st, montre que les fonctions entières de la variable x

$$T_0,\ T_1,\ T_2, \ldots,$$

qui s'obtiennent par le développement des expressions

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\lambda\,(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\mu}{\sqrt{1-2sx+s^2}},$$

$$\frac{(1+t+\sqrt{1-2tx+t^2})^\lambda\,(1-t+\sqrt{1-2tx+t^2})^\mu}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

en séries

$$T_0+T_1 s+T_2 s^2+\ldots,$$

$$T_0+T_1 t+T_2 t^2+\ldots,$$

vérifient l'équation

$$(3)\qquad \int_{-1}^{+1}\frac{T_n\,T_m}{(1+x)^\lambda\,(1-x)^\mu}\,dx=0$$

pour toutes les valeurs de n et de m inégales entre elles.

Quant à la réduction de l'intégrale (1) à la forme (2), elle s'effectue facilement si l'on fait disparaître de la façon usitée les radicaux contenus dans les fonctions $F(s,x)$, $F(t,x)$.

En effet, en posant

$$(4)\qquad \sqrt{1-2sx+s^2}=\sqrt{2s}\,y,$$

nous trouvons que

$$(5)\qquad x=\frac{1+s^2}{2s}-y^2$$

et

$$\sqrt{1-2tx+t^2}=\sqrt{1+t^2-\frac{t(1+s^2)}{s}+2ty^2}.$$

En faisant le dernier radical égal à l'expression

$$\sqrt{2t}\,(y+u),$$

et en posant

$$(6)\qquad \frac{1+s^2}{2s}=\alpha,\quad \frac{1+t^2}{2t}=\beta,$$

nous obtenous

$$y=\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u},$$

et

$$(7)\qquad \sqrt{1-2tx+t^2}=\sqrt{2t}\,(y+u)=\sqrt{2t}\,\frac{\beta-\alpha+u^2}{2u}.$$

En portant la valeur de y dans les expressions (4), (5) du radical $\sqrt{1-2sx+s^2}$ et de la variable x, nous avons

$$\sqrt{1-2sx+s^2}=\sqrt{2s}\,\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u},$$

$$x=\frac{1+s^2}{2s}-\left(\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u}\right)^2.$$

Cette dernière égalité, d'après (6), peut être écrite plus succinctement ainsi:

$$x=\alpha-\left(\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u}\right)^2.$$

D'après ces valeurs de la variable x et des radicaux

$$\sqrt{1-2sx+s^2},\quad \sqrt{1-2tx+t^2}$$

nous trouvons que

$$dx=\frac{(\beta-\alpha)^2-u^4}{2u^3}\,du=\frac{(\beta-\alpha+u^2)(\beta-\alpha-u^2)}{2u^3}\,du,$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\lambda&=\left[1+\alpha-\left(\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u}\right)^2\right]^\lambda\\ &=\frac{[4(\alpha+1)u^2-(\beta-\alpha-u^2)^2]^\lambda}{(2u)^{2\lambda}}\\ &=\frac{(2\sqrt{\alpha+1}\,u+\beta-\alpha-u^2)^\lambda(2\sqrt{\alpha+1}\,u-\beta+\alpha+u^2)^\lambda}{4^\lambda u^{2\lambda}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-x)^\mu&=\left[1-\alpha+\left(\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u}\right)^2\right]^\mu\\ &=\frac{[(\beta-\alpha-u^2)^2-4(\alpha-1)u^2]^\mu}{(2u)^{2\mu}}\\ &=\frac{(\beta-\alpha-u^2-2\sqrt{\alpha-1}\,u)^\mu(\beta-\alpha-u^2+2\sqrt{\alpha-1}\,u)^\mu}{4^\mu u^{2\mu}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(s,x)&=\frac{\left[1+s+\sqrt{2s}\,\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u}\right]^\lambda\left[1-s+\sqrt{2s}\,\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u}\right]^\mu}{\sqrt{2s}\,\frac{\beta-\alpha-u^2}{2u}}\\ &=\frac{s^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\left[2\frac{1+s}{\sqrt{2s}}u+\beta-\alpha-u^2\right]^\lambda\left[2\frac{1-s}{\sqrt{2s}}u+\beta-\alpha-u^2\right]^\mu}{2^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}u^{\lambda+\mu-1}(\beta-\alpha-u^2)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(t,x)&=\frac{\left[1+t+\sqrt{2t}\,\frac{\beta-\alpha+u^2}{2u}\right]^\lambda\left[1-t+\sqrt{2t}\,\frac{\beta-\alpha+u^2}{2u}\right]^\mu}{\sqrt{2t}\,\frac{\beta-\alpha+u^2}{2u}}\\ &=\frac{t^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\left[2\frac{1+t}{\sqrt{2t}}u+\beta-\alpha+u^2\right]^\lambda\left[2\frac{1-t}{\sqrt{2t}}u+\beta-\alpha+u^2\right]^\mu}{2^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}u^{\lambda+\mu-1}(\beta-\alpha+u^2)}.\end{aligned}$$

Mais en remarquant que d'après (6)

$$(8)\qquad \begin{cases} \sqrt{\alpha+1}=\frac{1+s}{\sqrt{2s}}, & \sqrt{\alpha-1}=\frac{1-s}{\sqrt{2s}}, \\ \sqrt{\beta+1}=\frac{1+t}{\sqrt{2t}}, & \sqrt{\beta-1}=\frac{1-t}{\sqrt{2t}}, \end{cases}$$

nous pouvons écrire les dernières expressions de $F(s, x)$, $F(t, x)$ plus succinctement ainsi:

$$F(s, x)=\frac{s^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\left[2\sqrt{\alpha+1}\,u+\beta-\alpha-u^2\right]^\lambda\left[2\sqrt{\alpha-1}\,u+\beta-\alpha-u^2\right]^\mu}{2^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\,u^{\lambda+\mu-1}\,(\beta-\alpha-u^2)},$$

$$F(t, x)=\frac{t^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\left[2\sqrt{\beta+1}\,u+\beta-\alpha+u^2\right]^\lambda\left[2\sqrt{\beta-1}\,u+\beta-\alpha+u^2\right]^\mu}{2^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\,u^{\lambda+\mu-1}\,(\beta-\alpha+u^2)}.$$

En multipliant ces quantités

$$F(s, x),\ F(t, x),\ dx$$

et en divisant leur produit par les quantités

$$(1+x)^\lambda,\ (1-x)^\mu,$$

nous trouvons après la réduction des facteurs communs du numérateur et du dénominateur que la différentielle

$$\frac{F(s, x).F(t, x)}{(1+x)^\lambda(1-x)^\mu}\,dx$$

s'exprime ainsi:

$$2^{\lambda+\mu}(st)^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\left(\frac{u^2+2\sqrt{\beta+1}\,u+\beta-\alpha}{u^2+2\sqrt{\alpha+1}\,u-\beta+\alpha}\right)^\lambda\left(\frac{u^2+2\sqrt{\beta-1}\,u+\beta-\alpha}{-u^2-2\sqrt{\alpha-1}\,u+\beta-\alpha}\right)^\mu\frac{du}{u}.$$

Mais, en décomposant le numérateur et le dénominateur des fractions

$$\frac{u^2+2\sqrt{\beta+1}\,u+\beta-\alpha}{u^2+2\sqrt{\alpha+1}\,u-\beta+\alpha},\quad \frac{u^2+2\sqrt{\beta-1}\,u+\beta-\alpha}{-u^2-2\sqrt{\alpha-1}+\beta-\alpha}$$

en facteurs linéaires, nous remarquons que la première, après la réduction par

$$u+\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\alpha+1},$$

se ramène à

$$\frac{u+\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1}}{u-\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\alpha+1}};$$

et la seconde, après la réduction par

$$u+\sqrt{\beta-1}+\sqrt{\alpha-1},$$

se ramène à

$$\frac{u+\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}-u};$$

en vertu de quoi l'expression de la différentielle

$$\frac{F(s,x).F(t,x)}{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu}}\,dx$$

se ramène à la suivante qui est la plus simple:

$$2^{\lambda+\mu}(st)^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\left(\frac{u+\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1}}{u-\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\alpha+1}}\right)^{\lambda}.\left(\frac{u+\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}-u}\right)^{\mu}\frac{du}{u}.$$

Pour trouver les limites de la quantité u, correspondant aux limites de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{F(s,x).F(t,x)}{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu}}\,dx,$$

nous remarquons que d'après (1), (4) et (6) la quantité u s'exprime par x ainsi:

$$u=\sqrt{\beta-x}-\sqrt{\alpha-x};$$

d'où, en prenant $x=-1$ et $x=+1$, nous trouvons que la valeur de u correspondant à $x=-1$, est

$$u=\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1},$$

et celle qui correspond à $x=+1$ est

$$u=\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}.$$

D'après cela, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{F(s,x).F(t,x)}{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu}}\,dx$$

s'exprime ainsi:

$$\int_{\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1}}^{\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}}2^{\lambda+\mu}(st)^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\left(\frac{u+\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1}}{u-\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\alpha+1}}\right)^{\lambda}\left(\frac{u+\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}-u}\right)^{\mu}\frac{du}{u}.$$

Cette intégrale, comme il n'est pas difficile de remarquer, se simplifie considérablement par l'introduction de la variable $v=\frac{u}{\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1}}$.

En faisant cette substitution et en remarquant qu'aux valeurs

$$u=\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1}, \quad u=\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}$$

correspondent

$$v=1, \quad v=\frac{\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1}},$$

nous trouvons que cette intégrale se ramène à la forme suivante

$$(9) \qquad \int_1^{\gamma} 2^{\lambda+\mu}(st)^{\frac{\lambda+\mu-1}{2}}\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^{\lambda}\left(\frac{v+\gamma}{\gamma-v}\right)^{\mu}\frac{dv}{v},$$

où

$$\gamma=\frac{\sqrt{\beta-1}-\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\alpha+1}},$$

— quantité qui d'après (8) s'exprime au moyen de s et de t par la formule

$$\gamma=\frac{\frac{1-t}{\sqrt{2t}}-\frac{1-s}{\sqrt{2s}}}{\frac{1+t}{\sqrt{2t}}-\frac{1+s}{\sqrt{2s}}}=\frac{(1-t)\sqrt{2s}-(1-s)\sqrt{2t}}{(1+t)\sqrt{2s}-(1+s)\sqrt{2t}}.$$

En réduisant la dernière fraction par

$$\sqrt{2s}-\sqrt{2t},$$

nous trouvons

$$\gamma=\frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}}.$$

On voit ainsi que l'intégrale (9), à laquelle se réduit l'integrale (1), est une fonction du produit st. Pour obtenir cette intégrale sous une forme plus simple, nous posons

$$(10) \qquad v=\frac{1+\sqrt{st}\,z}{1-\sqrt{st}\,z},$$

ce qui donne

$$dv=\frac{2\sqrt{st}\,dz}{(1-\sqrt{st}\,z)^2},$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{2\sqrt{st}\,dz}{(1+\sqrt{st}\,z)(1-\sqrt{st}\,z)}=\frac{2\sqrt{st}\,dz}{1-stz^2},$$

$$\frac{v+1}{v-1}=\frac{1}{\sqrt{st}\,z}; \quad \frac{v+\gamma}{\gamma-v}=\frac{1-stz}{\sqrt{st}\,(1-z)}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de l'intégrale (9) et en remarquant que d'après (10) aux valeurs de v

$$v = 1, \quad v = \gamma = \frac{\sqrt{\beta - 1} - \sqrt{\alpha - 1}}{\sqrt{\beta + 1} - \sqrt{\alpha + 1}},$$

correspondent

$$z = 0, \quad z = 1,$$

nous trouvons que l'intégrale considérée se ramène à l'intégrale suivante:

$$\int_0^1 \frac{2^{\lambda + \mu + 1} (1 - st z)^{\mu}}{z^{\lambda} (1 - z)^{\mu} (1 - st z^2)} dz,$$

ce qu'il fallait montrer.

5.

SUR LA DÉTERMINATION DES FONCTIONS

D'APRÈS LES VALEURS

QU'ELLES ONT POUR CERTAINES VALEURS DE VARIABLES.

(TRADUIT PAR C. A. POSSÉ.)

Объ опредѣленіи функцій по значеніямъ,

которыя онѣ имѣютъ при нѣкоторыхъ величинахъ перемѣнной.

(Математическій Сборникъ. Т. IV, 1870 г., стр. 231—245.)

Sur la détermination des fonctions d'après les valeurs qu'elles ont pour certaines valeurs de variables.

§ 1. La formule de **Lagrange** donne l'expression d'une fonction u d'après n de ses valeurs

$$u_1,\ u_2, \ldots, u_n,$$

qui correspondent à n valeurs différentes de la variable

$$x = x_1,\ x_2, \ldots, x_n,$$

dans le cas où u représente un polynôme dont le degré n'est pas supérieur à $n-1$.

Cauchy a donné une formule pour la détermination de la fonction u dans le cas où elle représente une fraction

$$\frac{N}{D},$$

D étant un polynôme dont le degré ne surpasse pas une limite donnée λ et N un polynôme dont le degré n'est pas supérieur à $n-\lambda-1$.

En passant aux fonctions irrationnelles, nous remarquons que la plus simple parmi elles représente la racine de l'équation du second degré

$$u^2 + Lu - M = 0,$$

L et M désignant des polynômes de degrés les plus petits possibles.

Nous allons montrer que ce dernier cas, ainsi que le cas de

$$u = \frac{N}{D}$$

peut être traité au moyen du dévéloppement en fraction continue d'une même expression avec la seule différence que dans le cas de

$$u = \frac{N}{D}$$

la question se résout à l'aide de l'application ordinaire des fractions continues, tandis que le cas de

$$u^2 + Lu - M = 0$$

demande l'application spéciale dont nous avons parlé dans la lettre à M. le professeur Braschmann *).

§ 2. En abordant la détermination d'une fonction u de la forme

$$u = \frac{N}{D}$$

d'après ses n valeurs

$$u_1, \; u_2, \ldots \; u_n,$$

correspondant à n valeurs différentes de la variable

$$x = x_1, \; x_2, \ldots \; x_n,$$

nous remarquons que les équations qui déterminent les polynômes N et D s'obtiennent en égalant à zéro la différence

$$uD - N$$

pour

$$x = x_1, \; x_2, \ldots, x_n.$$

La différence

$$uD - N$$

peut être remplacée dans ce calcul par la différence

$$UD - N,$$

où U désigne un polynôme entier de degré $n - 1$ ayant pour $x = x_1$, $x_2, \ldots x_n$ des valeurs égales à celles de la fonction cherchée u, polynôme— qui, d'après la formule de Lagrange, se représente par l'expression

$$U = \varphi(x) \left[\frac{u_1}{(x - x_1)\,\varphi'(x_1)} + \frac{u_2}{(x - x_2)\,\varphi'(x_2)} + \ldots + \frac{u_n}{(x - x_n)\,\varphi'(x_n)} \right],$$

où

(1) $$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

L'annulation de la différence

$$UD - N$$

pour n valeurs différentes de la variable

$$x = x_1, \; x_2, \ldots, x_n$$

constitue la condition nécessaire et suffisante pour la divisibilité de cette différence par

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

*) T. I, p. 611—614.

d'où il suit l'égalité suivante:

$$UD - N = \varphi(x)\,W, \tag{2}$$

W étant une fonction entière.

Cette équation sera satisfaite par un nombre infini de systèmes des fonctions D, N, W et chacun de ces systèmes donne une fraction

$$\frac{N}{D},$$

qui pour

$$x = x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

se réduit à

$$u_1,\ u_2, \ldots, u_n.$$

Si l'on restreint le choix des fonctions N et D, comme le fait Cauchy, par la condition que le degré de D ne soit pas supérieur à λ, et celui de N ne surpasse pas $n - \lambda - 1$, nous remarquons que dans ce cas le degré de N sera plus petit que celui de $\frac{\varphi(x)}{D}$ et de $\frac{\varphi(x)}{x^\lambda}$, $\varphi(x)$ étant, d'après (1), du degré n. L'équation (2), étant divisée par $\varphi(x)\,D$, donne:

$$\frac{U}{\varphi(x)} - \frac{W}{D} = \frac{N}{D\,\varphi(x)},$$

où, d'après ce qu'on a remarqué à l'égard du degré de N, le degré du second membre sera plus petit que celui de $\frac{1}{D^2}$ et de $\frac{1}{Dx^\lambda}$.

Donc, la fraction

$$\frac{W}{D}$$

donnera l'expression approchée de

$$\frac{U}{\varphi(x)}$$

aux termes près d'ordre de

$$\frac{1}{D^2 x}$$

et de

$$\frac{1}{D\,x^{\lambda+1}}.$$

La première de ces approximations n'est possible, comme on le sait, que dans le cas où la fraction

$$\frac{W}{D}$$

est une des réduites de l'expression

$$\frac{U}{\varphi(x)}$$

qu'on obtient en la développant en fraction continue. La seconde exige que

dans la série des réduites successives la fraction $\frac{W}{D}$ soit suivie par une fraction dont le dénominateur est de degré plus grand que λ, par ce que l'approximation fournie par une réduite quelconque se détermine par l'unité divisée par le produit des dénominateurs de cette réduite et de la suivante.

On voit d'après cela que la fraction

$$\frac{W}{D},$$

où, d'après la condition, le degré de D n'est pas supérieur à λ, sera la dernière des réduites de l'expression

$$\frac{U}{\varphi(x)}$$

ayant un dénominateur dont le degré ne surpasse pas λ.

Représentant par

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}}$$

la fraction continue, obtenue par le développement de l'expression

$$\frac{U}{\varphi(x)},$$

et par

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \ldots,$$

la série des réduites successives, où

$$(3) \quad \begin{cases} P_0 = 0, \; P_1 = 1, \; P_2 = q_2, \ldots\ldots\ldots \; P_i = P_{i-1}\, q_i + P_{i-2}, \\ Q_0 = 1, \; Q_1 = q_1, \; Q_2 = q_1\, q_2 + 1, \ldots\ldots \; Q_i = Q_{i-1}\, q_i + Q_{i-2}, \end{cases}$$

et supposant que

$$\frac{P_\mu}{Q_\mu}$$

est la dernière dans la série

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$$

ayant un dénominateur Q_μ de degré non supérieur à λ, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$(4) \qquad D = Q_\mu, \quad W = P_\mu.$$

C'est ainsi qu'on trouve le dénominateur D de la fraction cherchée

$$U = \frac{N}{D}$$

et la fonction W qui, D étant connu, détermine, à l'aide de l'équation (2), le numérateur N de la même fraction.

§ 3. Il est facile de même de montrer que le numérateur N peut être déterminé immédiatement par le développement en fraction continue de l'expression

$$\frac{U}{\varphi(x)}.$$

En effet, d'après nos notations, la fraction continue provenant du développement de cette expression est

$$\cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}}$$

$q_1, q_2, q_3, \ldots$ étant les quotients obtenus dans les divisions successives de $\varphi(x)$ par U, de U par le premier reste, du premier reste par le second etc. Or, en désignant par

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3 \ldots$$

les restes dans ces divisions, nous remarquons qu'ils seront liés entre eux et aux fonctions $\varphi(x)$, U, $q_1, q_2, q_3, \ldots$ par les équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) &= U q_1 + R_1, \\ U &= R_1 q_2 + R_2, \\ R_1 &= R_2 q_3 + R_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{i-2} &= R_{i-1} q_i + R_i. \end{aligned} \right.$$

Mettant dans la première de ces équations la valeur de U tirée de la seconde, nous aurons

$$\varphi(x) = (R_1 q_2 + R_2)\, q_1 + R_1 = R_1\, (q_1 q_2 + 1) + R_2 q_1,$$

et remplaçant d'après (3)

$$q_2\, q_1 + 1, \quad q_1$$

par

$$Q_2, \quad Q_1,$$

nous trouvons

$$\varphi(x) = R_1 Q_2 + R_2 Q_1.$$

Or, d'après (3), on a

$$P_2 = q_2, \quad P_1 = 1,$$

nous pouvons donc écrire la seconde des équations (5) ainsi:

$$U = R_1 P_2 + R_2 P_1.$$

Les égalités

$$\varphi(x) = R_1 Q_2 + R_2 Q_1,$$
$$U = R_1 P_2 + R_2 P_1,$$

où l'on remplace, d'après (3), Q_1 et P_1 par

$$Q_3 - Q_2 q_3 \quad \text{et} \quad P_3 - P_2 q_3$$

et, d'aprés (5), R_1 par

$$R_3 + R_2 q_3,$$

donnent

$$\varphi(x) = (R_3 + R_2 q_3)\, Q_2 + R_2\, (Q_3 - Q_2 q_3),$$
$$U = (R_3 + R_2 q_3)\, P_2 + R_2\, (P_3 - P_2 q_3),$$

ce qui se réduit à

$$\varphi(x) = R_3 Q_2 + R_2 Q_3,$$
$$U = R_3 P_2 + R_2 P_3.$$

Remplaçant ici, d'après (3) et (5), les fonctions

$$Q_2, \quad P_2, \quad R_2$$

par

$$Q_4 - Q_3 q_4, \quad P_4 - P_3 q_4, \quad R_4 + R_3 q_4$$

et réduisant, on obtient

$$\varphi(x) = R_4 Q_3 + R_3 Q_4,$$
$$U = R_4 P_3 + R_3 P_4.$$

En procédant ainsi nous trouverons en général

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = R_{i+1} Q_i + R_i Q_{i+1}, \\ U = R_{i+1} P_i + R_i P_{i+1}. \end{cases}$$

L'élimination de R_{i+1} entre ces équations donne

$$UQ_i - \varphi(x)\, P_i = R_i\, (Q_i P_{i+1} - Q_{i+1} P_i).$$

et comme, en vertu des propriétés des réduites, on a

$$Q_i P_{i+1} - Q_{i+1} P_i = (-1)^i,$$

on reduira l'égalité précedente à celle qui suit:

$$UQ_i - \varphi(x)\, P_i = (-1)^i R_i. \tag{7}$$

En y posant $i = \mu$ et remarquant que, d'après (4),

$$Q_\mu = D, \quad P_\mu = W,$$

on trouve

$$UD - \varphi(x)\, W = (-1)^\mu R_\mu,$$

ce qui donne, étant comparé avec (2),

$$N = (-1)^\mu R_\mu. \tag{8}$$

On voit de là qu'un des restes

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \ldots,$$

pris avec le signe $+$ ou $-$ sera égal au numérateur N de la fraction cherchée

$$u = \frac{N}{D}.$$

Comme le signe avec lequel R_μ est égal à N se détermine par le signe de $(-1)^\mu$ il sera $+$ ou $-$ selon que μ est pair ou impair.

§ 4. Dans la série des restes

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \ldots,$$

qu'on obtient dans les divisions successives de $\varphi(x)$ par U de U par le premier reste, du premier reste par le second etc., il est facile d'indiquer le reste R_μ qui, d'après (8), donne la valeur du numérateur N de la fraction cherchée

$$u = \frac{N}{D}.$$

Remarquons pour cela que, d'après nos notations (§ 3), le reste R_μ correspond au quotient q_μ auquel correspond à son tour dans la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots}}}$$

la réduite

$$\frac{P_\mu}{Q_\mu},$$

dont le dénominateur fournit, d'après (4), la valeur du dénominateur D de la fraction cherchée. On voit d'après cela que R_μ est le reste dans la dernière division nécessaire pour obtenir la réduite

$$\frac{P_\mu}{Q_\mu}$$

et par conséquent, d'après (4), la valeur de D.

D'ailleurs, il est aisé de montrer que dans la série

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \dots.$$

le reste R_μ est le premier dont le degré est inférieur à $n-\lambda$.

En effet, comme le degré de R_i est plus grand que celui de R_{i+1} et le degré de Q_{i+1} plus grand que celui de Q_i, le degré du produit

$$R_i\, Q_{i+1}$$

est supérieur au degré de

$$R_{i+1}\, Q_i.$$

En vertu de cela, d'après l'équation (6), le produit $R_i\, Q_{i+1}$ sera de dégré égal à celui de $\varphi(x)$ ou x^n, donc le degré de R_i sera égal à celui du quotient

$$\frac{x^n}{Q_{i+1}}.$$

En posant $i=\mu$ et remarquant que, d'après le § 2, $Q_{\mu+1}$ est la première fonction dans la série

$$Q_1, \quad Q_2, \dots. \quad Q_\mu, \quad Q_{\mu+1}, \dots.$$

dont le degré est supérieur à λ, nous concluons que R_μ est le premier dans la série des restes

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \dots.$$

dont le degré est moindre que le degré de $\frac{x^n}{x^\lambda}$, c'est à dire moindre que $n-\lambda$.

On voit d'après cela que pour déterminer le numérateur et le dénominateur de la fraction cherchée

$$u = \frac{N}{D}$$

il faut prolonger les divisions successives de $\varphi(x)$ par U, de U par le premier reste, du premier reste par le second etc. jusqu'à ce qu'on arrive à un reste de degré inférieur à $n - \lambda$. Le dernier reste avec le signe $+$ ou $-$ sera le numérateur N; quant au dénominateur $D = Q_\mu$, on l'obtiendra à l'aide des quotients $q_1, q_2, \ldots\ q_\mu$ que donnent ces divisions, au moyen des formules (3); le signe avec lequel le dernier reste est égal au numérateur N sera $+$ ou $-$, selon que μ, le nombre de toutes les divisions, sera pair ou impair.

§ 5. Passons maintenant au cas où la fonction u représente la racine de l'équation

$$u^2 + Lu - M = 0.$$

Pour que la fonction u ayant les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n$$

pour

$$x = x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n,$$

satisfasse à l'équation

$$u^2 + Lu - M = 0,$$

il faut et il suffit que pour les mêmes valeurs de x on ait

$$U^2 + LU - M = 0,$$

U étant (§ 2) une fonction entière de degré $n - 1$ et ayant les mêmes valeurs que u pour $x = x_1, x_2, \ldots\ x_n$. Cela se réduit à l'égalité

(9) $$U^2 + LU - M = \varphi(x)\, W,$$

où

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

et W une fonction entière inconnue. Tout système de fonctions L et M pour lequel cette égalité peut être satisfaite par une fonction entière W conduit à une équation

$$u^2 + Lu - M = 0$$

à laquelle satisfait une fonction u prenant les valeurs $u_1, u_2, \ldots\ u_n$ pour $x = x_1, x_2, \ldots\ x_n$, et le nombre de ces équations est infini. Ayant en vue

les équations les plus simples, nous allons chercher celle dans laquelle le degré de L ne surpasse pas une limite donnée λ, M étant en même temps du degré le plus petit possible.

L'équation (9) se réduit aisément à la forme

$$L\frac{U}{\varphi(x)} - W = -\frac{U^2}{\varphi(x)} + \frac{M}{\varphi(x)}, \tag{10}$$

qui fait voir que la différence

$$L\frac{U}{\varphi(x)} - W$$

représente la valeur de

$$-\frac{U^2}{\varphi(x)}$$

aux termes près d'ordre de la fraction

$$\frac{M}{\varphi(x)},$$

et, par conséquent, pour que M soit, conformément à ce qui précède, de degré le plus petit possible, il faut que la différence

$$L\frac{U}{\varphi(x)} - W$$

représente le plus près possible la valeur de

$$-\frac{U^2}{\varphi(x)}.$$

Or, la détermination des polynômes L et W sous cette condition est justement l'objet de cette application spéciale des fractions continues dont il s'agissait dans la lettre mentionnée ci-dessus. En appliquant au cas actuel la formule y établie pour la détermination du polynôme X, nous trouvons que le polynôme L se détermine par la série suivante

$$(\mathrm{E}q_1 Q_0 v - q_1 \mathrm{E} Q_0 v)\, Q_0 - (\mathrm{E} q_2 Q_1 v - q_2 \mathrm{E} Q_1 v)\, Q_1 + \ldots,$$

où

$$v = -\frac{U^2}{\varphi(x)},$$

et

$$q_1,\quad q_2, \ldots,\quad Q_0,\quad Q_1, \ldots$$

ont le même sens que dans les paragraphes précédents.

Cette série arrêtée au dernier des termes dont le degré ne surpasse pas λ, donnera le polynôme cherché L. Supposant que ce terme soit

$$\pm\left(\mathrm{E} q_{\mu+1}\, Q_\mu v - q_{\mu+1}\, \mathrm{E} Q_\mu v\right) Q_\mu$$

et désignant pour abréger une expression de la forme

$$\mathrm{E} q_{i+1}\, Q_i v - q_{i+1}\, \mathrm{E} Q_i v$$

par

$$\omega_i,$$

nous aurons d'après ce qui précède

$$L = \omega_0 Q_0 - \omega_1 Q_1 + \ldots + (-1)^\mu \omega_\mu Q_\mu.$$

Quant à la fonction W, la formule de la lettre mentionnée qui détermine le polynôme Y, donnera d'après nos notations, pour l'expression de W la formule suivante:

$$W = -\mathrm{E} v + \omega_0 P_0 - \omega_1 P_1 + \ldots + (-1)^\mu \omega_\mu P_\mu.$$

Pour déterminer le polynôme M mettons dans l'équation (10) les expressions trouvées des polynômes L et W, ainsi que le développement de la fonction

$$v = -\frac{U^2}{\varphi(x)}$$

en série procédant suivant les valeurs

$$\frac{U}{\varphi(x)} Q_0 - P_0, \quad \frac{U}{\varphi(x)} Q_1 - P_1, \ldots,$$

qui donne

$$-\frac{U^2}{\varphi(x)} = Ev + \omega_0\left(\frac{U}{\varphi(x)} Q_0 - P_0\right) - \omega_1\left(\frac{U}{\varphi(x)} Q_1 - P_1\right) + \ldots$$

On en tire, en multipliant par $\varphi(x)$ et réduisant, l'expression suivante du polynôme M:

$$M = (-1)^\mu \omega_{\mu+1}\left[UQ_{\mu+1} - \varphi(x) P_{\mu+1}\right] + (-1)^{\mu+1} \omega_{\mu+2}\left[UQ_{\mu+2} - \varphi(x) P_{\mu+2}\right] + \ldots$$

Or, remarquant que d'après (7)

$$UQ_{\mu+1} - \varphi(x) P_{\mu+1} = (-1)^{\mu+1} R_{\mu+1}$$
$$UQ_{\mu+2} - \varphi(x) P_{\mu+2} = (-1)^{\mu+2} R_{\mu+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous trouvons que l'expression du polynôme M se réduit à celle-ci:

$$M = -\omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \omega_{\mu+2} R_{\mu+2} - \ldots$$

C'est ainsi qu'on détermine les polynômes L et M conduisant aux équations les plus simples de la forme

$$u^2 + Lu - M = 0$$

auxquelles peut satisfaire une fonction u qui prend les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \ldots \quad u_n$$

pour

$$x = x_1, \quad x_2, \ldots \quad x_n.$$

6.

SUR LES PARALLÉLOGRAMMES.

(Dédié à l'Ecole Impériale technique.)

(TRADUIT PAR G. K. SOUSLOF.)

О параллелограммахъ.

Труды втораго съѣзда русскихъ естествоиспытателей въ Москвѣ, происходившаго съ 20-го по 30-е августа 1869 года. 1870 г. Отдѣлъ Технологіи и Практической Механики. Стр. 9—30.

Sur les parallélogrammes.

(Dédié à l'Ecole Impériale technique).

---

§ 1. Jusqu'à présent on n'emploie en pratique que trois parallélogrammes différents: les deux parallélogrammes de Watt, réduit et complet, et le parallélogramme connu sous le nom du mécanisme d'Evans. Mais il est possible de composer beaucoup de mécanismes semblables qui fournissent le mouvement plus ou moins approchant du mouvement rectiligne. Dans les séances de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg (18 oct. 1861, 8 oct. 1868) et de la Société mathématique de Moscou (18 nov. 1867) nous avons parlé de la construction des parallélogrammes qui par leur précision surpassent tous ceux qu'on emploie aujourd'hui. Maintenant nous montrerons, comment on peut construire différents parallélogrammes qui produisent le mouvement rectiligne avec l'approximation aussi grande que l'on voudra. Nous allons voir qu'avec le même nombre d'organes que celui du parallélogramme complet de Watt il est possible de construire un parallélogramme qui fournit le mouvement rectiligne exact jusqu'au 13-e degré, tandis que les parallélogrammes de Watt et le mécanisme d'Evans ne produisent ce mouvement qu'avec l'exactitude qui ne va que jusqu'au 5-e degré; quant aux parallélogrammes, proposés par nous, leur degré d'exactitude balance entre 6 et 8. Un tel parallélogramme, comme on va voir, présente d'ailleurs cet avantage que, tout en conservant dans son jeu la précision encore suffisante pour la pratique, il peut remplacer par ses organes la bielle et la manivelle pour exécuter la transformation du mouvement rectiligne alternatif en mouvement rotatoire continu. En parlant de différents parallélogrammes nous ne considérerons que les mouvements infiniment petits, pour lesquels le degré de précision des parallélogrammes peut être défini avec une facilité particulière; pour passer des mouvements infiniment petits aux mouvements finis il faudra faire quelques changements

dans les dimensions des organes. Ces changements seront en général peu sensibles, si les limites pour le mouvement du parallélogramme sont assez rapprochées; alors on peut évaluer ces changements à l'aide de séries par la méthode que nous avons exposée dans le mémoire: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* *). Mais pour le dernier des cas mentionnés, quand le parallélogramme remplace par ses organes la bielle et la manivelle, on aura besoin d'un procédé tout à fait particulier parce que dans ce cas qui s'écarte trop de celui des mouvements infiniment petits l'emploi de séries n'est pas efficace. Nous examinerons ce cas particulièrement et nous donnerons toutes les formules qui s'y rapportent.

§ 2. Les mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes peuvent être considérés généralement comme des systèmes de droites qui se meuvent dans un plan et qui sont liées entre elles à l'aide des charnières; ces dernières empêchent aux points d'intersection des droites de glisser sur celles-ci, mais elles permettent aux angles faits par ces droites de varier. D'ailleurs quelques unes des charnières sont invariablement liées à certains points du plan de manière que les droites correspondantes ne peuvent que pivoter sur ces points fixes. En désignant par m le nombre des droites dont le parallélogramme est composé, par n le nombre des joints liant deux droites entre elles et par v celui des pivots fixes, on aperçoit que la position sur le plan de chacune des m droites du système considéré est défini par trois grandeurs (par exemple, on peut prendre pour ces grandeurs les deux coordonnées d'un bout de la droite avec son inclinaison sur l'axe des abscisses). De l'autre côté chacune des n charnières, unissant les deux droites, et chacun des v pivots fixés au plan fournissent deux équations entre les grandeurs qui définissent la position du système considéré (savoir: l'accouplement de deux droites par une charnière suppose l'égalité des coordonnées de deux points appartenants à ces deux droites; le pivotement d'une droite sur un point fixe du plan suppose que les coordonnées de ce point sont connues). On voit ainsi que la position de tous les points du système se définira par $3m$ grandeurs, liées entre elles par $2(n+v)$ équations et par conséquent le nombre des variables indépendantes s'exprimera par la différence

$$3m - 2(n+v).$$

Mais ce nombre doit être égal à l'unité pour que les points du système considéré ne puissent se mouvoir que sur les trajectoires déterminées, comme cela doit avoir lieu pour les parallélogrammes; donc

$$3m - 2(n+v) = 1. \tag{1}$$

*) T. I, pag. 111 — 143.

De l'autre côté on aperçoit: 1) que le système considéré ne doit pas se mouvoir librement dans un plan et 2) que toutes les droites qui appartiennent au système doivent être liées entre elles.

Le premier point suppose nécessairement l'existence des pivots fixes; par conséquent, $v > 0$.

Le second point suppose que n, le nombre des charnières, est plus grand que $m-2$, parce que $m-2$ joints ne suffisent pas évidemment pour lier une à une toutes les droites du système. Mais de l'équation (1), pour $n > m-2$, on trouve

$$v < \frac{m+3}{2}.$$

On voit ainsi que v, le nombre des charnières, doit satisfaire aux inégalités suivantes:

(2) $$v > 0,\ v < \frac{m+3}{2}.$$

§ 3. En prenant dans l'équation $3m - 2(n+v) = 1$ les nombres m et $n+v$ pour des inconnus et en la résolvant, on trouve pour m et $n+v$ les valeurs suivantes:

$$m=1,\ n+v=1;\ \ m=3,\ n+v=4;\ \ m=5,\ n+v=7,\ \text{и т. д.}$$

En considérant les premières valeurs de m et de $n+v$:

$$m=1,\ n+v=1,$$

on aperçoit que d'après (2) pour $m=1$ il faut avoir

$$v > 0,\ v < \frac{1+3}{2} = 2,$$

ce qui suppose que $v = 1$. Donc en ce cas le parallélogramme dégénère en une droite pivotant sur un de ses points. — Ainsi on trouve le mouvement circulaire qui ne peut remplacer le mouvement rectiligne qu'avec l'approximation du second degré. En passant aux valeurs suivantes de m et de $n+v$, on a

$$m=3,\ n+v=4.$$

D'après (2) pour $m=3$ on trouve

$$v > 0,\ v < \frac{3+3}{2} = 3,$$

cela suppose que v a une des valeurs suivantes:

$$v=1,\ v=2.$$

Mais d'après l'équation:

$$n + v = 4,$$

à ces valeurs de v correspondent les valeurs suivantes de n:

$$n = 3,\ n = 2.$$

Donc pour $m = 3$ on aura

$$v = 1,\ n = 3,$$

$$\text{ou } v = 2,\ n = 2.$$

Dans le premier cas le système considéré consiste en une droite qui pivote autour d'un de ses points et qui est articulée avec deux autres droites à l'aide de trois joints ou, ce qui revient au même, le système n'est qu'un triangle qui tourne autour d'un point fixe, situé sur un de ses côtés. Ainsi tous les points ne peuvent se mouvoir que sur les cercles et par conséquent ne peuvent fournir le mouvement rectiligne qu'avec l'approximation du 2-e degré.

Dans le second cas, quand

$$m = 3,\ v = 2,\ n = 2,$$

le système considéré consiste en deux droites qui pivotent sur deux points fixes et qui sont articulées avec la troisième par deux joints. C'est le plus simple système des parallélogrammes qui peuvent produire le mouvement rectiligne avec l'exactitude plus grande que celle du 2-e degré; savoir: *le parallélogramme réduit de Watt*, *le mécanisme d'Evans* et *le parallélogramme* que nous avons proposé l'année passée. Les deux premiers parallélogrammes fournissent le mouvement rectiligne exact jusqu'au 5-e degré; le dernier jusqu'au 6-e degré.

Dans le troisième groupe des valeurs pour m et $n + v$ on a

$$m = 5,\ n + v = 7,$$

et d'après (2) pour $m = 5$ on trouve

$$v > 0,\ v < \frac{5+3}{2} = 4,$$

D'où il est clair que v, le nombre des pivots fixes, ne peut avoir que les valeurs suivantes:

$$v = 1,\ v = 2,\ v = 3.$$

Mais d'après l'équation

$$n + v = 7$$

on trouve qu'à ces valeurs de v correspondent les valeurs suivantes de la quantité n:

$$n = 6, \quad n = 5, \quad n = 4.$$

Les premières valeurs de v et de n

$$v = 1, \quad n = 6$$

correspondent au cas, lorsque les 5 droites sont liées par 6 charnières et tournent autour d'un point fixe, situé sur l'une d'elles. Ainsi ces droites représentent un système invariable et tous leurs points ne peuvent décrire que des cercles.

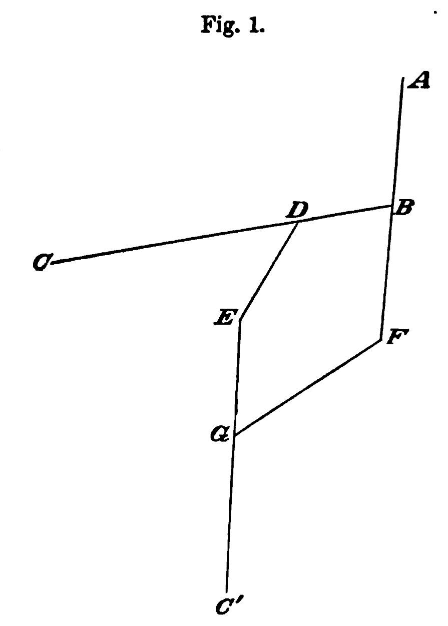
Pour

$$v = 2, \quad n = 5$$

on trouve des parallélogrammes qui consistent en deux droites, qui pivotent sur des points fixes et sont articulées avec les trois autres droites à l'aide de 5 joints; ainsi sont construits *le parallélogramme de Watt* et le parallélogramme que nous avons proposé sous le nom du *parallélogramme modifié de Watt* *). Le premier de ces parallélogrammes fournit le mouvement rectiligne exact jusqu'au 5-e degré, le second — jusqu'au 7-e degré.

En conservant la même combinaison des pièces comme celle du parallélogramme de Watt, mais en leur donnant une autre direction on trouve le parallélogramme que nous avons mentionné à la fin de notre mémoire portant le titre «Sur un mécanisme» **). Si l'on donne aux organes du dit parallélogramme des dimensions convenables, il fournira le mouvement rectiligne exact jusqu'au 6-e degré. Si l'on combine les organes de la même manière comme dans *le parallélogramme modifié de Watt*, mais en changeant leur direction, on trouve le parallélogramme représenté sur la fig. 1. Ce parallélogramme, comme il n'est pas difficile de le montrer, peut produire le mouvement rectiligne exact jusqu'au 6-e degré; pour cela les dimensions de ses organes doivent être évaluées de la manière suivante.

Fig. 1.



Si l'on prend pour unité des longueurs celle de la droite BC pivotant

*) T. I, pag. 533 — 538.

**) T. II, pag. 51 — 57.

sur le point C et si l'on pose $GF = f$, $BF = h$ (la longueur de ces droites est arbitraire), on trouve pour toutes les autres parties du parallélogramme et pour le point A, situé sur la droite AF et exécutant le mouvement désiré, les formules suivantes:

$$ED = \frac{(1-f)f^2}{1-2f^2};$$

$$CD = \frac{(1-f)(1-f^2)}{1-2f^2};$$

$$EC' = \frac{(1-f)^2(1+f)}{1-f-f^2}\,h;$$

$$GC' = \frac{f^3}{1-f-f^2}\,h;$$

$$AB = \frac{1-f-f^2}{f(1-f)}\,h.$$

On choisit la position du point C', pivot de la droite $C'E$, de telle manière que dans la position moyenne du parallélogramme la droite DE se confonde avec la droite CD et le pentagone $EDBFG$ dégénère en un rectangle.

§ 4. Passons maintenant aux dernières valeurs de v et de n, possibles pour

$$m = 5.$$

Ces valeurs sont

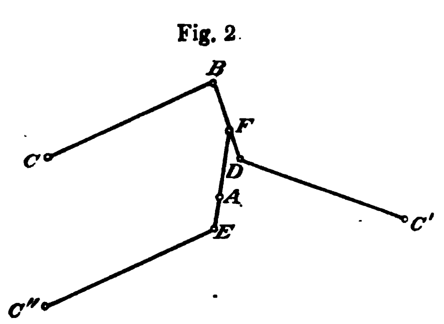
$$v = 3, \quad n = 4,$$

elles donnent, comme on va voir, des parallélogrammes particulièrement remarquables par la précision de leur jeu. Comme $v = 3$, il y a dans ces parallélogrammes trois droites pivotant sur des points fixes; toutes ces droites doivent être liées entre elles à l'aide de deux autres droites; donc ce n'est possible que dans le cas où du moins l'une des deux droites qui unissent les autres est immédiatement articulée avec deux droites pivotant sur les points fixes; ces deux droites qui pivotent sur les points fixes et la droite qui les unit nous désignerons pour plus de brièveté par l'expression: *la première partie* du parallélogramme; quant aux autres droites, celle qui tourne autour d'un point fixe et celle qui unit cette dernière avec la première partie, elles seront désignées par l'expression: *la seconde partie* du parallélogramme.

Le parallélogramme dont nous avons parlé dans la séance de la société mathématique de Moscou le 18 novembre 1867 appartient à la catégorie des parallélogrammes mentionnés. *Sa première partie* est le parallélogramme *réduit* de Watt; *sa seconde partie* est ainsi construite que dans la position moyenne du parallélogramme les trois droites qui pivotent sur les points fixes deviennent parallèles entre elles, tandis que les deux droites qui les unis-

sent se confondent en une seule, perpendiculaire aux premières. Ce parallélogramme (fig. 2), comme on peut le montrer par des calculs, fournit le mouvement rectiligne exact jusqu'au 8-e degré, si dans les dimensions de ses organes sont remplies les conditions suivantes:

Fig. 2.



1) Toutes les trois droites BC, $C'D$, $C''E$ qui pivotent sur les points fixes C, C', C'' doivent être égales.

2) Les distances du point A, exécutant le mouvement désiré aux bouts F, E du segment FE doivent avoir des grandeurs suivantes:

$$AF = \frac{BF^2 - DF^2}{4FD};$$

$$AE = \frac{(BF - DF)^2}{4FD}.$$

§ 5. On peut construire beaucoup de parallélogrammes de la dite catégorie en variant l'aspect de la première partie et en donnant aux droites de la seconde partie des directions différentes. Pour que les parallélogrammes ainsi construits produisent le mouvement rectiligne avec la precision désirée, il faut que leurs organes satisfassent aux certaines équations qu'on trouve facilement pour chaque cas particulier. Mais ces équations sont assez compliquées et leur nombre augmente avec le degré de précision du parallélogramme; c'est pourquoi la résolution de ces équations présente d'insurmontables difficultés, quand on veut obtenir des parallélogrammes qui se distinguent par la précision particulière de leur jeu. Cette difficulté dans la construction des parallélogrammes disparaît, si dans *la seconde partie* du parallélogramme la droite qui pivote sur un point fixe et la droite qui unit celle-ci avec le reste du parallélogramme satisfont aux conditions suivantes:

1) La seconde droite est deux fois plus longue que la première; elle est divisée en deux parties égales par la charnière qui l'unit avec la première.

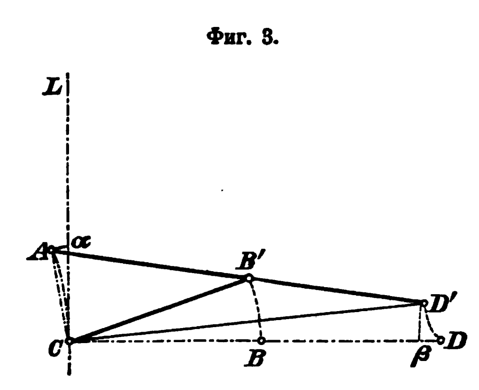
2) Un bout de la seconde droite fournit le mouvement voulu, l'autre bout est articulé avec le reste du parallélogramme.

3) Dans la position moyenne du parallélogramme le bout de la seconde droite, celui qui exécute le mouvement désiré, coïncide avec le pivot de la première droite.

Quand ces conditions sont remplies par *la seconde partie* du parallélogramme, celui-ci produit, comme il n'est pas difficile de s'en convaincre, le

mouvement rectiligne exact jusqu'au degré $2\lambda + 1$, si sa première partie fournit ce mouvement avec la précision qui va jusqu'au degré λ et si la direction du dit mouvement se confond avec celle des droites de la seconde partie du parallélogramme dans sa position moyenne.

Фиг. 3.



En effet, soient (fig. 3) CB, CD et CB', AD' les deux positions des droites appartenant à la seconde partie du parallélogramme; la première correspond à la position moyenne du parallélogramme, quand le point A exécutant le mouvement voulu coïncide avec le point C, pivot de la droite CB'; la seconde correspond au moment, quand le point A a décrit l'arc infiniment petit CA et quand le point D, dirigé en son mouvement par la première partie du parallélogramme, a décrit l'arc infiniment petit DD'. D'après ce qu'on a dit, la droite CD sera tangente à l'arc DD' parce que cette droite représente la direction du mouvement du point D.

Unissons les points A avec C, C avec D' par les droites AC, CD', élevons du point C la perpendiculaire CL à la droite CD et des points A, D' abaissons les perpendiculaires $A\alpha$, $D'\beta$ sur les droites CL, CD.

Par hypothsèe, on a

$$AD' = CD = 2CB',$$
$$AB' = B'D';$$

on voit ainsi que l'angle ACD' est droit; mais, comme d'après la construction l'angle LCD est aussi droit, les angles $AC\alpha$, $D'CD$ sont égaux; donc les triangles rectangles $AC\alpha$, $D'CD$ sont semblables. La similitude de ces triangles conduit à l'équation

$$\frac{A\alpha}{AC} = \frac{\beta D'}{CD'},$$

d'où l'on aura pour $A\alpha$, déviation du point A de la droite CL, l'expression suivante:

$$A\alpha = \frac{AC}{CD'}\,\beta D';$$

Du triangle rectangle $CD'\beta$ on a

$$CD'^2 = C\beta^2 + \beta D'^2;$$

mais, comme

$$C\beta = CD - \beta D$$

et

$$CD = AD',$$

l'expression précédente donnera:

$$CD'^2 = (AD' - \beta D)^2 + \beta D'^2.$$

En apercevant que du triangle rectangle ACD' on a:

$$CD'^2 = AD'^2 - AC^2,$$

on conçoit de cette équation que

$$AD'^2 - AC^2 = (AD' - \beta D)^2 + \beta D'^2,$$

d'où, en ouvrant les parenthèses et en réduisant, on aura

$$-AC^2 = -2AD' \cdot \beta D + \beta D^2 + \beta D'^2.$$

Dans cette équation AD' est une quantité finie, mais les quantités AC, βD, $\beta D'$ sont infiniment petites et l'ordre d'infiniment petit $\beta D'$ est plus haut que celui d'infiniment petit βD, parce que la droite CD est tangente à l'arc DD'; donc l'équation précédente suppose que βD est infiniment petit du second ordre par rapport à AC. Mais, par hypothèse, $\beta D'$ est infiniment petit de l'ordre λ par rapport à βD, parce que l'arc DD', décrit par le point D, représente la droite CD avec la précision qui va jusqu'au degré λ. Par conséquent, le segment $\beta D'$ par rapport au segment AC sera infiniment petit de l'ordre 2λ, donc de l'équation trouvée

$$A\alpha = \frac{AC}{CD'} \beta D'$$

on conclut que $A\alpha$, déviation du point A de la droite LC, sera par rapport à AC infiniment petit de l'ordre $2\lambda + 1$.

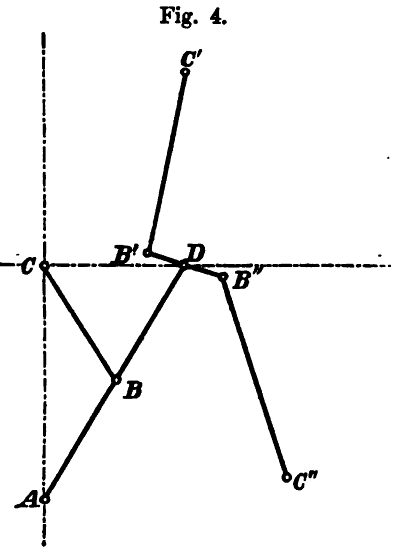


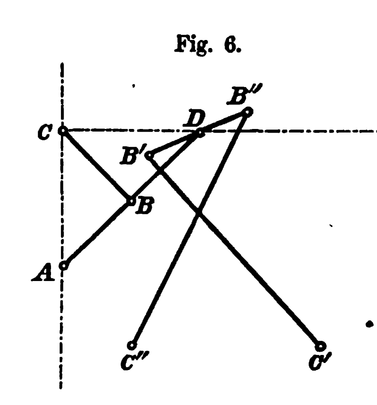
Fig. 4.

§ 6. En se basant sur ce qu'on vient de demontrer, on peut très facilement augmenter la précision des parallélogrammes en y ajoutant le système des deux droites dont on a parlé auparavant. Ainsi, du parallélogramme réduit de Watt qui produit le mouvement rectiligne exact jusqu'au 5-e degré on passe à celui qui est représenté sur la fig. 4; ce dernier, si les conditions posées en § 5 sont remplies, fournira le mouvement rectiligne avec la précision qui va jusqu'au 11-e degré. Ce parallélogramme consiste en trois droites BC, $B'C'$, $B''C''$ qui pivotent sur les points fixes C, C', C'', et en deux droites articulées avec celles-ci à l'aide des trois joints B, B', B''; le bout A de la droite AD exécute le mouvement voulu. Exactement de la même manière on passe du mécanisme d'Evans, produisant le mouvement rectiligne exact

jusqu'au 5-e degré, au parallélogramme qui est représenté sur la fig. 5 et qui peut fournir le mouvement rectiligne exact aussi jusqu'au 11-e degré. Ce parallélogramme présente les mêmes organes que le précédent; la différence ne se manifeste que dans la position des points fixes C', C'', sur lesquels pivotent les droites $B'C'$, $B''C''$ et dans la position du joint D unissant les droites AD et $B'B''$. On a vu au § 3 qu'avec les mêmes pièces que ceux du parallélogramme réduit de Watt et du mécanisme d'Evans on peut composer le parallélogramme dont la précision ira jusqu'au 6-e degré. Si l'on ajoute à ce parallélogramme les deux droites satisfaisant aux conditions qu'on a exposées dans le paragraphe précédent, on aura le parallélogramme qui fournira le mouvement rectiligne exact jusqu'au 13-e degré. Le parallélogramme ainsi construit est représenté sur la fig. 6. Il consiste aussi en cinq droites dont les trois BC, $B'C'$, $B''C''$ pivotent sur les points fixes C, C', C'', et les deux autres $B'B''$, AD sont liées avec les premières à l'aide des trois charnières B, B', B''. Le mouvement en question est fourni par le bout libre de la droite AD. Ce parallélogramme ne diffère du premier de ceux qu'on a décrits que par la position des points fixes C', C'', sur lesquels pivotent les droites $B'C'$, $B''C'$.

Fig. 5.

Fig. 6.



Le parallélogramme mentionné produit le mouvement rectiligne avec la précision qui va jusqu'au 13-e degré; donc d'après § 5, si l'on le combine avec deux autres droites, on peut construire un parallélogramme fonctionnant avec la précision qui ira jusqu'au 27-e degré; en y ajoutant encore deux droites on augmente le degré de la précision jusqu'à 55 etc. Mais, comme nous regardons la précision qui va jusqu'au 13-e degré comme tout à fait suffisante pour la pratique, nous nous arrêterons au dernier des parallélogrammes mentionnés et nous n'examinerons pas les parallélogrammes plus compliqués.

§ 7. Comme le degré de précision, avec laquelle ce parallélogramme fournit le mouvement rectiligne est poussé si loin, le segment de la droite produit par le mécanisme considéré, avec la précision suffisante pour la pratique, peut avoir la longueur assez considérable relativement aux dimensions

des organes du parallélogramme. Si l'on garde la longueur des droites AB, BC, mais si l'on augmente la longueur de la trajectoire du point A en haut et en bas du point C (fig. 7), on parviendra à ce que la droite BC exécute un demi-tour au côte droit de la droite LM qui passe par le point C et qui est perpendiculaire à la droite $C'C''$. Si, d'ailleurs, on modifie les positions des points C', C'' en les disposant symétriquement des deux côtés de la droite LM (fig. 8), toutes les positions du parallélogramme seront symétriques par rapport à la même droite LM. Donc à une oscillation du point A entre les limites extrêmes dont on a parlé tout à l'heure correspondront également et le demi-tour du segment BC au côté droit de la ligne LM, et le demi-tour du segment BC au côté gauche de LM. Par conséquent, les points C', C'', pivots des droites $B'C'$, $B''C''$, étant ainsi disposés, à la révolution complète de la droite BC autour du point C correspondra l'oscillation du point A d'une limite extrême à l'autre et le retour de ce point à sa première position. Le degré de précision que possèdent les parallélogrammes de l'espèce considérée est poussé si loin qu'il devient possible de faire suffisamment approchée de la ligne droite toute la trajectoire décrite par le point A pendant la révolution complète du segment BC autour du point C. On atteint ce but, comme le montrent les calculs, si l'on donne aux organes du parallélogramme les dimensions évaluées comme il suit:

Fig. 7.

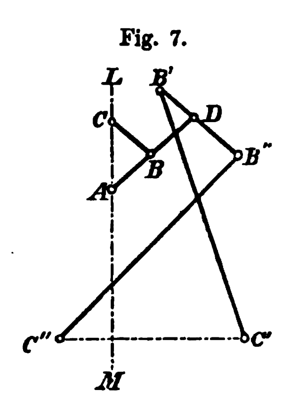
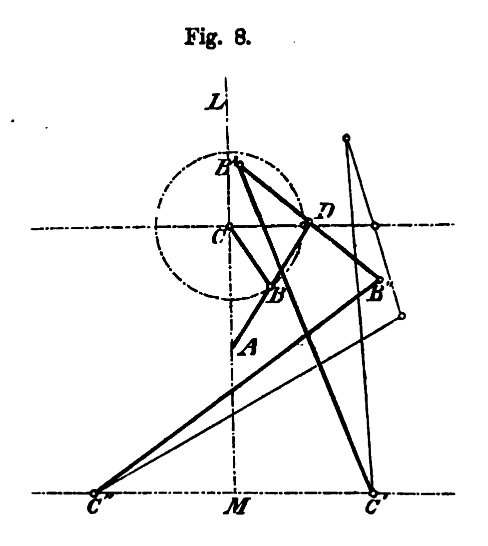


Fig. 8.



«On prend pour unité des longueurs celle des droites $B'C'$, $B''C''$ qui pivotent sur les points C', C''; alors la longueur a de la droite $B'B''$ liée avec celles-ci et la distance b entre les points C', C'' s'exprimeront ainsi:

$$a = \frac{1}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8-\sigma)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}; \tag{3}$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2}}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8-\sigma)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}; \tag{4}$$

où σ est le sinus-versus de l'angle de l'inclinaison de la droite $B'B''$ sur la droite $C'C''$ dans la position extrême du parallélogramme; les segments CB, AB, BD et AD sont définis par l'équation:

(5) $$BC = AB = BD = \frac{AD}{2} = \frac{1}{4}\, l,$$

où l est égal à la longueur du pas du point A, qu'on peut trouver à l'aide de la formule

(6) $$l = a\sqrt{\frac{(\mu + \sigma)\,\sigma\,(2 - \sigma)}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - \sigma}},$$

en posant

(7) $$\begin{cases} \lambda = \frac{b}{a}, \\ \mu = \frac{4 - (a + b)^2}{2ab}. \end{cases}$$

Le point D, où la droite $B'B''$ est articulée avec la droite AD, doit être pris au milieu du segment $B'B''$; il faut choisir la position du point C, sur lequel pivote la droite BC de manière, que dans la position moyenne du parallélogramme, quand les droites $B'B''$ et $C'C''$ deviennent parallèles, le point D coïncide avec le point C».

§ 8. Il n'est pas difficile de montrer que pour le parallélogramme ainsi construit les déviations du point A de la droite LM pendant la révolution complète du segment BC autour du point C ne surpasseront pas la limite suivante:

$$\frac{\sigma^3}{128}\sqrt{M},$$

où M est la valeur maximum qu'atteignent les fractions

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2\,(\mu + s)^2\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(2 - s)},$$

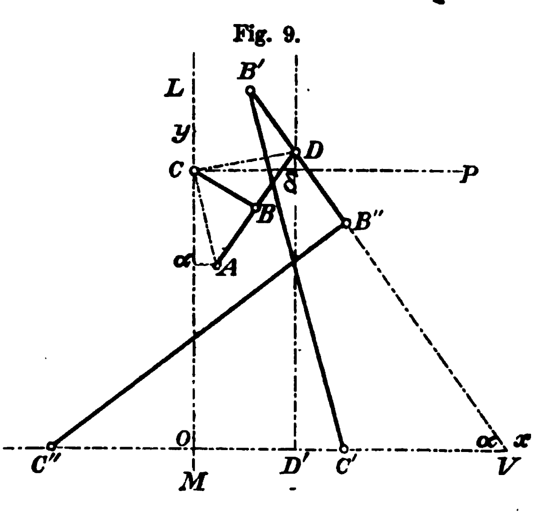
$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu\,(\mu + s)\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)^2(2 - s)}$$

entre $s = 0$ et $s = \sigma$.

Nous commencerons la démonstration par la recherche des formules

qui définissent la position du point D (fig. 9) pour les inclinaisons diverses de la droite $B'B''$ sur la droite $C'C''$. On prend la droite $C'C''$ pour l'axe des abscisses, la droite LM pour celui des ordonnées et le point O, intersection de ces droites, pour l'origine des coordonnées; alors, comme, d'après ce qu'on a dit, les points C', C'' sont disposés symétriquement par rapport à la droite LM, on aura:

Fig. 9.



$$C'O = C''O$$

et par conséquent

$$C'O = C''O = \frac{1}{2}\, C'C'' = \frac{1}{2}\, b.$$

En prolongeant la droite $B'B''$ jusqu'à son intersection avec l'axe des abscisses au point V, on aperçoit que les coordonnées du point D à l'aide des longueurs des segments DV, OV et de l'angle $B'VC'' = \alpha$ s'expriment ainsi:

$$x = OV - DV \cos\alpha,$$
$$y = DV \sin\alpha.$$

De l'autre côté on voit que

$$B'V = DV + DB';\quad B''V = DV - DB'';$$
$$C'V = OV - OC';\quad C''V = OV + OC'';$$

d'où d'après les équations:

$$DB' = DB'' = \frac{1}{2}\, B''B' = \frac{a}{2};$$
$$OC' = \frac{b}{2};\quad OC'' = \frac{b}{2},$$

on déduit:

$$B'V = DV + \frac{a}{2};\quad B''V = DV - \frac{a}{2};$$
$$C'V = OV - \frac{b}{2};\quad C''V = OV + \frac{b}{2};$$

mais, comme on a pris pour unité des longueurs celle des droites $B'C'$, $B''C''$, les triangles $C'B'V$, $C''B''V$ donnent

$$1 = \left(DV + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(OV - \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(DV + \frac{a}{2}\right)\left(OV - \frac{b}{2}\right)\cos\alpha,$$
$$1 = \left(DV - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(OV + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(DV - \frac{a}{2}\right)\left(OV + \frac{b}{2}\right)\cos\alpha.$$

En résolvant ces équations par rapport aux quantités DV, OV et en posant pour abréger

$$1 - \cos\alpha = s,$$

$$\frac{b}{a} = \lambda,$$

$$\frac{4 - (a+b)^2}{2ab} = \mu,$$

on trouve

$$DV = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - s)\sqrt{\frac{\mu + s}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)s(2-s)}},$$

$$OV = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - \lambda s)\sqrt{\frac{\mu + s}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)s(2-s)}}.$$

En introduisant ces valeurs pour DV et OV dans les expressions déjà obtenues pour les coordonnées x et y du point D et en remarquant que l'équation

$$1 - \cos\alpha = s$$

donne

$$\cos\alpha = 1 - s, \quad \sin\alpha = \sqrt{s(2-s)},$$

on trouve

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(\mu+s)\,s(2-s)}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}},$$

$$y = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - s)\sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Ainsi s'expriment les coordonnées du point D à l'aide de sinus-versus de l'angle qui mesure l'inclinaison de la droite $B'B''$ sur la droite $C'C''$.

§ 9. En abordant la détermination des déviations du point A de la droite LM, mènons du point A la droite $A\alpha$ perpendiculairement à la droite LM: la longueur de cette perpendiculaire représente la déviation du point A de la droite LM. Pour déterminer cette longueur abaissons du point D la perpendiculaire DD' sur l'axe des abscisses et du point C érigons la perpendiculaire CP à l'axe des ordonnées; les segments $C\delta$, DD' seront les coordonnées du point D; donc, d'après les expressions pour x et y qu'on a déduites dans le § 8, on aura

$$C\delta = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{(\mu+s)\,s(2-s)}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}},$$

$$DD' = \frac{a}{2}(\lambda + 1 - s)\sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

En annulant dans la dernière de ces expressions la quantité $s=1-\cos\alpha$ et en remarquant que cela a lieu, lorsque les droites $B'B''$, $C'C''$ deviennent parallèles et le point D d'après le § 7 coïncide avec le point C, on trouve pour la détermination du segment OC la formule suivante:

$$OC=\frac{a}{2}(\lambda+1)\sqrt{\frac{\mu}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}}}=\frac{a}{2}\sqrt{2\lambda\mu}.$$

D'ailleurs, en unissant le point C avec D par la droite CD et le point A avec C par la droite AC, on conçoit que d'après l'égalité des segments (§ 7):

$$BC=AB=BD,$$

l'angle ACD est droit; donc, comme l'angle $\alpha C\delta$ est aussi, d'après la construction, un anglé droit, les triangles rectangles $AC\alpha$, $DC\delta$ sont semblables; par conséquent:

$$\frac{A\alpha}{AC}=\frac{D\delta}{CD},$$

ce qui nous donne

(8) $$A\alpha=D\delta\frac{AC}{CD}.$$

Mais $D\delta=DD'-D'\delta$ et $D'\delta=CO$; d'où, en introduisant les valeurs trouvées pour CO, DD', on déduit

$$D\delta=\frac{a}{2}(\lambda+1-s)\sqrt{\frac{\mu+s}{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s}}-\frac{a}{2}\sqrt{2\lambda\mu}$$

ou, ce qui revient au même:

$$D\delta=\frac{a}{2}\frac{(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}-\sqrt{\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)}}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s}}.$$

En multipliant ici le numérateur et le dénominateur par la somme

$$(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}+\sqrt{\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)},$$

on trouve

$$D\delta=\frac{a}{2}\frac{(\lambda+1-s)^2(\mu+s)-\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s}\left[(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}+\sqrt{\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)}\right]},$$

d'où, ouvrant les parenthèses du dénominateur, on obtient l'expression suivante:

$$D\delta=\frac{a}{2}\frac{s^3+(\mu-2\lambda-2)s^2+((\lambda+1)^2-2\mu)s}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s}\left[(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}+\sqrt{\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)}\right]}.$$

En introduisant dans les expressions pour les quantités auxiliaires λ et μ

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad \mu = \frac{4-(a+b)^2}{2ab}$$

les valeurs de a et b trouvées au § 7, on aperçoit que ces quantités s'expriment ainsi à l'aide de σ:

$$\lambda = 1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2};$$

$$\mu = 4 - \sigma + 2\sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2};$$

donc

$$\mu - 2\lambda - 2 = -\sigma,$$

(9)

$$(\lambda+1)^2 - 2\mu = \frac{3}{16}\sigma^2,$$

et l'expression trouvée pour $D\delta$ se transforme de la manière suivante:

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^3 - \sigma s^2 + \frac{3}{16}\sigma^2 s}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s}\left[(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s} + \sqrt{\mu((\lambda+1)^2 - 2\lambda s)}\right]}.$$

Pour passer au second facteur

$$\frac{AC}{CD}$$

de l'expression de $A\alpha$ donnée par la formule (8), on aperçoit que AC comme cathète du triangle rectangle ACD est égal à

$$\sqrt{AD^2 - CD^2};$$

donc

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{AD^2 - CD^2}}{CD} = \sqrt{\frac{AD^2}{CD^2} - 1}.$$

Mais d'après le § 7

$$AD = \frac{1}{2}l;$$

et d'après la construction

$$CD > C\delta,$$

où

$$C\delta = OD' = x,$$

Par conséquent, on trouve

$$\frac{AC}{CD} < \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 l^2}{x^2} - 1};$$

d'où en mettant pour x sa valeur trouvée dans le § 8, on aura

$$\frac{AC}{CD} < \sqrt{\frac{l^2\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)}{a^2(\mu+s)\,s\,(2-s)}}-1,$$

expression qu'on peut écrire de la manière suivante:

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)-s\,(\mu+s)\,(2-s)}}{\sqrt{s\,(\mu+s)\,(2-s)}}.$$

Mais d'après l'équation (6), qui détermine la longueur du pas l, l'expression

$$\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)-s\,(\mu+s)\,(2-s)$$

s'annule pour $s=\sigma$, ce qui suppose que cette expression est divisible par la différence $s-\sigma$. En ouvrant ici les parenthèses et en divisant par $s-\sigma$, on trouve le quotient:

$$s^2+(\mu+\sigma-2)\,s+(\mu+\sigma-2)\,\sigma-\frac{l^2}{a^2}-2\mu,$$

où d'après (9)

$$\mu+\sigma-2=2\lambda.$$

Par conséquent, on peut remplacer cette expression par le produit des deux facteurs suivants:

$$(\sigma-s)\left(2\mu-2\lambda\,\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda\,s-s^2\right),$$

donc l'inégalité déjà trouvée se transforme en celle qui suit:

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{(\sigma-s)\left(2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2\right)}}{\sqrt{s\,(\mu+s)\,(2-s)}}.$$

§ 10. La déviation $A\alpha$ du point A de la droite LM étant égale au produit

$$D\delta\cdot\frac{AC}{CD},$$

où

$$D\delta=\frac{a}{2}\,\frac{s^3-\sigma\,s^2+\frac{3}{16}\sigma^2 s}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s}\left[(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}+\sqrt{\mu\left((\lambda+1)^2-2\lambda s\right)}\right]}$$

et

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{(\sigma-s)\left(2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2\right)}}{\sqrt{s\,(\mu+s)\,(2-s)}}.$$

On voit que $A\alpha$ sera plus petit que le produit de ces deux expressions; mais ce produit peut être décomposé en deux facteurs suivants:

$$\frac{\left(s^2 - \sigma s + \frac{3}{16}\sigma^2\right)\sqrt{s(\sigma - s)}}{(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}},$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu + s)(2 - s)}}.$$

En s'arrêtant au premier de ces facteurs, on aperçoit que l'expression

$$\left(s^2 - \sigma s + \frac{3}{16}\sigma^2\right)\sqrt{s(\sigma - s)}$$

après être élevée au carré, donne

$$-\left[s^6 - 3\sigma s^5 + \frac{27}{8}\sigma^2 s^4 - \frac{14}{8}\sigma^3 s^3 + \frac{105}{256}\sigma^4 s^2 - \frac{9}{256}\sigma^5 s\right],$$

où le polynôme en parenthèses est égal au carré du polynôme

$$s^3 - \frac{3}{2}\sigma s^2 + \frac{9}{16}\sigma^2 s - \frac{1}{32}\sigma^3$$

moins

$$\frac{\sigma^6}{32^2},$$

donc cette expression peut être représentée comme il suit:

$$\sqrt{\frac{\sigma^6}{32^2} - \left(s^3 - \frac{3}{2}\sigma s^2 + \frac{9}{16}\sigma^2 s - \frac{1}{32}\sigma^3\right)^2}.$$

D'où l'on conclut que les valeurs numériques de cette expression ne surpassent pas la limite

$$\sqrt{\frac{\sigma^6}{32^2}} = \frac{\sigma^3}{32}.$$

D'ailleurs on aperçoit que le dénominateur du facteur considéré

$$(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}$$

est plus grand que la double valeur du plus petit des deux termes

$$(\lambda + 1 - s)\sqrt{\mu + s},\ \sqrt{\mu((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)},$$

par conséquent, ce dénominateur sera plus grand que la plus petite des deux quantités:

$$2(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s},\ 2\sqrt{\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)}.$$

Mais on a déjà remarqué que le numérateur du facteur considéré ne surpasse pas la limite

$$\frac{\sigma^3}{32},$$

donc ce facteur sera plus petit que la plus grande des fractions suivantes:

$$\frac{\frac{\sigma^3}{32}}{2(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}}=\frac{\sigma^3}{64(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}},$$

$$\frac{\frac{\sigma^3}{32}}{2\sqrt{\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)}}=\frac{\sigma^3}{64\sqrt{\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)}};$$

par conséquent, son produit par le second facteur

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)(2-s)}}$$

sera plus petit que le plus grand des produits:

$$\frac{\sigma^3}{64(\lambda+1-s)\sqrt{\mu+s}}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)(2-s)}},$$

$$\frac{\sigma^3}{64\sqrt{\mu((\lambda+1)^2-2\lambda s)}}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)(2-s)}},$$

qu'on peut réduire comme il suit:

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{\frac{2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{(\lambda+1-s)^2\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)^2(2-s)}},$$

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{\frac{2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{2\lambda\mu\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)^2(\mu+s)(2-s)}}.$$

Mais, comme s ne peut avoir que les valeurs entre $s=0$ et $s=\sigma$, la plus grande de ces deux quantités ne surpassera pas la limite

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{M},$$

où l'on a désigné par M la valeur maximale qu'atteignent les expressions

$$\frac{2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{(\lambda+1-s)^2\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)(\mu+s)^2(2-s)},$$

$$\frac{2\mu-2\lambda\sigma+\frac{l^2}{a^2}-2\lambda s-s^2}{2\lambda\mu\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}-s\right)^2(\mu+s)(2-s)}$$

pour les valeurs de s entre $s=0$ et $s=\sigma$; par conséquent, la quantité trouvée sera la limite pour les valeurs de $A\alpha$, déviation du point A de la droite LM, ce qu'il fallait démontrer.

§ 11. Pour donner un exemple de l'application des formules que nous avons déduites et pour montrer en même temps le grand degré de précision, avec laquelle le parallélogramme considéré fournit le mouvement rectiligne, posons

$$\sigma=1.$$

En faisant dans les formules (3) et (4) qui défiuissent a et b

$$\sigma=1,$$

on trouve

$$a=\frac{1}{\sqrt{\frac{335}{64}+7\sqrt{\frac{85}{64}}}}=0{,}30992;$$

$$b=\frac{1+\sqrt{\frac{35}{16}}}{\sqrt{\frac{335}{64}+7\sqrt{\frac{85}{64}}}}=0{,}76831.$$

En mettant ces valeurs par a et b dans les expressions (7) qui déterminent les valeurs des quantités auxiliaires λ et μ, on trouve

$$\lambda=\frac{0{,}76831}{0{,}30992}=2{,}47902,$$

$$\mu=\frac{4-(0{,}30992+0{,}76831)^2}{2.0{,}30992.0{,}76831}=5{,}95804.$$

Pour ces valeurs de λ, μ, a et pour $\sigma = 1$ la formule (6) qui définit la longueur du pas l donne

$$l = 0{,}30992 \sqrt{\frac{(5{,}95804 + 1).1.(2-1)}{\frac{(2{,}47902 + 1)^2}{2.2{,}47902} - 1}} = 0{,}68099.$$

Pour cette valeur de l les équations (5) nous donnent

$$BC = \frac{0{,}68099}{4} = 0{,}17025,$$

$$AB = \frac{0{,}68099}{4} = 0{,}17025,$$

$$BD = \frac{0{,}68099}{4} = 0{,}17025,$$

$$AD = \frac{0{,}68099}{2} = 0{,}34049.$$

Telles doivent être les dimensions des diverses pièces du parallélogramme que nous avons décrit, si l'on donne à la quantité σ la valeur 1.

La déviation du mouvement rectiligne dans ce parallélogramme d'après le § 8 sera plus petite que

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{M},$$

où M est la valeur maximale que peuvent atteindre les fractions

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2(\mu + s)^2\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)(2-s)},$$

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu(\mu + s)\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s\right)^2(2-s)}$$

pour s variant entre 0 et $\sigma = 1$.

En mettant dans les expressions de ces fractions les valeurs de σ, a, λ, μ, l et en s'arrêtant aux deux décimales, on trouve que les fractions considérées sont égales à

$$\frac{11{,}79 - 4{,}96\,s - s^2}{(3{,}48 - s)^2(5{,}96 + s)^2(2{,}44 - s)(2-s)},$$

$$\frac{11{,}79 - 4{,}96\,s - s^2}{29{,}54\,(5{,}96 + s)(2{,}44 - s)^2(2-s)}.$$

Ces fractions comme il n'est pas difficile d'aperçevoir vont en croissant de $s=0$ jusqu'à $s=1$; donc entre ces limites leurs valeurs maximales correspondent à $s=1$. En faisant

$$s=1,$$

on trouve que la première fraction s'approche de 0,0136 et la seconde fraction—de 0,0137. La dernière quantité, comme la plus grande, sera donc la valeur maximale que peuvent atteindre les fractions dans l'intervalle entre $s=0$ et $s=1$; par conséquent, d'après nos désignations

$$M=0{,}0137.$$

En mettant cette valeur de M avec les valeurs de σ, a dans la formule

$$\frac{a\sigma^3}{128}\sqrt{M},$$

on trouve que les déviations du mouvement parfaitement rectiligne dans le cas que nous avons examiné seront plus petites que

$$\frac{0{,}30992.1^3}{128}\sqrt{0{,}0137}=0{,}000283,$$

ce qui ne fait pas même 0,00042 de la longueur du pas $l=068099$, tandis que dans le parallélogramme de Watt qui fut l'objet des recherches de Prony (Annales des mines T. XII) les déviations surpassent 0,00060 de la longueur du pas *).

D'où l'on conçoit qu'un pareil parallélogramme comme effectuant immédiatement la transformation du mouvement rectiligne alternatif en mouvement circulaire continu peut suppléer dans les machines à vapeur aux parallélogrammes employés aujourd'hui ainsi qu'à la bielle avec la manivelle. Remarquons pour conclure que dans ce cas le rapport des vitesses se montre égal à celui que peut fournir seulement la manivelle de la longueur infiniment grande.

---

*) La limite de ces déviations diminue rapidement avec la diminution de σ. Ainsi pour $\sigma=\frac{4}{5}$, quand $a=0{,}29583$, $b=0{,}76415$, $l=0{,}59676$, cette limite est plus petite que 0,00014; pour $\sigma=\frac{2}{3}$, quand $a=0{,}28648$, $b=0{,}76175$, $l=0{,}58716$ cette limite est plus petite que 0,00007.

7.

DU RÉGULATEUR CENTRIFUGE.

(TRADUIT PAR G. C. SOUSLOF.)

О центробѣжномъ регуляторѣ.

Отчетъ и рѣчи, произнесенныя въ торжественномъ собраніи Императорскаго Московскаго Техническаго Училища 8-го сентября 1871 года.

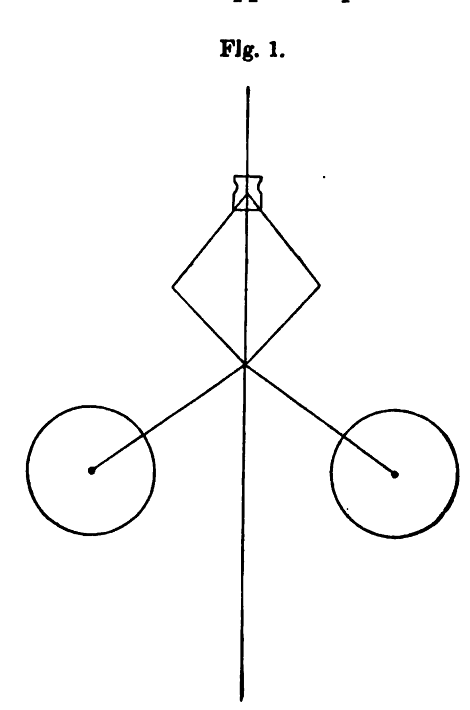
Du régulateur centrifuge.

---

§ 1. On connaît aujourd'hui plusieurs régulateurs centrifuges, dont la vitesse de rotation reste la même quelle que soit la position de la douille ou du manchon mobile. Mais cette propriété, si importante dans la pratique, n'est atteinte qu'en ajoutant de nouveaux organes au régulateur centrifuge de Watt au détriment de la simplicité de sa forme primitive. Certainement, l'un des moyens les plus simples de rendre isochrone un régulateur consiste à le munir d'un *ressort,* comme l'a fait Foucault pour son appareil; mais pour que l'isochronisme fût parfait dans ce cas, il faudrait que l'action du ressort suivît, invariablement et avec une rigueur absolue, une loi déterminée, condition qu'on ne saurait réaliser dans la pratique. Quant aux mécanismes qu'on a cherché de rendre isochrones sans l'aide d'un ressort, leur complication les exclut de tout emploi utile. Mais s'il est impossible de rendre le régulateur de Watt rigoureusement isochrone, en lui conservant sa forme primitive, il est, d'ailleurs, facile de remarquer que le degré de ses écarts de l'action des régulateurs parfaits dépend de la dimension et de la disposition de ses organes. Donc, avant de le compliquer dans le but de le rendre plus isochrone (l'isochronisme absolu n'étant pas réalisable en pratique) il est nécessaire de déterminer le plus grand degré d'approximation à l'isochronisme parfait que peut atteindre le régulateur centrifuge sous sa forme la plus simple. Les recherches du genre de celle que nous venons d'indiquer se réduisent à une question d'analyse semblable à celle qui se présente dans le problème de déterminer la forme la plus avantageuse du *parallélogramme de Watt,* et elles établissent, comme on va le voir, qu'en donnant des dimensions et des dispositions convenables aux différents organes du régulateur de Watt on s'approche de l'isochronisme parfait en tel

degré, qu'il est superflu de compliquer encore le mécanisme pour atteindre ce but définitivement. En effet, le degré d'approximation à l'isochronisme absolu pour le régulateur de Watt peut être poussé si loin qu'il est douteux qu'on puisse obtenir des résultats plus satisfaisants en construisant réellement même des appareils parfaitement isochrones.

Fig. 1.



§ 2. En considérant le régulateur centrifuge de Watt (fig. 1), nous supposerons que les tiges portant des sphères oscillantes sont prolongées au delà de leur point d'attache à l'axe vertical du régulateur, et qu'elles sont articulées par leurs bouts sur les bras qui soutiennent le manchon mobile, comme cela se fait souvent dans la pratique. Pour plus de généralité nous ne nous bornerons pas au cas où les tiges sont droites, mais nous les supposerons brisées et formant un certain angle ψ. Nous désignerons pour plus de brièveté par l'expression: *première partie* de la tige, sa partie supérieure et nous prendrons sa longueur pour *unité*. La partie inférieure de la tige depuis le point d'attache à l'axe du régulateur jusqu'au centre de la sphère oscillante sera désignée par l'expression: *seconde partie* de la tige, et sa longueur sera r. Nous noterons ω la vitesse angulaire de rotation, en général, et sa valeur normale dite de régime par ω_0. L'angle d'inclinaison de la première partie de la tige sur l'axe vertical du régulateur pour sa vitesse de rotation normale ω_0 sera désigné par φ, et sa valeur pour toute autre vitesse ω sera $\varphi + \alpha$, de façon que α sera la mesure de la variation de cet angle pour tout écart de la vitesse ω de sa valeur de régime ω_0.

Si l'on forme d'après le principe des vitesses virtuelles l'équation d'équilibre entre la force de gravité, agissant constamment sur le manchon mobile et sur les sphères oscillantes, et la force centrifuge développée par leur rotation avec la vitesse ω, on obtient l'équation que voici:

$$P\left[1+\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sqrt{m^2-\sin^2(\varphi+\alpha)}}\right]\sin(\varphi+\alpha)=2r\left[1+\frac{\omega^2}{g}r\cos(\psi-\varphi-\alpha)\right]\sin(\psi-\varphi-\alpha),$$

où l'on a pris pour unité de poids celui d'une des sphères oscillantes et où P est le poids du manchon, m étant la longueur des bras.

En tirant de cette équation la valeur de ω^2, on trouve:

$$\omega^2 = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi+\alpha)}}\right] \sin(\varphi+\alpha) P - 2r \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{2\frac{r^2}{g} \sin(\psi - \varphi - \alpha)\cos(\psi - \varphi - \alpha)},$$

En divisant par ω_0^2, on aura

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi+\alpha)}}\right] \sin(\varphi+\alpha) - \frac{2r}{P}\sin(\psi - \varphi - \alpha)}{\frac{\omega_0^2 r^2}{Pg}\sin 2(\psi - \varphi - \alpha)},$$

ou bien

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi+\alpha)}}\right] \sin(\varphi+\alpha) - A\sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B\sin 2(\psi - \varphi - \alpha)},$$

en posant

(1) $$\frac{2r}{P} = A, \quad \frac{\omega_0^2 r^2}{Pg} = B.$$

Or, comme par hypothèse

$$\alpha = 0$$

pour

$$\omega = \omega_0,$$

il est clair que la fonction

(2) $$\frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi+\alpha)}}\right] \sin(\varphi+\alpha) - A\sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B\sin 2(\psi - \varphi - \alpha)}$$

deviendra 1 pour $\alpha = 0$.

Mais l'isochronisme parfait du régulateur n'est atteint, comme on a vu, qu'à la condition que la vitesse angulaire ω conserve toujours sa valeur ω_0 quelle que soit la position du manchon mobile et, par conséquent, quelle que soit la valeur de l'angle α qui détermine cette position; la fonction (2) devient alors nécessairement égale à l'unité. Or, quoique cette fonction ne satisfasse rigoureusement à cette condition pour aucune valeur des constantes

$$A,\ B,\ m,\ \psi,\ \varphi,$$

qui entrent dans son expression, néanmoins, par un choix convenable de ces valeurs ses écarts de l'unité peuvent être rendus très petits pour toutes les valeurs de α usitées en pratique. Par conséquent, le régulateur centrifuge, dont les paramètres A, B, m, ψ et φ auront ces valeurs, différera très peu d'un régulateur rigoureusement isochrone.

§ 3. Quand on détermine les paramètres d'une fonction donnée de façon à rendre minima ses écarts d'une valeur constante quelconque pour toutes les valeurs possibles que puisse prendre, entre certaines limites, la variable indépendante, il faut distinguer deux cas: 1° quand ces limites sont infiniment rapprochées entre elles; 2° quand leur différence est une quantité finie, plus ou moins considérable. Les valeurs des paramètres, obtenues dans la première hypothèse, comme nous l'avons fait voir dans notre mémoire intitulé: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* *) offrent une première approximation et permettent d'obtenir facilement leurs valeurs plus exactes, dans la seconde hypothèse, par une méthode exposée dans ce mémoire.

En nous arrêtant au premier cas, où les limites de α sont infiniment rapprochées et, par conséquent, diffèrent peu de zéro, nous remarquerons que le degré d'approximation de l'expression

$$\frac{\left[1+\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sqrt{m^2-\sin^2(\varphi+\alpha)}}\right]\sin(\varphi+\alpha)-A\sin(\psi-\varphi-\alpha)}{B\sin 2(\psi-\varphi-\alpha)}$$

à l'unité est déterminé par la plus petite puissance de α dans le développement de la différence:

$$\frac{\left[1+\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sqrt{m^2-\sin^2(\varphi+\alpha)}}\right]\sin(\varphi+\alpha)-A\sin(\psi-\varphi-\alpha)}{B\sin 2(\psi-\varphi-\alpha)}-1$$

suivant les puissances ascendantes de α.

En développant cette différence en série suivant les puissances de α et en égalant à zéro les coéfficients de

$$\alpha^0,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,$$

on obtient cinq équations qui devront être satisfaites pour que la plus petite puissance de α dans ce développement soit 5, ce qui est l'approximation maximum de la fonction (2) de l'unité, car ces cinq équations nous donneront les valeurs de tous les cinq paramètres qui entrent dans l'expression de cette fonction.

La solution des équations ainsi obtenues nous a fourni les valeurs suivantes pour A, B, m, ψ, φ, à savoir:

$$A = 0{,}84713,$$
$$B = 0{,}65616,$$

*) T. I, pag. 111 — 143.

$$m = 1,31271,$$
$$\psi = 119°10',$$
$$\varphi = 58°46'.$$

En mettant ces valeurs dans la formule (2), nous obtenons une expression qui ne différera de l'unité que par des termes contenant α à la cinquième puissance et à des puissances supérieures à 5; donc cette fonction pour les valeurs de α peu sensibles (comme c'est toujours le cas en pratique) restera toujours peu différente de l'unité. En effet, si l'on calcule la valeur de la dite expression pour différents α, on trouve que la différence entre la fonction (2) et l'unité n'atteint la valeur de 0,001 que pour $\alpha = 14°40'$ et ne s'abaisse jusqu'à $-0,001$ que pour $\alpha = -13°50'$, tandis qu'à mesure que la valeur numérique de α devient plus petite, cette différence diminue très rapidement, c'est-à-dire à peu près comme la cinquième puissance de α.

D'autre part, en calculant *) l'élévation du manchon pour

$$\alpha = 14°40', \quad \alpha = -13°50',$$

on trouve qu'il s'élève de 0,62 de la longueur de la première partie du bras, que nous avons prise pour unité, pendant que α varie de $14°40'$ jusqu'à $-13°50'$. Mais au fur et à mesure que ces valeurs limites de α se rapprochent, la hauteur de l'élévation du manchon diminuera presque proportionnellement à la première puissance de α, comme on peut le montrer par des calculs. Il en résulte que si l'on donne aux différentes parties du régulateur de Watt les dimensions et les dispositions pour lesquelles le rapport $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ devient égal à l'expression trouvée, on rendra ce mécanisme très peu différent d'un régulateur parfaitement isochrone, car dans ce cas, comme on vient de le voir, le rapport $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ restera toujours entre $1+0,001$ et $1-0,001$ pour toutes les positions du manchon sur la longueur de 0,62, et par suite la différence $\omega - \omega_0$ sera comprise entre $\frac{\omega_0}{2000}$ et $-\frac{\omega_0}{2000}$. Mais si l'on diminue la portée des déplacements du manchon de 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 de sa valeur première, les limites de la différence $\omega - \omega_0$ diminueront proportionnellement à

$$0,9^5;\ 0,8^5;\ 0,7^5;\ 0,6^5,$$

donc elles seront réduites aux valeurs:

$$\pm 0,00029\omega_0;\ \pm 0,00016\omega_0;\ \pm 0,00008\omega_0;\ \pm 0,00004\omega_0.$$

§ 4. Quoique les limites trouvées pour les écarts de la vitesse angulaire ω de sa valeur de régime ω_0 soient assez rapprochées, néanmoins on

*) Par l'expression $\cos(\varphi + \alpha) + \sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}$.

8

peut encore les restreindre et même considérablement. Ces limites, comme on vient de voir, correspondent au cas, où l'on détermine les paramètres qui entrent dans l'expression (2), en supposant que la variable α est infiniment petite. Quand on passe du cas, où α reste infiniment petit, à celui, où α diffère de zéro par une quantité finie, mais peu sensible, on est en état, à l'aide des méthodes exposées par nous dans le mémoire mentionné, de rendre ces limites $2^4 = 16$ fois plus petites. Mais comme les valeurs trouvées pour les quantités A, B, m, ψ, φ fournissent l'approximation tout-à-fait suffisante pour la pratique, nous ne nous arrêterons pas à l'évaluation des paramètres qui donnent l'approximation encore plus grande. Remarquons seulement, que pour les valeurs de

$$A,\ B,\ m,\ \psi,\ \varphi,$$

ainsi trouvées, la différence

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}}\right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)} - 1$$

s'annule pour cinq valeurs différentes de α; par conséquent, cinq positions différentes du manchon mobile correspondront à une même vitesse angulaire ω_0. Quant aux valeurs des paramètres

$$A,\ B,\ m,\ \varphi,\ \psi,$$

pour lesquelles à chaque vitesse angulaire ne correspond qu'une seule position du manchon, on peut les trouver par la méthode exposée par nous dans le mémoire mentionné, seulement on doit ici au *polynôme qui diffère de zéro le moins possible sans restrictions* suppléer le *polynôme qui diffère de zéro le moins possible en croissant continuellement, ou en décroissant.* Si l'on détermine les différents polynômes qui satisfont à cette condition, on trouve que celui qui est nécessaire pour le cas présent peut être représenté par la formule:

$$\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2}\right)^5 - \frac{5(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{18}\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2}\right)^3 + \frac{5(\alpha_1 - \alpha_0)^4}{144}\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2}\right),$$

où l'on a désigné par α_1, α_2 les limites des valeurs de la variable α pour lesquelles le polynôme inconnu

$$\alpha^5 + a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha + e,$$

diffère de zéro le moins possible en continuant toujours à croître ou à décroître; à l'aide de ce polynôme les limites qu'on a trouvées dans le § 3 pour des écarts de l'expression (2) de l'unité, peuvent être diminuées dans le rapport 4 : 9.

§ 5. En se bornant à la première approximation, on aura d'après le § 3:

$$A = 0{,}84713,$$
$$B = 0{,}65616,$$
$$m = 1{,}31271,$$
$$\psi = 119°10',$$
$$\varphi = \ \ 58°46',$$

où d'après (1)

(3) $$A = \frac{2r}{P}, \quad B = \frac{\omega_0^2 r^2}{Pg}.$$

De ces équations on tire

$$r = \frac{2B}{A} \cdot \frac{g}{\omega_0^2}; \quad P = \frac{4B}{A^2} \frac{g}{\omega_0^2};$$

en mettant pour A et B les valeurs trouvées, on obtient:

$$r = 1{,}54906 \frac{g}{\omega_0^2}; \quad P = 3{,}65719 \frac{g}{\omega_0^2}.$$

Nous avons ainsi tout ce qu'il faut pour déterminer les dimensions de toutes les pièces du régulateur.

Supposons, par exemple

$$\frac{\omega_0^2}{g} = 0{,}9,$$

les formules ci-dessus nous donnent

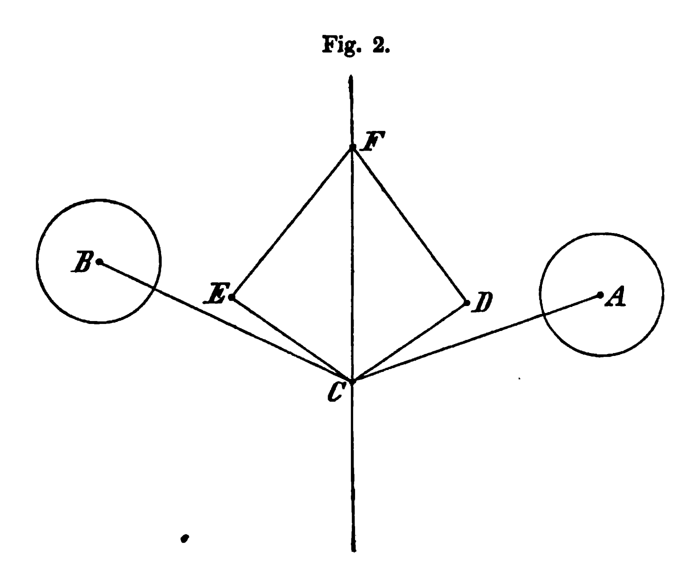
$$r = 1{,}72115; \quad P = 4{,}06355.$$

Si l'on fait une épure du régulateur centrifuge conformément aux valeurs trouvées r, m, ψ, on apercevra que cet appareil aura la forme représentée sur la fig. 2, où CD et CE sont ce que nous avons nommé les premières parties des tiges; leur longueur est prise pour unité (§ 2); AC et BC sont les secondes parties des tiges, dont la longueur r est égale pour notre exemple à 1,72115; DF, EF sont les bras soutenant la douille F; leur longueur est constamment égale à 1,31271; les angles ACE, BCD formés pas les premières et les secondes parties des tiges ont chacun 119°10'. Quant aux angles FCD, ECF qui mesurent l'inclinaison des premières parties des tiges sur l'axe du régulateur, ils auront chacun 58°46' pour la vitesse normale de rotation du mécanisme.

Le régulateur centrifuge ainsi composé aura ses tiges dirigées en haut, comme cela se voit sur la figure 2; les centres de ses sphères oscillantes se

trouveront élevés au dessus des points d'attache des tiges à l'axe du régulateur. En outre ce mécanisme se distinguera du régulateur de Watt dans sa forme habituelle par le poids P de la douille qui sera toujours plus considérable que celui des sphères oscillantes. Ainsi dans notre exemple $P=4,06355$; donc le manchon sera plus de 4 fois plus lourd qu'une sphère.

Fig. 2.

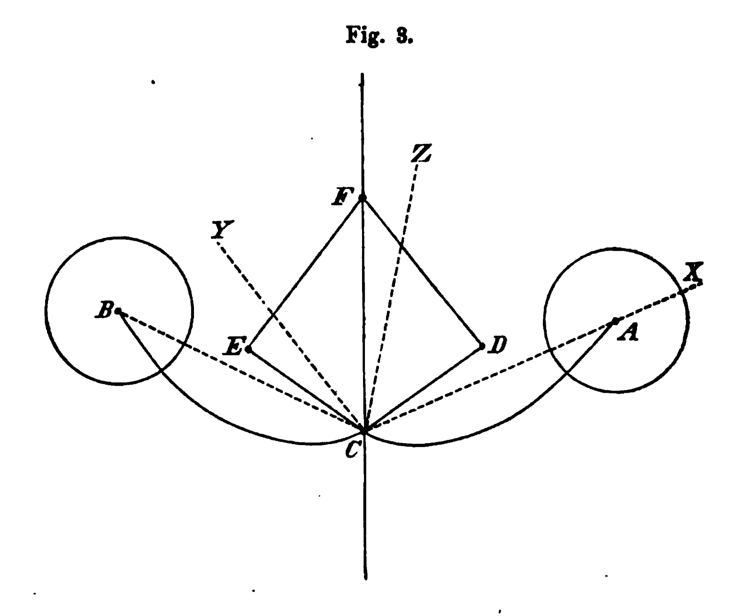


Remarquons encore que les secondes parties des tiges doivent être recourbées (comme cela est indiqué sur la figure 3) pour que leur mouvement n'entrave pas le jeu des premières parties des tiges. En recourbant ainsi les tiges il faut observer que les centres des sphères doivent être rigoureusement à la distance r du point C et que l'angle entre les premières et les secondes parties des tiges doit être égal à 119°10′.

§ 6. Jusqu'à présent nous n'avons pas examiné l'action des masses des tiges et des bras, comme c'est toujours l'usage dans la théorie des régulateurs centrifuges; mais, ayant en vue un si grand degré d'approximation à l'isochronisme, nous ne pouvons pas nous dispenser de considérer l'influence de ces parties du mécanisme. En introduisant dans l'équation de l'équilibre l'action de la pesanteur et de la force centrifuge sur les particules des tiges et des bras, on trouve pour le rapport $\frac{\omega^2}{\omega^2_0}$ une expression qu'on peut mettre sous la forme (2) du § 2, si seulement la distribution des masses dans les tiges et les bras satisfait à une certaine condition. Il n'est pas difficile de donner à cette condition une expression analytique tout-à-fait rigoureuse, mais pour les besoins de la pratique, à cause de cette circonstance que les masses des tiges et des bras sont peu sensibles relativement à celles des sphères oscillantes, elle peut être exprimée avec la précision suffisante comme il suit:

«Si l'on donne au bras EF (fig. 3) séparé du manchon F une telle direction que la projection de son bout F sur le plan du régulateur *) coïncide

Fig. 3.



avec le point C, il faut que le moment d'inertie de la tige entière ACE avec le bras EF qui y est attaché soit le même relativement aux deux plans qui sont perpendiculaires au plan du régulateur et qui font avec la droite AC au point A les angles égaux chacun à $\frac{\pi}{4}$».

Quand chacune des deux tiges avec le bras qui y est attaché satisfait à la condition exposée et quand leurs masses sont peu sensibles relativement à celles des sphères oscillantes, on peut mettre l'expression pour le rapport $\frac{\omega^2}{\omega^2_0}$ sous la forme (2) avec la précision tout-à-fait suffisante pour la pratique, si l'on pose:

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi = \angle\, ACE + \arcsin \dfrac{2(p+p_1)Y}{AP}; \\[2ex] A = \dfrac{2r + 2(p+p_1)X}{P + \frac{2\rho}{m}\, p_1}; \\[2ex] B = \dfrac{\omega_0^2}{g} \cdot \dfrac{r^2 + (p+p_1)\ (\eta^2 - \zeta^2)}{P + \frac{2\rho}{m}\, p_1}; \end{cases}$$

où p est le poids d'une tige; p_1 — celui d'un bras; ρ est la distance entre le centre de gravité d'un bras et son point d'attache au manchon; X et Y

*) Le plan qui passe par l'axe du régulateur et par les centres des sphères oscillantes s'appelle le plan du regulateur.

sont les coordonnées du centre de gravité; ζ, η — les bras d'inertie *) relativement aux plans yz, zx d'une tige avec le bras correspondant, quand celui-ci a pris la direction indiquée. On prend pour l'axe des x la droite AC; l'axe des y est une droite perpendiculaire à la première et située sur le plan du régulateur; l'axe des z est perpendiculaire à ce dernier plan (fig. 3).

Par r on a désigné la distance entre le centre A et le point C. L'angle ACE mesure l'inclinaison de ce segment sur la première partie de la tige ACE. Ainsi, après avoir considéré l'action des masses des tiges et des bras, on peut mettre l'expression pour la quantité $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ sous la forme précédente (2) et l'on construira un régulateur qui même sous l'action de ces masses différera très peu d'un appareil rigoureusement isochrone, si l'on donne aux paramètres

$$A, \; B, \; m, \; \psi, \; \varphi,$$

les valeurs trouvées au § 2. En mettant ces valeurs pour A, B, ψ dans les formules (4), on aura les trois équations suivantes:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \angle ACE + \arcsin \frac{2(p+p_1)Y}{0{,}84713\,P} = 119°10' \\ & \frac{2r + 2(p+p_1)X}{P + \frac{2\rho}{m} p_1} = 0{,}84713, \\ & \frac{\omega_0^2}{g} \cdot \frac{r^2 + (p+p_1)(\eta^2 - \zeta^2)}{P + \frac{2\rho}{m} p_1} = 0{,}65616, \end{aligned} \right.$$

qui remplaceront celles du § 5. Quant aux quantités m et φ, elles resteront les mêmes.

§ 7. Pour donner un exemple et pour montrer, comment on doit faire l'application des formules déduites, supposons qu'on a besoin de construire un régulateur centrifuge, pour lequel

$$\frac{\omega_0^2}{g} = 0{,}9.$$

Nous avons pris partout pour unité des longueurs celle de la première partie de la tige; donc g, l'accélération de la pesanteur, sera un nombre plus ou moins grand dépendant de la longueur du segment pris pour unité. Par conséquent, on peut toujours choisir la longueur de ce segment de manière que le rapport

$$\frac{\omega_0^2}{g}$$

---

*) C'est à dire les quantités $\sqrt{\frac{x_1^2 M_1 + x_2^2 M_1 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots}}$, $\sqrt{\frac{y_1^2 M_1 + y_2^2 M_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots}}$; où l'on a désigné par M_1, M_2;... les masses des particules de la tige avec le bras correspondant et par $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ les coordonnées des particules $M_1, M_2, \dots$

prendra la valeur 0,9 indépendamment des valeurs que prennent la vitesse angulaire ω_0 et l'accélération g.

En commençant l'évaluation des diverses parties du régulateur, nous négligeons d'abord, dans la première approximation, l'influence des masses des tiges et des bras; donc dans les formules (5) on peut poser

$$p = 0, \quad p_1 = 0.$$

Or pour ces valeurs de p, de p_1 et pour $\frac{\omega_0^2}{g} = 0,9$ des expressions (5) on tire les résultats suivants:

$$\angle\ ACE = 119°10',$$

$$\frac{2r}{P} = 0,84713,$$

$$0,9 \cdot \frac{r^2}{P} = 0,65616.$$

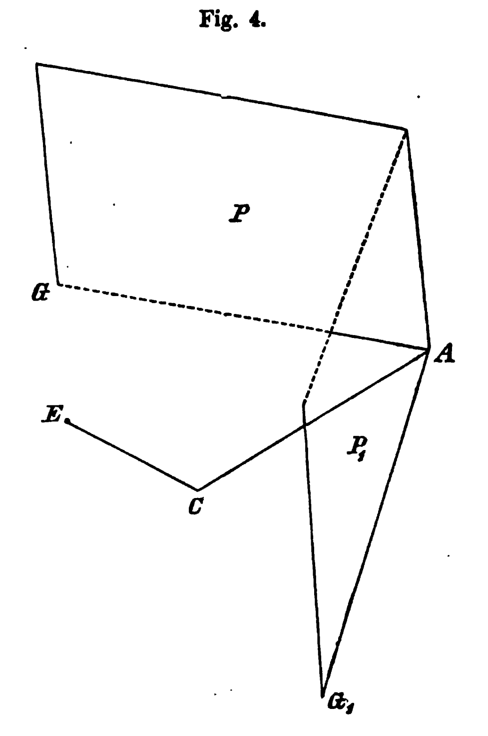
La solution des deux dernières équations nous donne:

$$P = 4,063,$$

$$r = 1,721.$$

P est le poids de la douille, si l'on a pris pour unité des poids celui d'une sphère oscillante; par r est désignée la distance entre le centre de la sphère et le point d'attache de la tige à l'axe du régulateur.

Fig. 4.



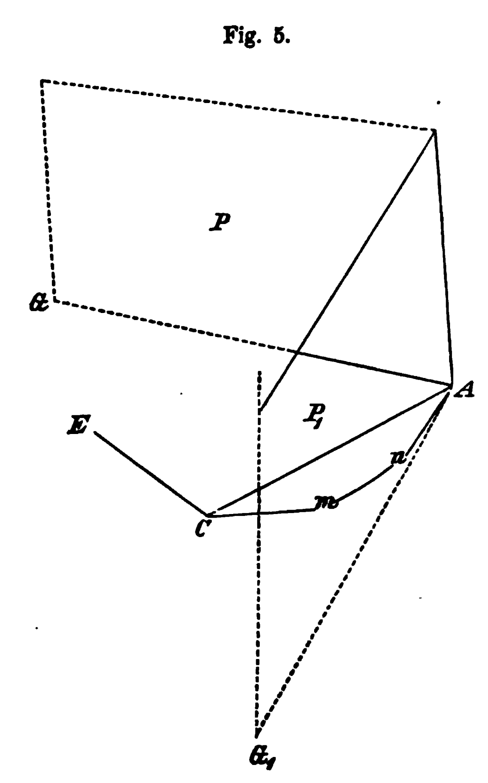
Pour évaluer ces quantités plus exactement, cherchons la position approximative du centre de la sphère relativement à la première partie de la tige, position qui correspond aux valeurs déjà trouvées pour r et pour l'angle ECA. Prenons donc une droite quelconque EC pour la première partie de la tige et sa longueur pour unité; menons (fig. 4) une droite AC inclinée sur celle-ci sous l'angle $ACE = 119°10'$ et faisons

$$AC = r = 1,721.$$

Le point A sera la position du centre de la sphère dans la première approximation; le point C indiquera la position du point d'attache de la tige

à l'axe du régulateur, et toute la ligne brisée ACE sera située au plan du régulateur. En menant du point A les deux droites AG, AG_1 qui font avec la droite AC les angles CAG, CAG_1, ayant chacun 45°, et en construisant sur ces droites les deux plans P, P_1, perpendiculaires au plan du régulateur, on trouve les deux plans du § 6: relativement à ces plans doivent être égaux les moments d'inertie de la tige avec le bras qui y est attaché et qui a pris une telle direction que la projection de son bout libre sur le plan du régulateur coïncide avec le point C. Ainsi tout le bras sera situé, évidemment, plus près du plan P que du plan P_1, et la même chose aura lieu pour EC, la première partie de la tige. Donc l'égalité déjà mentionnée des moments ne peut subsister qu'au cas où il y a sur la seconde partie de la tige des points situés plus près du plan P_1 que du plan P; mais alors cette partie de la tige doit être menée en bas au delà de la droite AC, car, les angles CAG et CAG_1 étant égaux, tous les points de cette droite sont équidistants des plans P et P_1. D'où il est clair que la courbure des tiges (fig. 3), qui leur donne la possibilité de se mouvoir librement, est en même temps nécessaire pour qu'on puisse satisfaire à la dite condition de l'égalité des moments tout en laissant droits les bras et les premières parties des tiges.

Fig. 5.



Au fur et à mesure que les points de la seconde partie de la tige s'abaissent au delà de la droite AC la différence de leurs moments d'inertie relativement aux plans P et P_1 augmente constamment, donc après quelques tâtonnements successifs il ne sera pas difficile de donner à ces points une telle position que l'égalité pour les moments d'inertie de toute la tige avec le bras soit atteinte. Evidemment, nous pouvons arriver à ce but en donnant à la tige des formes différentes. Ainsi, en supposant que le fil central de la tige (fig. 5) consiste en deux droites Cm, An, unies par l'arc mn du cercle qui les touche, et en laissant droites les premières parties des tiges avec les bras, nous avons trouvé que lorsque les sphères oscillantes ont au diamètre 0,8, l'égalité des moments est assurée, si l'on a observé les conditions suivantes:

1) L'angle $E\dot{C}m$ que font au point C les fils centraux de la première et de la seconde partie de la tige a 198°; la longueur du fil droit Cm est égale à 0,5; le rayon de l'arc mn est égal à 0,6.

2) La seconde partie de la tige $CmnA$, là où elle reste droite, doit avoir la largeur égale à une certaine quantité constante λ. Mais la largeur de la partie recourbée de la tige va en croissant du commencement de la courbure jusqu'au milieu où cette largeur devient égale à $\frac{5}{4}\lambda$; après quoi elle commence à décroître et à la fin de la courbure revient à sa valeur première λ. La loi de la variation qu'éprouve la largeur de cette partie de la tige est telle que les fils extérieurs sont représentés par le arcs des cercles.

3) La largeur de la première partie de la tige près du point C est égale à λ; mais dans la direction vers le bout E cette largeur diminue uniformément et au point E devient égale à $\frac{3}{4}\lambda$.

4) Sur toute l'étendue de la tige l'épaisseur reste constamment égale à une quantité quelconque μ.

5) La surface des sections des bras reste sur toute leur étendue égale à $0,52\lambda\mu$.

6) La charnière qui sert à joindre la tige au bras (par cette expression on désigne tout ce qui est situé à l'endroit où la tige et le bras se touchent, et qui surpasse les limites prescrites pour la longueur, la largeur, l'épaisseur des tiges ou la surface de leurs sections) renferme $0,13\lambda\mu$ de nos unités cubiques.

Quand nous avons parlé de la figure du fil central $CnmA$ de la seconde partie de la tige, nous n'avons rien dit de la longueur de l'arc mn et du segment nA, parce que la longueur de ces lignes est définie par cette circonstance que la droite An représente une tangente à l'arc mn, menée du point A. Quant aux cercles qui définissent la figure des fils extérieurs de la partie recourbée de la tige on peut les déterminer facilement, si l'on connaît la largeur de cette partie à ses deux bouts et au milieu, comme nous le montrerons plus loin (§ 9).

Remarquons encore que les proéminences et les échancrures des tiges près de C, leur point d'attache à l'axe du régulateur, n'influencent pas considérablement l'égalité des moments, dont nous nous occupons, car en cet endroit pour chaque point la différence des distances aux plans P et P_1 est peu sensible. On peut dire la même chose de ce bout du bras qui est articulé avec la douille, parce que l'égalité des moments ne doit subsister qu'au cas où la projection du bout considéré sur le plan de la figure coïncide avec le point C, ce qui suppose l'égalité de ses distances aux plans P et P_1.

§ 8. Si l'on s'arrête au cas, où les tiges, les bras et les charnières qui les joignent sont construits conformément à ce qui était dit, et si l'on évalue

dans cette hypothèse les quantités p, p_1, Y, ζ, η, ρ qui entrent dans les formules (5), on trouve

$$p = 13{,}8\lambda\mu,\quad X = 0{,}292,$$

$$p_1 = 2{,}5\lambda\mu,\quad Y = 0{,}205,$$

$$\eta^2 - \zeta^2 = 0{,}044,\ \rho = \frac{m}{2}.$$

Ici l'on a pris pour unité des poids celui de la sphère oscillante; dans le cas considéré, cette sphère a, comme nous l'avons vu, le diamètre égal à 0,8 et, par hypothèse, est faite de la même matière que les tiges, les bras et les charnières.

En mettant les valeurs trouvées dans les expressions (5) et en substituant au rapport $\frac{\omega_0^2}{g}$ sa valeur 0,9, on a les équations suivantes qui déterminent r, P et l'angle ACE:

$$(6)\qquad \frac{2r + 9{,}6\,\lambda\mu}{P + 2{,}5\,\lambda\mu} = 0{,}84713,$$

$$0{,}9 \cdot \frac{r^2 + 0{,}72\,\lambda\mu}{P + 2{,}5\,\lambda\mu} = 0{,}65616,$$

$$(7)\qquad \angle ACE + arc\cdot sin\,\frac{6{,}7\,\lambda\mu}{0{,}84713\,P} = 119°10'.$$

En divisant la première de ces équations par la seconde, on obtient:

$$\frac{2r + 9{,}6\,\lambda\mu}{(r^2 + 0{,}72\,\lambda\mu)\cdot 0{,}9} = \frac{0{,}84713}{0{,}65616},$$

ce qui donne l'équation suivante pour r:

$$r^2 - 1{,}72124\,r = 7{,}5\,\lambda\mu;$$

d'où il suit

$$r = 0{,}86062 + \sqrt{0{,}86062^2 + 7{,}5\,\lambda\mu}.$$

Si l'on développe cette expression en série et si l'on s'arrête au premier degré de $\lambda\mu$, on trouve

$$(8)\qquad r = 1{,}7212 + 4{,}4\,\lambda\mu.$$

Pour passer à l'évaluation de P nous remarquons que l'équation (6) nous donne:

$$P + 2{,}5\,\lambda\mu = \frac{2r}{0{,}84713} + \frac{9{,}6\,\lambda\mu}{0{,}84713};$$

si l'on y met pour r sa valeur, trouvée plus haut, on en déduit

$$P = 4{,}0636 + 19\lambda\mu. \tag{9}$$

Ayant évalué la quantité P, nous tirerons de l'équation (7) la valeur de l'angle ACE; enfin, connaissant cet angle et le segment $AC = r$, nous trouverons la position du point A, centre de la sphère oscillante.

Ainsi, avec la précision suffisante pour la pratique, se détermineront la tige et le poids du manchon. Quant aux bras, leur longueur m, comme on l'a vu (§ 5), reste toujours égale à 1,31271; la surface de leurs sections, par hypothèse, ne varie pas sur toute l'étendue des bras et reste égale à $0{,}52\lambda\mu$. Mais, évidemment, on ne changera rien dans les conditions de l'équilibre, si l'on considère les particules de la douille qui avoisinent le bras comme n'appartenant pas à celle-ci, mais au bout du bras qui y est attaché. De la même manière on peut attribuer à l'autre bout du bras une partie des masses, qui sont destinées à former le joint, articulant le bras avec la tige.

D'ailleurs, il n'est pas difficile de remarquer que, grâce à cette circonstance que les bras ont une masse peu sensible, les changements dans la distribution de la matière sur leur étendue n'influencent pas considérablement le mouvement du régulateur, si seulement le centre de gravité des bras conserve sa première position. D'où il suit, que dans la construction des régulateurs il n'est pas indispensable d'observer strictement notre supposition relativement aux sections des bras: on peut augmenter la masse des bras aux frais de celle du manchon et des charnières.

§ 9. Pour donner un exemple de l'application des formules trouvées plus haut, posons que les quantités λ, μ qui déterminent d'aprés § 8 la largeur et l'épasseur de la tige, ont la valeur suivante:

$$\lambda = 0{,}16; \quad \mu = 0{,}12.$$

En mettant ces valeurs dans les expressions (8) et (9), on trouve

$$r = 1{,}7212 + 4{,}4 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}12 = 1{,}8057;$$
$$P = 4{,}0636 + 19 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}12 = 4{,}4283.$$

Si l'on introduit ces valeurs pour P, λ, μ dans l'équation (7), on obtient:

$$\angle ACE + arc \cdot sin \frac{6{,}7 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}12}{0{,}84715 \cdot 4{,}4283} = 119°10';$$

d'où, en remarquant que

$$arc \cdot sin \frac{6{,}78 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}12}{0{,}84715 \cdot 4{,}4283} = arc \cdot sin\ 0{,}0345 = 1°58',$$

on déduit

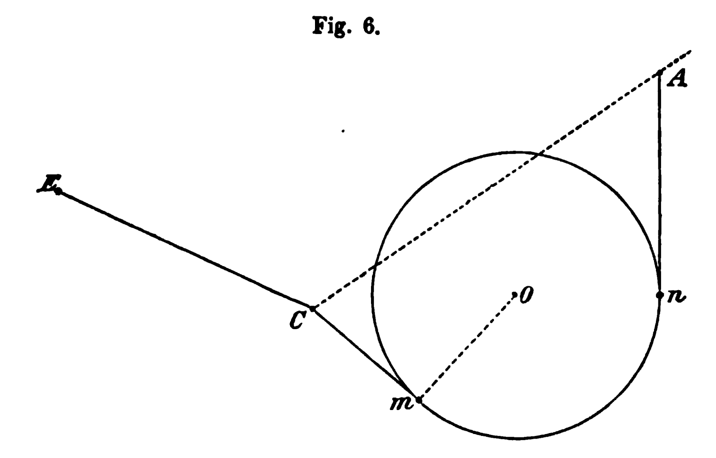
$$\angle ACE + 1°58' = 119°10',$$

ce qui nous donne

$$\angle ACE = 119°10' - 1°58' = 117°12'.$$

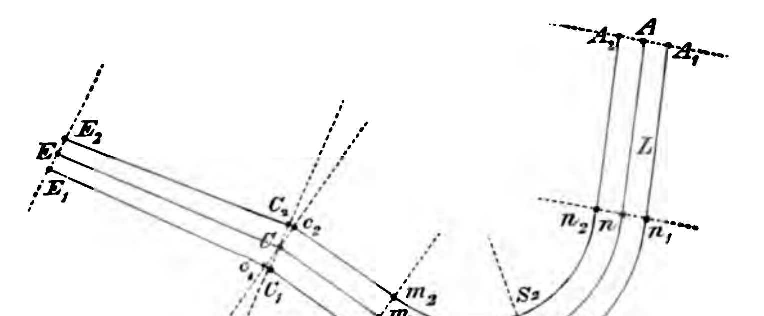
Pour commencer l'évaluation des différentes parties de la tige nous choisissons, d'après ce qu'on a dit au § 7, la longueur de la première partie de la tige et traçons la droite *EC* (fig. 6) ayant cette longueur. En prenant

Fig. 6.



EC pour unité, menons par le point *C* sous l'angle *ECm*, ayant 198°, la droite *Cm* égale à 0,5. Au bout de ce segment au point *m* érigeons la perpendiculaire *m*0 et faisons la égale à 0,6; d'après ce qu'on a dit au § 8, le point 0 sera le centre du cercle dont l'arc représente la partie recourbée du fil central de la tige. D'ailleurs, si du point *C* on mène la droite *AC*

Fig. 7.



inclinée sur la droite *CE* sous l'angle 117°12′ et si l'on fait $AC = r = 1{,}8057$, on trouvera le point *A*, position du centre de la sphère oscillante; la tangente *An* du cercle 0, menée du point *A*, détermine le point *n*, bout de la partie recourbée du fil et commencement de la dernière partie droite *nA*. Ainsi se déterminera le fil central de la tige tout entière.

Pour passer à la construction des fils extérieurs, menons (fig. 7) les normales au fil central $ECmnA$ par les points E, C, m, n, A et par le point S, milieu de l'arc mn. Sur ces normales, de l'un et de l'autre côté du fil central, prenons des segments égaux à la moitié de la largeur de la tige dans l'endroit considéré (§ 7), en faisant

$$EE_1 = EE_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \lambda = 0{,}06,$$
$$CC_1 = CC_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0{,}08,$$
$$Cc_1 = Cc_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0{,}08,$$
$$mm_1 = mm_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0{,}08,$$
$$SS_1 = SS_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \lambda = 0{,}10,$$
$$nn_1 = nn_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0{,}08,$$
$$AA_1 = AA_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0{,}08.$$

Si l'on mène par les points

$$E_1,\ C_1,$$
$$c_1,\ m_1,$$
$$n_1,\ A_1,$$
$$E_2,\ C_2,$$
$$c_2,\ m_2,$$
$$n_2,\ A_2$$

les droites et par les points

$$n_1,\ S_1,\ m_1$$
$$n_2,\ S_2,\ m_2$$

les arcs des cercles, on obtient le contour des fils extérieurs de la tige.

Remarquons ici que, si l'on élargit la tige près du point C, ce qui est nécessaire pour l'attacher à l'axe du régulateur, cette circonstance n'influencera pas considérablement nos équations, car dans le voisinage du point C les coordonnées de tous les points (fig. 3) ont une grandeur peu sensible. Par conséquent, on peut élargir la tige au point C autant qu'il est nécessaire pour sa solidité. Mais, quand on augmente la masse au bout E de la tige pour y former une charnière, il ne faut pas perdre de vue que le volume de toute la charnière aux bouts de la tige et du bras doit être égal à

$$0{,}13\,\lambda\mu,$$

ce qui pour $\lambda = 0,16$; $\mu = 0,12$ donne

$$0,002496.$$

Quant à l'autre bout de la tige, sur lequel est fixée la sphère oscillante, on trouvera l'endroit de la tige où celui-ci touche la surface de la sphère, si l'on mène par le point A, lieu du centre de la sphère, dans la direction nA la droite AL, égale à 0,4, c'est-à-dire au rayon de la sphère.

Pour passer aux bras remarquons que leur longueur d'après le § 5 reste toujours égale à $m = 1,31271$. De l'expression

$$0,52\,\lambda\mu,$$

pour

$$\lambda = 0,16, \quad \mu = 0,12,$$

on trouve qu'au cas considéré la surface des sections des bras doit être égale à 0,01. Nous avons supposé que les sections restent les mêmes sur toute l'étendue des bras, mais, comme on a remarqué dans le § 8, il est permis de modifier la distribution des masses sur l'étendue des bras à condition que le centre de gravité conserve sa première position. Donc au lieu du bras avec les sections identiques sur toute son étendue on peut en prendre un qui consiste en deux barres parallèles, liées au milieu par une troisième petite barre transversale (fig. 8): le centre de gravité du bras ainsi construit se trouvera aussi au milieu de sa longueur. Si le poids du bras devient plus grand que celui qui correspond aux sections uniformes ayant la surface égale à 0,01, il faut, comme on l'a déjà vu, enlever une moitié du poids surabondant de celui de la douille et l'autre moitié de celui de la charnière qui joint le bras à la tige. En agissant ainsi avec les deux bras, on ne devra ôter à chacune des deux charnières que la moitié de l'excès du poids d'un seul bras, mais au poids du manchon $P = 4,4283$ il faudra enlever tout ce poids surabondant.

Fig. 8.

L'epaisseur de la tige, comme on l'a vu, est égale par hypothèse, à $\mu = 0,12$ sur toute son étendue.

8.

MÉMOIRE SUR LES ENGRENAGES.

(TRADUIT PAR I. W. MESTSCHERSKY.)

О зубчатыхъ колесахъ.

Отчетъ и рѣчи, произнесенныя въ торжественномъ собраніи Императорскаго Московскаго Техническаго Училища 10 сентября 1872 года.

Revue Universelle des Mines. T. 38, 1875, p. 523—546.

Sur les engrenages*).

§ 1. Dans les recherches théoriques sur le tracé des engrenages on suppose ordinairement donnée la forme du profil de la dent de l'une des roues et on en déduit celle du profil de la dent de l'autre. On peut trouver ainsi une infinité de différentes formes des engrenages, mais il n'y en a que très peu, qui sont employées dans la pratique. Pour que la pratique puisse, sans se borner à ces formes particulières, se servir de telle forme qui est la plus avantageuse dans le cas donné, il faut avoir une méthode générale pouvant donner un moyen facile pour tracer les profils des dents d'un couple des roues qui satisfont le mieux aux exigences de la pratique. Si l'on veut tracer les profils des dents mathématiquement exacts, on rencontre des obstacles insurmontables, mais la pratique n'exige pas cette rigueur; pour lui suffisent les procédés approximatifs, qui consistent en ce, qu'on donne aux faces et aux flancs des dents la forme des arcs de cercle convenablement choisis. Quand on n'a en vue que les profils des dents en arcs de cercle (ces profils peuvent en général remplacer tous les autres avec une approximation suffisante pour la pratique), la question de la détermination de la forme des dents le mieux satisfaisant aux exigences de la pratique devient considérablement simplifiée, parce qu'il ne s'agit alors que de déterminer les centres et les rayons des quelques cercles. En étudiant le mouvement des engrenages profilés en arcs de cercle, on voit qu'ils ne peuvent jamais donner lieu à l'invariabilité du rapport des vitesses angulaires, qui présente une condition nécessaire pour que le mouvement de l'engrenage soit regulier; par suite en déterminant le profil de ces engrenages il faut se proposer pour but de diminuer autant qu'il est possible les irrégularités du mouvement

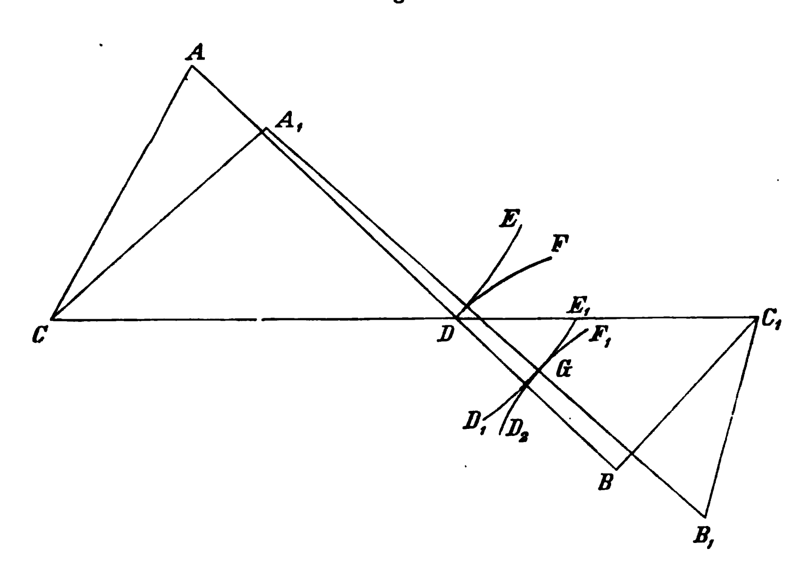
*) Ce mémoire a paru en français sous le titre: «Mémoire sur les engrenages par M. Tchebycheff. Traduction de MM. Dwelshauvers-Dery et Couharevitch.» dans la «Revue universelle des mines» 1875, pp. 523—546; la traduction de M. Mescherskiy se distingue de la précédente en ce qu'elle reproduit de plus près le texte original.

de l'engrenage, qui proviennent de la variabilité plus ou moins considérable du rapport des vitesses angulaires.

Tel est notre objet; nous allons montrer, comment on trouve, en satisfaisant aux exigences de la pratique, la forme des faces et des flancs des dents de l'engrenage profilé en arcs de cercle, pour laquelle les irrégularités du mouvement de l'engrenage sont les moindres possibles.

§ 2. Soient: C, C_1 (fig. 1) les centres des roues dentées (que nous appel-


Fig. 1.



lerons en abrégé: la roue C et la roue C_1), et de leurs circonférences primitives; $R = CD$, $R_1 = C_1D$ les rayons de ces dernières; $\rho = AD$, $\rho_1 = BD$ les rayons des arcs de cercle DE et DF, dont le premier est le profil de la face de la dent de la roue C et le second celui du flanc de la dent de la roue C_1; A et B les positions respectives des centres de ces arcs au moment, où leur point de contact est sur la ligne des centres CC_1 au point D; A_1 et B_1 les positions de ces centres à un autre moment, lorsque les arcs sont en contact au point quelconque G. Les angles $ACA_1 = \lambda$ et $BC_1B_1 = \mu$ sont ceux, dont les roues C et C_1 tournent en même temps que le point de contact des dents se déplaçe de D en G. L'angle μ est une fonction de λ que nous désignerons par $F(\lambda)$; la dérivée de cette fonction $F'(\lambda)$ représentera alors le rapport des vitesses angulaires des roues C et C_1 correspondant aux différentes valeurs de $\lambda = ACA_1$.

Pour $\lambda = 0$ on a $\mu = 0$, donc la fonction $F(\lambda)$ devient nulle quand $\lambda = 0$; d'autre part il est facile de voir que pour cette valeur $\lambda = 0$ la dérivée $F'(\lambda)$ doit être égale à $\frac{R}{R_1}$. En effet, quand $\lambda = 0$, le point de contact

des dents est sur la ligne des centres au point D; donc le rapport des vitesses angulaires des roues C et C_1 pour cette valeur de λ, comme il suit d'une propriété générale des engrenages, est égal à $\frac{CD}{C_1D}=\frac{R}{R_1}$; mais nous avons vu que ce rapport est égal à la dérivée $F'(\lambda)$, par conséquent $F'(\lambda)=\frac{R}{R_1}$ pour $\lambda=0$.

Avant d'examiner les irrégularités du mouvement des roues C et C_1,— inévitables, quand les dents sont profilées en arcs de cercle, — remarquons que dans le cas considéré, où les rayons des circonférences primitives sont R et R_1, le rapport des vitesses angulaires devrait être constant et égal à $\frac{R}{R_1}$, de manière qu'à un déplacement $\lambda=ACA_1$ de la roue C devrait correspondre un déplacement angulaire $\frac{R}{R_1}\lambda$ de la roue C_1, mais le déplacement réel de cette roue, comme nous avons posé plus haut, est égal à $\mu=F(\lambda)$; par suite la différence

$$F(\lambda)-\frac{R}{R_1}\lambda$$

représente l'erreur dans le déplacement de la roue C_1 correspondant au déplacement angulaire λ de la roue C_1.

Or, nous venons de voir que $F(\lambda)$ s'annule pour $\lambda=0$, donc pour cette valeur de λ la différence

$$F(\lambda)-\frac{R}{R_1}\lambda$$

devient nulle également. Pour les autres valeurs de λ cette différence n'est pas nulle en général, mais elle s'écarte plus ou moins de zéro pendant que λ croît de zéro jusqu'à sa limite l qu'elle atteint, lorsque les extrémités E et F des arcs DE et DF, profils des dents, sont en contact.

Donc pour diminuer autant que possible les irrégularités du mouvement de l'engrenage considéré il faut choisir les arcs de cercle DE et DF de manière que la différence

$$F(\lambda)-\frac{R}{R_1}\lambda$$

s'écarte le moins possible de zéro, tandis que λ varie entre les limites $\lambda=0$ et $\lambda=l$.

La détermination exacte des arcs de cercle DE et DF, qui rempliraient cette condition est excessivement difficile à cause de la complication de la forme de la fonction $F(\lambda)$; mais, si l'on se borne à une approximation

suffisante pour la pratique, on pourra bien se débarrasser des difficultés, provenant de la complication de la fonction $F(\lambda)$, en substituant à l'expression

$$F(\lambda)-\frac{R}{R_1}\lambda$$

son développement suivant les puissances ascendantes de λ; puisque entre les limites 0 et l l'angle λ est toujours fort petit, on n'a pas besoin de prendre un nombre considérable de termes de ce développement; pour la résolution des questions, qui se présentent dans la pratique, il suffit, comme on verra, s'arrêter à la troisième ou à la quatrième puissance de λ, de manière que l'expression de la différence

$$F(\lambda)-\frac{R}{R_1}\lambda$$

prendra la forme de l'un des deux polynomes suivants:

$$K_3\lambda^3+K_2\lambda^2+K_1\lambda+K_0,$$

ou

$$K_4\lambda^4+K_3\lambda^3+K_2\lambda^2+K_1\lambda+K_0.$$

§ 3. D'après ce qui précède, la détermination des arcs DE et DF, qui forment le profil de l'engrenage le plus régulier, se réduit à la recherche des coefficients des polynomes

$$K_3\lambda^3+K_2\lambda^2+K_1\lambda+K_0,$$
$$K_4\lambda^4+K_3\lambda^3+K_2\lambda^2+K_1\lambda+K_0,$$

pour qu'ils se rapprochent le plus possible de zéro entre des limites données de λ. Ces polynomes ressemblent à ceux qui se présentent, quand on cherche la meilleure forme du parallélogramme de Watt: ceux-là ne diffèrent de ceux-ci que par quelques particularités, résultant de ce que nous avons remarqué plus haut par rapport aux valeurs de la fonction $F(\lambda)$ et de sa dérivée $F'(\lambda)$ pour $\lambda=0$. La fonction $F(\lambda)$ s'annule pour $\lambda=0$, donc dans le développement de la différence

$$F(\lambda)-\frac{R}{R_1}\lambda$$

n'existe pas le terme, qui ne contient pas λ; la dérivée $F'(\lambda)$ pour $\lambda=0$ devient égale à $\frac{R}{R_1}$, par conséquent le coefficient de λ dans ce développe-

ment est égal à zéro. Il s'en suit que nos polynomes prennent l'une des deux formes:

$$K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2,$$

$$K_4 \lambda^4 + K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2.$$

Dans ces derniers polynomes comme dans ceux qui se rapportent à la théorie du parallélogramme de Watt, le premier coefficient étant supposé connu, les autres doivent être choisis de manière que les valeurs des polynomes s'écartent le moins possible de zéro entre les limites $\lambda = 0$ et $\lambda = l$. D'après ce qui a été démontré dans notre mémoire intitulé: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* *), la détermination de tels polynomes dans le cas général n'est possible qu'à l'aide des fonctions elliptiques, mais dans le cas des polynomes du troisième et du quatrième degré elle est très facile. En s'arrêtant aux milliièmes dans les valeurs des coefficients, on trouve que les polynomes prennent les formes suivantes:

$$K_3 (\lambda^3 - 0{,}894 l \lambda^2),$$

$$K_4 (\lambda^4 - 1{,}559 l \lambda^3 + 0{,}578 l^2 \lambda^2) \;^{**)}$$

Ces polynomes entre les limites $\lambda = 0$ et $\lambda = l$ s'écartent de zéro moins que tous les autres de la même espèce, cependant il n'est pas difficile de voir que leur écart de zéro devient le plus grand, lorsque λ atteint sa valeur limite l, par conséquent dans les engrenages, où les variations du rapport des vitesses angulaires s'expriment par les polynomes ci-dessus, la poussée est la plus defectueuse au moment, où une dent échappe et où la suivante va se remettre en prise à la ligne des centres. Cette circonstance est très desavantageuse dans la pratique, qui exige, qu'à la fin comme au commencement de la prise le rapport des vitesses soit le même; c'est pourquoi il faut remplacer les polynomes, trouvés plus haut, par les autres, qui,

---

*) T. I, pag. 111—143.

**) Les expressions exactes de ces polynomes sont:

$$K_3 (\lambda^3 - a l \lambda^2),$$

$$K_4 \left(\lambda^4 - \frac{4pl}{q} \lambda^3 + \frac{(13p^2 - 4) l^2}{2q^2} \lambda^2\right),$$

où a est déterminée par l'équation: $a^3 + \frac{27}{4}(a - 1) = 0,$

$$p = \sqrt{\frac{20 + 24\sqrt{3}}{83}},$$

$$q = \frac{p}{2} + \sqrt{1 - p^2} + \sqrt{p^2 + 2p\sqrt{1 - p^2}}.$$

s'écartant le moins de zéro entre les limites $\lambda = 0$ et $\lambda = l$, s'annuleraient non seulement pour $\lambda = 0$, mais aussi pour $\lambda = l$. D'après le § 9 du mémoire précité on trouvera les polynomes cherchés, si l'on remplace l par $\frac{l}{0,894}$ dans l'expression écrite plus haut du polynome du troisième degré et par $\frac{l}{0,952}$ dans celle du polynome du quatrième degré. On obtient ainsi

$$K_3(\lambda^3 - l\lambda^2),$$
$$K_4(\lambda^4 - 1,638 l\lambda^3 + 0,638 l^2\lambda^2),$$

polynomes, qui serviront à déterminer les profils des dents remplissant la condition que le rapport des vitesses angulaires aie la même valeur normale à la fin ainsi qu'au commencement de la prise et qui pendant la durée de la prise s'écarte les moins possible de cette valeur.

4. Nous commencerons par le cas, où dans le choix des profils des dents, les exigences de la pratique étant satisfaites, il ne reste qu'une quantité disponible, qu'on peut déterminer de manière, que les irrégularités du mouvement de l'engrenage soient les moindres possibles. Dans ce cas, en nous arrêtant à la troisième puissance dans le développement de la différence

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1}\lambda$$

nous devons poser

(1) $$F(\lambda) - \frac{R}{R_1}\lambda = K_3(\lambda^3 - l\lambda^2).$$

Or, en vertu de la nature de la fonction $F(\lambda)$, le premier membre de l'équation (1) peut être réduit toujours à la forme suivante exacte jusqu'à λ^3

$$K_3\lambda^3 + K_2\lambda^2,$$

comme nous l'avons vu au § 3; donc l'équation (1) nous donne une relation entre les coefficients K_2 et K_3 et, par conséquent, aussi entre les quantités, qui déterminent le profil cherché.

Pour obtenir cette relation nous pourrions trouver l'expression de la fonction $F(\lambda)$ et puis comparer les coefficients de λ^2 et de λ^3 dans les deux membres de l'équation (1), mais on peut procéder plus simplement, en remarquant, que l'équation (1) différenciée donne

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1} = K_3(3\lambda^2 - 2l\lambda)$$

ce qui suppose avec une approximation jusqu'à λ^2, que la différence

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

devient nulle pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \frac{2}{3} l$.

La première valeur $\lambda = 0$, annule toujours la différence

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1},$$

comme nous l'avons vu au § 2; l'annulation de cette différence pour $\lambda = \frac{2}{3} l$ nous servira à trouver la relation entre les quantités, lesquelles contient la fonction $F(\lambda)$.

Dans ce but rappelons que, d'après le § 2, la dérivée $F'(\lambda)$ représente le rapport réel des vitesses angulaires des roues considérées et la fraction $\frac{R}{R_1}$ — la valeur normale de ce rapport; si donc la différence

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

s'annule pour $\lambda = \frac{2}{3} l$, c'est qu'à ce moment le rapport des vitesses angulaires a sa valeur normale et par conséquent la normale commune aux deux profils en prise passe par le point de contact D des circonférences primitives sur la ligne des centres CC_1. Or, il est facile de trouver l'inclinaison de la normale commune sur la ligne des centres dans la position, où $\lambda = \frac{2}{3} l$, ce qui servira à établir la relation entre les quantités qui déterminent le profil cherché.

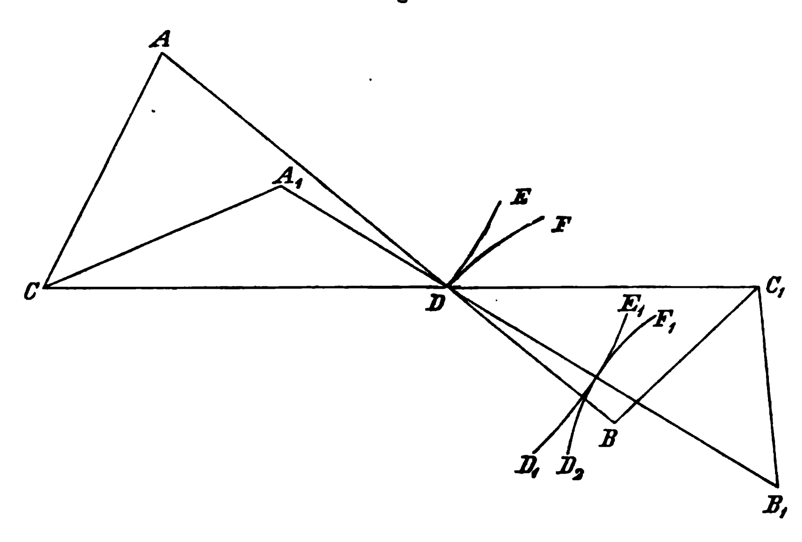
§ 5. Conservant les mêmes notations que dans la figure 1, nous aurons (fig. 2): $CD = R$, $C_1D = R_1$ les rayons des circonférences primitives, $AD = \rho$, $BD = \rho_1$, les rayons des arcs de cercle DE et DF; A et B les positions des centres des arcs DE et DF au moment, où leur point de contact est sur la ligne des centres CC_1 au point D; A_1 et B_1 les positions respectives de ces centres après une rotation de l'angle $\lambda = ACA_1 = \frac{2}{3} l$ de la roue C, quand la normale commune A_1B_1 aux profils D_1E_1 et D_2F_1, comme il est dit au paragraphe précédent, passera par la point de contact primitif D; soient: $r = AC = A_1C$ et les angles

$$L = ACD, \quad N = ADC, \quad v = ADA_1.$$

Le triangle A_1DC donne la relation

$$\operatorname{tang}(ADC - ADA_1) = \frac{A_1C.\sin A_1CD}{CD - A_1C.\cos A_1CD};$$

Fig. 2.



en employant les notations adoptées on a donc

$$\operatorname{tang}(N - v) = \frac{r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r\cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)}$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang} N - \operatorname{tang} v}{1 + \operatorname{tang} N . \operatorname{tang} v} = \frac{r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r\cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)}.$$

En résolvant cette équation par rapport à tang v, on trouve

$$\operatorname{tang} v = \frac{\left[R - r\cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)\right] \operatorname{tang} N - r\sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r\cos\left(L - \frac{2}{3}l\right) + r\sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)\operatorname{tang} N},$$

ou

(2) $$\operatorname{tang} v = \frac{R\sin N - r\sin\left(L + N - \frac{2}{3}l\right)}{R\cos N - r\cos\left(L + N - \frac{2}{3}l\right)}.$$

Développant ici

$$\sin\left(N + L - \frac{2}{3}l\right),\ \cos\left(N + L - \frac{2}{3}l\right)$$

suivant les puissances ascendantes de l, on exprime par les séries suivantes: le numérateur

$$R \sin N - r \sin(L+N) + \frac{2}{3} r \cos(L+N).l + \frac{2}{9} r \sin(L+N).l^2 + \ldots,$$

et le dénominateur

$$R \cos N - r \cos(L+N) - \frac{2}{3} r \sin(L+N).l + \frac{2}{9} r \cos(L+N).l^2 + \ldots.$$

Mais du triangle ACD on tire

$$CD.\sin ADC = AC.\sin CAD.$$

$$CD.\cos ADC + AC.\cos CAD = AD,$$

d'où, en remplaçant l'angle CAD par

$$\pi - (ADC + ACD),$$

avec les notations adoptées on reçoit

$$R \sin N = r \sin(L+N),$$

$$R \cos N - r \cos(L+N) = \rho,$$

ce qui réduit les expressions trouvées du numérateur et du dénominateur dans la formule (2) aux formes suivantes plus simples:

$$\frac{2}{3}(R \cos N - \rho)\, l + \frac{2}{9} R \sin N.l^2 + \ldots.$$

$$\rho - \frac{2}{3} R \sin N.l + \frac{2}{9}(R \cos N - \rho)\, l^2 + \ldots.$$

En divisant la première de ces séries par la seconde on trouve

$$\frac{2}{3}\left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1\right) l + \frac{4}{9} \frac{R}{\rho}\left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2}\right) \sin N.l^2 + \ldots,$$

et par suite, d'après l'équation (2), la valeur de tang v exacte jusqu'à la deuxième puissance inclusivement sera

$$\operatorname{tang} v = \frac{2}{3}\left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1\right) l + \frac{4}{9} \frac{R}{\rho}\left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2}\right) \sin N.l^2.$$

Mais l'approximation admise permet de remplacer la tangente par son arc, ce qui donne

$$(3) \qquad v = \frac{2}{3}\left(\frac{R}{\rho}\cos N - 1\right)l + \frac{4}{9}\,\frac{R}{\rho}\left(\frac{R}{\rho}\cos N - \frac{1}{2}\right)\sin N . l^2.$$

Telle doit être la variation de l'inclinaison de la normale commune aux profils en prise après une rotation de l'angle $ACA_1 = \frac{2}{3}l$ de la roue C, pour que cette normale passe par le point de contact des circonférences primitives lorsque $ACA_1 = \frac{2}{3}l$, ce qui doit avoir lieu pour l'engrenage considéré.

Cela posé, il est facile de trouver une relation entre les quantités

$$\rho, \ \rho_1, \ N,$$

qui déterminent les arcs DE et DF; à cet effet il faut connaître la valeur de v pour des valeurs quelconques de

$$\rho, \ \rho_1, \ N.$$

C'est ce que nous allons chercher.

§ 6. Soient (fig. 3) A et B les positions des centres des arcs consi-

Fig. 3.

dérés, quand leur point de contact est sur la ligne des centres;

$$ACD = L, \quad ADC = N, \quad CD = R, \quad C_1D = R_1,$$

A_1 et B_1 les positions des centres des arcs après que la roue C a tourné de l'angle quelconque $ACA_1 = \lambda$,

$$A_1CD = L - \lambda, \quad A_1D_0C = N - v;$$

soient aussi $BC_1D = M$ et μ l'accroissement de cet angle correspondant à l'angle de la rotation $ACA_1 = \lambda$ de la roue C; alors

$$B_1C_1D = M + \mu.$$

Pour obtenir l'équation qui détermine la valeur de v pour une valeur quelconque de λ, projetons le polygone $CA_1B_1C_1$ sur la direction de la ligne des centres et sur une perpendiculaire à cette direction; nous aurons

$$A_1C.\cos A_1CD + A_1B_1 \cos A_1D_0C + B_1C_1 \cos B_1C_1D = CC_1$$
$$A_1C \sin A_1CD - A_1B_1 \sin A_1D_0C + B_1C_1 \sin B_1C_1D = 0,$$

d'où, en remarquant que

$$A_1C = r, \; B_1C_1 = r_1, \; A_1B_1 = \rho + \rho_1, \; CC_1 = R + R_1$$
$$A_1CD = L - \lambda, \; A_1D_0C = N - v, \; DC_1B_1 = M + \mu,$$

on trouve

$$r\cos(L-\lambda) + (\rho+\rho_1)\cos(N-v) + r_1\cos(M+\mu) = R + R_1,$$
$$r\sin(L-\lambda) - (\rho+\rho_1)\sin(N-v) + r_1\sin(M+\mu) = 0.$$

Éliminant $(M+\mu)$ entre ces équations, on a:

$$r_1^2 = \left[R + R_1 - r\cos(L-\lambda) - (\rho+\rho_1)\cos(N-v)\right]^2$$
$$+ \left[-r\sin(L-\lambda) + (\rho+\rho_1)\sin(N-v)\right]^2,$$

ou en supprimant les parenthèses

$$r_1^2 = (R+R_1)^2 + (\rho+\rho_1)^2 + r^2 + 2r(\rho+\rho_1)\cos(L+N-\lambda-v)$$
$$- 2(R+R_1)\left[r\cos(L-\lambda) + (\rho+\rho_1)\cos(N-v)\right].$$

Pour les valeurs particulières $\lambda = 0$, $v = 0$, cette égalité devient:

$$r_1^2 = (R + R_1)^2 + (\rho + \rho_1)^2 + r^2 + 2r(\rho + \rho_1)\cos(L + N)$$
$$- 2(R + R_1)\left[r \cos L + (\rho + \rho_1)\cos N\right].$$

Soustrayant cette équation de la précédente, on obtient

$$\frac{\cos(L + N - \lambda - v) - \cos(L + N)}{R + R_1} - \frac{\cos(N - v) - \cos N}{r} - \frac{\cos(L - \lambda) - \cos L}{\rho + \rho_1} = 0.$$

Pour en déduire la valeur de l'angle v développée suivant les puissances ascendantes de l'angle λ posons

$$v = K_1\lambda + K_2\lambda^2 + \ldots .$$

et déterminons les coefficients K_1, $K_2, \ldots .$

En portant cette expression de v dans l'équation précédente et développant suivant les puissances de λ, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\dfrac{\sin(L+N)}{R+R_1}(K_1+1) - \dfrac{\sin N}{r}K_1 - \dfrac{\sin L}{\rho+\rho_1}\right\}\lambda \\ + \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2\sin(L+N)K_2 - \cos(L+N)(K_1+1)^2}{R+R_1} \\ - \dfrac{2\sin N.K_2 - \cos N.K_1^2}{r} + \dfrac{\cos L}{\rho+\rho_1} \end{array}\right\}\dfrac{\lambda^2}{2} + \ldots . \end{array}\right\} = 0,$$

d'où pour la détermination des coefficients K_1, K_2 on tire les équations suivantes:

$$\frac{\sin(L+N)}{R+R_1}(K_1+1) - \frac{\sin N}{r}K_1 - \frac{\sin L}{\rho+\rho_1} = 0,$$

$$\frac{2\sin(L+N)K_2 - \cos(L+N)(K_1+1)^2}{R+R_1} - \frac{2\sin N.K_2 - \cos N.K_1^2}{r} + \frac{\cos L}{\rho+\rho_1} = 0,$$

. . . .

qui donnent

$$K_1 = \frac{\dfrac{\sin L}{\rho+\rho_1} - \dfrac{\sin(L+N)}{R+R_1}}{\dfrac{\sin(L+N)}{R+R_1} - \dfrac{\sin N}{r}};$$

$$K_2 = \frac{\dfrac{\cos(L+N)}{R+R_1}(K_1+1)^2 - \dfrac{\cos N}{r}K_1^2 - \dfrac{\cos L}{\rho+\rho_1}}{2\left(\dfrac{\sin(L+N)}{R+R_1} - \dfrac{\sin N}{r}\right)}.$$

Afin de chasser de ces expressions les angles

$$L = ACD \text{ et } L + N = ADC + ACD$$

remarquons, que le triangle ACD donne

$$\sin ACD = \frac{AD}{AC} \sin ADC,$$

$$\sin (ADC + ACD) = \sin CAD = \frac{CD}{AC} \sin ADC;$$

$$\cos ACD = \frac{CD - AD . \cos ADC}{AC},$$

$$\cos (ADC + ACD) = - \cos CAD = - \frac{AD - CD . \cos ADC}{AC},$$

ou, d'après la notation adoptée,

$$\sin L = \frac{\rho}{r} \sin N; \ \sin (L + N) = \frac{R}{r} \sin N;$$

$$\cos L = \frac{R - \rho \cos N}{r}; \ \cos (L + N) = - \frac{\rho - R \cos N}{r}.$$

En portant ces valeurs de

$$\sin L, \ \sin (L + N), \ \cos L, \ \cos (L + N)$$

dans les expressions précédentes des coefficients K_1, K_2, on trouve, toutes les réductions faites,

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1 \rho}{R_1 (\rho + \rho_1)};$$

$$K_2 = \frac{(\rho - R \cos N)(K_1 + 1)^2 + (R + R_1)\left[\cos N . K_1^2 + \frac{R - \rho \cos N}{\rho + \rho_1}\right]}{2R_1 \sin N}.$$

Telles sont les valeurs des coefficients K_1 et K_2 de la série

(4) $$v = K_1 \lambda + K_2 \lambda^2 + \ldots ,$$

qui donne la valeur de l'angle v correspondant à une valeur quelconque de l'angle λ pour toutes les valeurs de

$$\rho, \ \rho_1, \ N.$$

§ 7. En posant dans la formule trouvée

$$\lambda = \frac{2}{3} l,$$

nous aurons la valeur correspondante de l'angle v

$$v = \frac{2}{3} K_1 l + \frac{4}{9} K_2 l^2 + \ldots .$$

Or dans le cas de l'engrenage considéré d'après la formule (3) (§ 5) cette valeur particulière de v est

$$\frac{2}{3}\left(\frac{R}{\rho}\cos N - 1\right) l + \frac{4}{9}\frac{R}{\rho}\left(\frac{R}{\rho}\cos N - \frac{1}{2}\right)\sin N . l^2.$$

Comparant ces deux valeurs du même angle on obtient une équation, qui, étant divisée par $\frac{2}{3} l$, prend la forme

$$(5)\qquad K_1 - \frac{R}{\rho}\cos N + 1 + \frac{2}{3}\left[K_2 - \frac{R}{\rho}\left(\frac{R}{\rho}\cos N - \frac{1}{2}\right)\sin N\right] l = 0,$$

où K_1 et K_2 ont les valeurs indiquées au § 6.

La valeur de K_1, comme nous avons vu, est très simple:

$$(6)\qquad K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)}.$$

Quant à l'expression de la valeur de K_2 elle peut être considérablement simplifiée en vertu de l'approximation, à laquelle on se borne.

Remarquons que dans le calcul de cette valeur on peut négliger même les premières puissances de l, puisque cette quantité n'entre comme facteur que dans le dernier des termes retenus. En outre, d'après l'équation (5), si l'on néglige le second terme, on a

$$(7)\qquad K_1 - \frac{R}{\rho}\cos N + 1 = 0,$$

équation, à l'aide de laquelle on simplifie facilement l'expression de la valeur K_2.

En effet le numérateur de cette expression, K_1 étant remplacé par la différence

$$\frac{R}{\rho}\cos N - 1,$$

devient

$$(\rho + R_1\cos N)\frac{R^2}{\rho^2}\cos^2 N - 2\,(R + R_1)\frac{R}{\rho}\cos^2 N + \frac{R + R_1}{\rho + \rho_1}(R + \rho_1\cos N).$$

Mais la formule (7), d'après (6), donne

$$\frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho+\rho_1)} - \frac{R}{\rho}\cos N + 1 = 0,$$

formule, qui se réduit à

(8) $$\frac{R+R_1}{\rho+\rho_1} = \frac{RR_1}{\rho\rho_1}\cos N.$$

En remplaçant le facteur

$$\frac{R+R_1}{\rho+\rho_1}$$

dans le dernier terme de l'expression précédente par

$$\frac{RR_1}{\rho\rho_1}\cos N,$$

on la réduit à la suivante:

$$\left[\frac{R^2R_1}{\rho^2}\cos^2 N - \frac{(R+R_1)R}{\rho}\cos N + \frac{R^2R_1}{\rho\rho_1}\right]\cos N,$$

qui après la substitution

$$\frac{RR_1(\rho+\rho_1)}{\rho\rho_1}\cos N$$

au lieu de

$$R+R_1$$

devient

$$\frac{R^2R_1}{\rho\rho_1}(1-\cos^2 N)\cos N$$

ou

$$\frac{R^2R_1}{\rho\rho_1}\sin^2 N.\cos N.$$

Remplaçons ici

$$\frac{\cos N}{\rho\rho_1}$$

d'après la formule (8) par

$$\frac{R+R_1}{\rho+\rho_1}\,\frac{1}{RR_1}.$$

et nous aurons

$$\frac{R(R+R_1)}{\rho+\rho_1}\sin^2 N,$$

expression réduite du numérateur de K_2, donné à la fin du § 6.

Par suite on obtient pour la détermination du coefficient K_2 la formule suivante très simple:

(9) $$K_2 = \frac{R}{2R_1}\,\frac{R+R_1}{\rho+\rho_1}\sin N.$$

Portant les valeurs trouvées de K_1 et K_2 dans l'équation (5) et remplaçant dans son dernier terme, d'après (8),

$$\frac{R.\cos N}{\rho}$$

par

$$\frac{R+R_1}{R_1}\,\frac{\rho_1}{\rho+\rho_1},$$

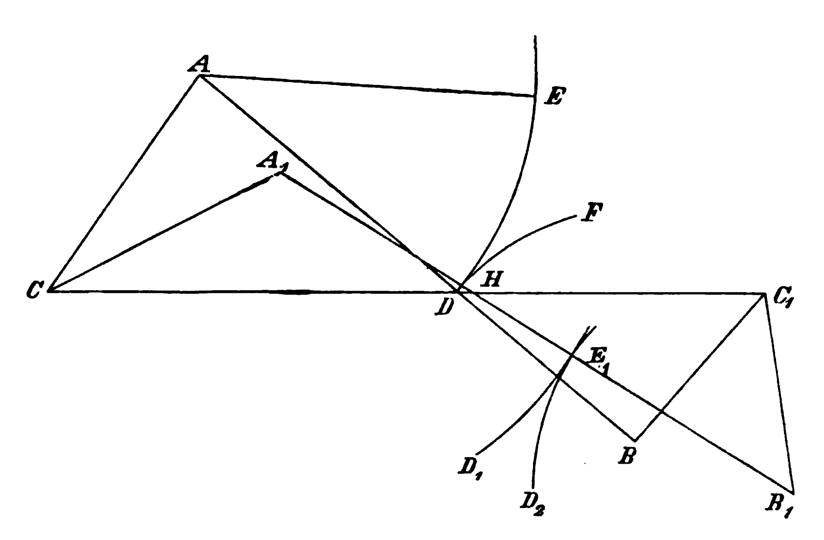
on obtient, la réduction faite,

(10) $$\cos N - \frac{R+R_1}{RR_1}\,\frac{\rho\rho_1}{\rho+\rho_1} + \frac{1}{3R_1}\,\frac{(R_1+2R)\,\rho_1-(R+2R_1)\,\rho}{\rho+\rho_1}\sin N.l = 0.$$

§ 8. Cette équation exprime une propriété géometrique très-simple des arcs de cercle qui forment les profils de la face et du flanc de la dent de l'engrenage considéré. Mais avant de la faire ressortir cherchons la formule qui sert à déterminer les longueurs de ces arcs.

Conservant les notations précédentes des arcs DE, DF et de leurs centres A et B au moment, où le point de contact des dents est sur la ligne des centres, soient (fig. 4) D_1E_1, D_2E_1, A_1, B_1, les positions extrêmes des

Fig. 4.



arcs et de leurs centres au moment, où les dents vont se quitter, ce qui correspond, comme on l'a vu, à la rotation de l'angle $ACA_1 = l$ de la roue C.

Traçons la droite AE; l'angle CAE est égal à CA_1E_1, parceque A et A_1 de même que E et E_1 représentent les mêmes points de la roue C dans ses deux positions; donc l'angle DAE qui est égal à $CAE—CAD$ sera égal aussi à $CA_1H—CAD$; or

$$CA_1H = \pi - A_1CH - A_1HC,$$
$$CAD = \pi - ACD - ADC,$$

donc

$$DAE = ACD - A_1CH + ADC - A_1HC.$$

D'après nos notations:

$$ACD - A_1CH = ACA_1 = l,$$
$$ADC - A_1HC = N - (N - v) = v,$$

où la valeur de v s'obtient de la formule (4) pour $\lambda = l$; il s'ensuit, que si nous appellons ω l'angle DAE, qui détermine la longueur de l'arc DE, profil de la face de la dent de l'engrenage considéré, on a pour la valeur de cet angle

$$\omega = l + v = (K_1 + 1)\, l + K_2 l^2,$$

ce qui, après la substitution des valeurs de K_1 et K_2 trouvées au § 7, se réduit à la forme suivante:

$$\omega = \frac{R+R_1}{R_1}\,\frac{\rho_1}{\rho+\rho_1}\, l + \frac{R}{2R_1}\,\frac{R+R_1}{\rho+\rho_1} \sin N . l^2. \tag{11}$$

A l'aide de cette expression de l'angle $\omega = DAE$ il est facile à faire voir, que l'équation (10) représente une simple propriété géométrique de l'arc DE, à savoir:

«Au moment où le point de contact des deux dents est sur la ligne des centres, le point extrême E de l'arc DE (fig. 5) se trouve sur la circonférence, qui passe par le point D de contact primitif et par les extrémités P et P_1 des deux arcs DP et DP_1 des circonférences primitives, qui correspondent à l'angle de rotation de la roue C pendant la durée de la prise des arcs DE et DF».

Pour le démontrer traçons la circonférence, passant par les points D, P et P_1, et la corde DE; soit E_1 le point de leur intersection; cherchons la longueur DE_1.

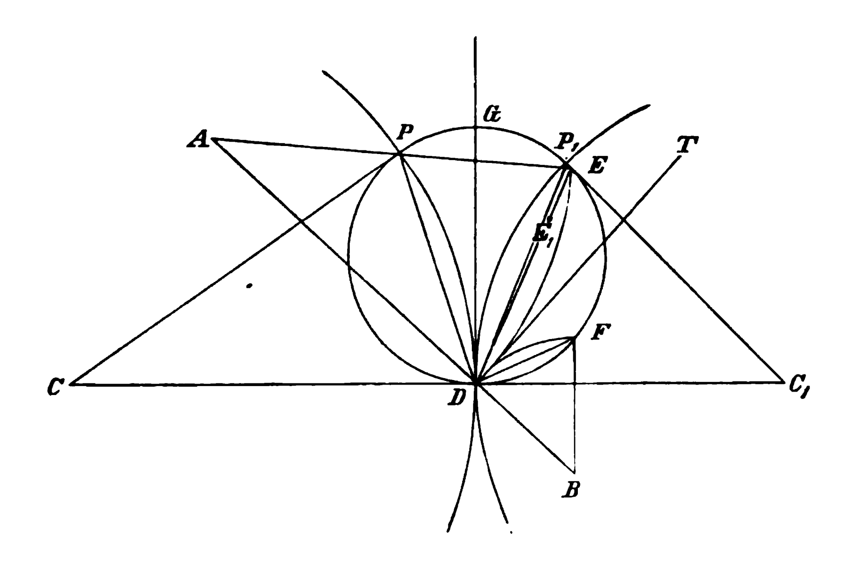
D'après nos notations

$$ADC = N;\ DAE = \omega,\ DCP = l,\ CD = R,\ C_1D = R_1,$$

et l'angle DC_1P_1 est celui dont a tourné la roue C_1 pendant toute la durée de la prise des arcs DE et DF, de sorte que

$$DC_1P_1 = \frac{R}{R_1} DCP = \frac{R}{R_1} l.$$

Fig. 5.



Menons par le point D la droite DG perpendiculaire à CC_1 et DT perpendiculaire à AD; ces droites étant tangentes aux arcs DP, DP_1 et DE respectivement font avec les cordes de ces arcs les angles

$$PDG = \frac{1}{2} DCP,\ P_1DG = \frac{1}{2} DC_1P_1,\ EDT = \frac{1}{2} DAE,$$

ou d'après les notations adoptées

$$PDG = \frac{l}{2};\ P_1DG = \frac{Rl}{2R_1};\ EDT = \frac{\omega}{2}.$$

Quant à l'angle GDT, ses côtés étant perpendiculaires à ceux de l'angle ADC, on a $GDT = ADC$ et par suite $GDT = N$.

On en déduit:

$$PDP_1 = PDG + P_1DG = \frac{l}{2} + \frac{R}{2R_1} l,$$

$$P_1DE_1 = GDT - GDP_1 - EDT = N - \frac{R}{2R_1} l - \frac{\omega}{2},$$

$$PDE_1 = GDT + PDG - EDT = N + \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}.$$

D'autre part ayant

$$DCP = l, \quad DC_1P_1 = \frac{R}{R_1}\, l$$
$$DC = R, \quad DC_1 = R_1,$$

on trouve les longueurs des cordes DP et DP_1:

$$DP = 2 . CD . \sin \frac{PCD}{2} = 2R \sin \frac{l}{2},$$
$$DP_1 = 2C_1D . \sin \frac{DC_1P_1}{2} = 2R_1 \sin \frac{Rl}{2R_1}.$$

Connaissant les longueurs de ces cordes ainsi que les angles qu'elles forment avec la corde DE_1, on trouve facilement la longueur de cette dernière à l'aide de l'équation:

$$DP . \sin (P_1DE_1) - DP_1 \sin (PDE_1) + DE_1 \sin (PDP_1) = 0,$$

qui a lieu pour trois cordes quelconques passant par un même point de la circonférence.

En y portant les valeurs trouvées des longueurs de DP et DP_1 et des angles P_1DE_1, PDE_1, PDP_1, on obtient pour la détermination de la longueur de DE_1 l'équation suivante:

$$(12) \quad 2R \sin \frac{l}{2} \sin \left(N - \frac{Rl}{2R_1} - \frac{\omega}{2}\right) - 2R_1 \sin \frac{Rl}{2R_1} \sin \left(N + \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}\right) + DE_1 \sin \left(\frac{l}{2} + \frac{Rl}{2R_1}\right) = 0.$$

Pour en déduire la longueur de DE_1 avec une approximation du deuxième ordre, développons les deux premiers termes jusqu'au troisième ordre et le facteur de DE_1 jusqu'au deuxième; nous aurons:

$$\frac{R + R_1}{2R_1} DE_1 . l - \frac{(R + R_1) R}{2R_1} \cos N . l^2 + \left[\frac{R_1^2 - R^2}{12R_1^2} Rl - \frac{(R + R_1) R}{4R_1} \omega\right] \sin N . l^2 = 0,$$

d'où

$$DE_1 = R \cos N . l + R \left\{\frac{\omega}{2} + \frac{R - R_1}{6R_1} l\right\} \sin N . l,$$

Remplaçant ω par sa valeur (11) on trouve

$$DE_1 = R \cos N . l + R \frac{(4R + 2R_1) \rho_1 + (R - R_1) \rho}{6R_1 (\rho + \rho_1)} \sin N . l^2.$$

expression exacte jusqu'à la deuxième puissance de l inclusivement de la longueur de DE_1, qui détermine la position du point E_1, où la circonférence passant par les trois points D, P, P_1 est coupée par la corde DE.

En déterminant d'après les formules trouvées plus haut la longueur de la corde DE, on voit qu'avec une approximation dn deuxième ordre on peut remplacer cette corde par l'arc DE et par suite exprimer sa longueur par le produit

$$\rho \cdot \omega.$$

A l'aide de la formule (11) on trouve

$$DE = \frac{R+R_1}{R_1}\frac{\rho\rho_1}{\rho+\rho_1} l + \frac{R\rho}{2R_1}\frac{R+R_1}{\rho+\rho_1} \sin N . l^2.$$

Nous aurons donc pour la différence des longueurs des cordes DE et DE_1 l'expression suivante exacte jusqu'à la deuxième puissance de l:

$$DE - DE_1 =$$

$$\left(\frac{R+R_1}{R_1}\frac{\rho\rho_1}{\rho+\rho_1} - R\cos N\right) l - \frac{R}{8R_1}\frac{(2R+R_1)\rho_1 - (2R_1+R)\rho}{\rho+\rho_1} \sin N . l^2.$$

Comparant cette expression avec le premier membre de l'équation (10) on voit, qu'elle ne diffère de celui-ci que par un facteur $-lR$; par suite en vertu de l'équation (10) on a

$$DE - DE_1 = 0,$$

donc le point E_1 coïncide avec le point E, qui est par conséquent sur la circonférence considérée, ce qu'il fallait démontrer.

§ 9. Répétant relativement à l'arc DF, profil du flanc de la dent de la roue C_1, tout ce qui vient d'être dit relativement à l'arc DE, profil de la face de la dent de la roue C, on arrive aux formules, qui se déduisent des formules précédentes en remplaçant des lettres relatives à la roue C par celles relatives à la roue C_1 et réciproquement.

Quant à la quantité l, qui représente l'angle de la rotation de la roue C pendant la prise des arcs DE et DF, il faut la remplacer par

$$-\frac{R}{R_1} l,$$

parce que la roue C_1 en même temps tourne de l'angle $\frac{R}{R_1} l$ dans le sens opposé.

Au lieu de l'angle $\omega = DAE$, qui mesure l'inclinaison réciproque des rayons AD et AE passant par les extrémités de l'arc DE, nous aurons

$$\omega_1 = DBF$$

avec le signe — à cause de la position inverse des rayons BD et BF, passant par les extrémités de l'arc DF.

L'équation (11) deviendra par ces changements

$$(13) \qquad \omega_1 = \frac{R+R_1}{R} \frac{\rho}{\rho+\rho_1} l - \frac{R}{2R_1} \frac{R+R_1}{\rho+\rho_1} \sin N . l^2;$$

l'équation (10) reste la même, quand on passe de l'arc DE à l'arc DF; ces deux équations nous conduisent au même résultat relativement à l'arc DF, que nous avons obtenu dans le paragraphe précédent relativement à l'arc DE, c'est à dire, l'extrémité F est située sur la circonférence passant par les points D, P et P_1.

On arrive ainsi à la conclusion suivante, concernant l'engrenage conconsidéré:

«Au moment, où le point de contact des dents est sur la ligne des centres, les cinq points suivants sont sur une même circonférence: les extrémités des profils de la face de l'une et de la partie vive du flanc de l'autre des deux dents qui sont en contact sur la ligne des centres, les points des circonférences primitives qui viennent à la ligne des centres à la fin de la prise de ces dents, et le point de contact des circonférences primitives».

Cette propriété n'est exacte que jusqu'à la troisième puissance de l, puisque en déterminant les positions des différents points nous avons négligé dans nos formules les puissances de l supérieures à la seconde. Mais cette approximation est suffisante dans la pratique en vertu de la petitesse de la quantité l, qui représente l'angle de la rotation de la roue pendant la prise d'un couple des dents de l'un ou de l'autre côté de la ligne des centres.

En se basant sur les formules (11) et (13), on peut trouver une autre propriété de l'engrenage considéré. Ces formules étant ajoutées donnent

$$\omega + \omega_1 = \frac{R+R_1}{R_1} l,$$

mais d'après nos notations

$$\omega = DAE, \quad \omega_1 = DBF, \quad l = DCP,$$

et comme nous avons remarqué plus haut

$$\frac{Rl}{R_1} = DC_1P_1;$$

donc l'équation trouvée se réduit à la suivante:

$$DAE + DBF = DCP + DC_1P_1.$$

Considérant les angles que forment les cordes des arcs DP, DP_1, DE et DF avec leurs tangentes DG et DT, on voit que

$$PDG=\frac{1}{2}DCP,\ P_1DG=\frac{1}{2}DC_1P_1,$$
$$EDT=\frac{1}{2}DAE,\ FDT=\frac{1}{2}DBF,$$

par suite l'égalité précédente donne

$$EDT+FDT=PDG+P_1DG,$$

d'où

$$EDF=PDP_1,$$

c'est-à-dire que les cordes des arcs DE et DF font entre elles le même angle que les cordes des arcs de retraite DP et DP_1; les points P, P_1, F, E étant situés sur la même circonférence passant par le point D, il en résulte, que les droites PP_1 et EF sont égales entre elles.

On peut énoncer cette propriété de l'engrenage considéré comme il suit:

«La distance entre les extrémités des profils de la face de l'une et de la partie vive du flanc de l'autre des deux dents, dont le point de contact est sur la ligne des centres, est égale à la distance des points des circonférences primitives, qui viennent à la ligne des centres à la fin de la prise de ces dents».

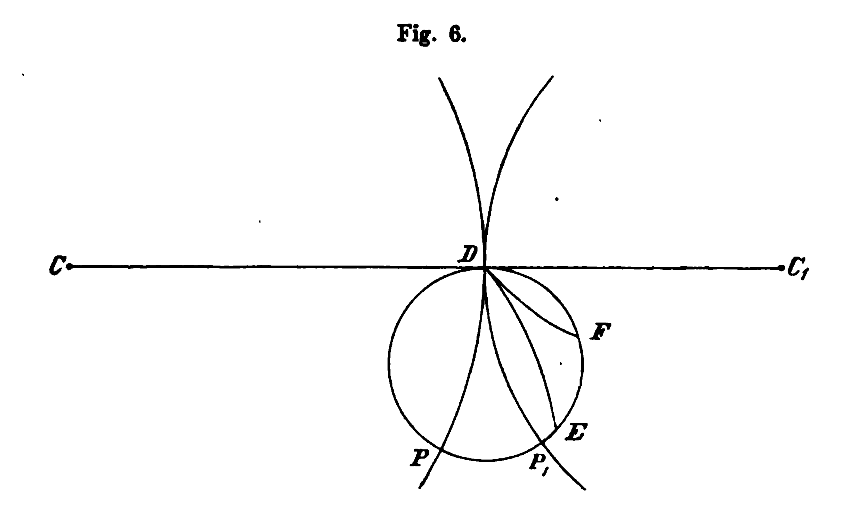
Puisque dans le tracé des engrenages, on donne les circonférences primitives et les arcs de retraite et d'approche, on pourra toujours, d'après ce que nous avons montré plus haut, tracer la circonférence, où doivent être situées les extrémités des profils de la face et de la partie vive du flanc des deux dents et on connaîtra la distance de ces extrémités au moment, où les dents sont en contact sur la ligne des centres.

Soient (fig. 6) C et C_1 les centres des circonférence primitives, D le point de leur contact. Ayant en vue de déterminer le tracé des profils des dents des roues C et C_1 portons les longueurs DP et DP_1 des arcs d'approche sur les circonférences primitives; puis traçons la circonférence passant par les points D, P, P_1, sur laquelle doivent se trouver les extrémités E et F des profils de la face et de la partie vive du flanc des dents au moment, où le point de leur contact et sur la ligne des centres; la distance de ces extrémités doit être égale à PP_1. Quant au choix de la position des points E et F sur la circonférence, il dépend des exigences de la pratique: plus ces points seront éloignés du point D, plus longue sera la dent de la roue C et plus profond sera le creux de la roue C_1; en même temps sera plus mince le

bout de la dent de la roue C et plus étroit près du fond le creux de la roue C_1.

Après avoir choisi les positions des points E et F sur la circonférence et la direction de la normale commune aux profils des dents en contact au

Fig. 6.



point D, nous aurons les profils cherchés, en traçant par le points D et E, D et F les arcs de cercle, ayant au point D la normale choisie.

§ 10. Passons maintenant au cas, où l'on dispose de deux quantités dans le choix des arcs de cercle formant les profils des dents, en vue de diminuer autant qu'il est possible les irrégularités, qui sont inévitables une fois que l'engrenage est profilé en arcs de cercle.

Développant la différence:

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1}\lambda$$

suivant les puissances ascendantes de λ jusqu'à la quatrième puissance, on trouve, que d'après le § 3 cette différence se réduit au polynome:

$$K_4(\lambda^4 - 1{,}638\, l\lambda^3 + 0{,}638\, l^2\lambda^2).$$

D'où il suit que pour déterminer les valeurs de λ, qui annulent la dérivée

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

on à l'équation:

$$4\lambda^3 - 1{,}638 . 3 . l\lambda^2 + 0{,}638 . 2 . l^2\lambda = 0.$$

dont les racines sont:

$$\lambda = 0,\ \lambda = 0{,}365 l,\ \lambda = 0{,}865 l.$$

On conclut de là, d'après le § 4, que la normale commune aux profils des dents en contact passe par le point de contact des circonférences primitives pour les valeurs suivantes de l'angle λ:

$$\lambda = 0,\ \lambda = 0{,}365 l,\ \lambda = 0{,}865 l.$$

Les équations qu'on peut déduire de cette circonstance dans le cas considéré s'obtiennent facilement, comme nous le verrons, si l'on fait usage de l'angle v, variation de l'inclinaison de la normale commune aux profils des dents en contact (§ 5) sur la ligne des centres.

Cherchant d'après la formule (4) les valeurs de v correspondant aux trois valeurs de λ ci-dessus trouvées, on remarque, que la première est nulle et les deux autres sont de la forme:

$$v = K_1 \lambda + K_2 \lambda^2,$$

où il faut poser successivement

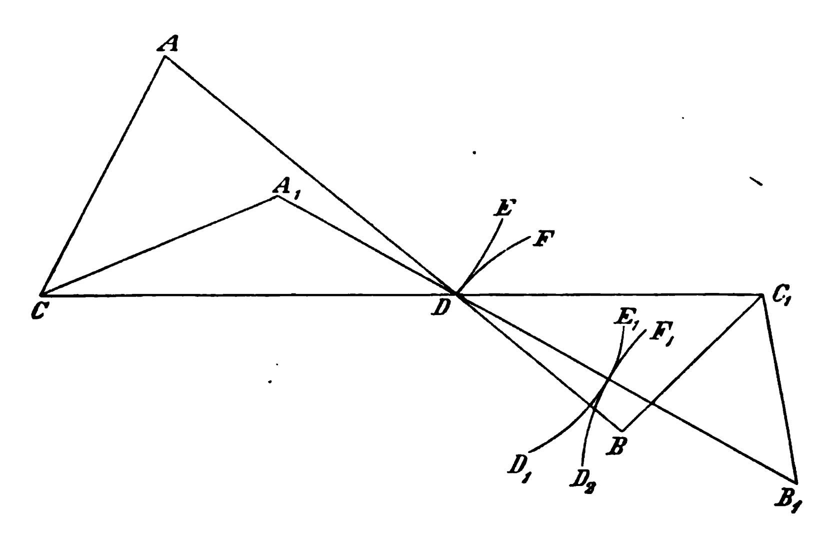
$$\lambda = 0{,}365\, l,\ \lambda = 0{,}865\, l.$$

En désignant ces deux valeurs de v par v_1 et v_2 nous aurons

$$v_1 = 0{,}365\, K_1 l + 0{,}365^2 K_2 l^2,$$
$$v_2 = 0{,}865\, K_1 l + 0{,}865^2 K_2 l^2.$$

Soient, conformément aux notations précédentes, C et C_1 (fig. 7) les

Fig. 7.



centres des circonférences primitives, $CD = R$, $C_1D = R_1$ leurs rayons; A

et B les centres des arcs de cercle DE et DF, lorsque leur point de contact est sur la ligne des centres; $AD=\rho$, $BD=\rho_1$ les rayons de ces arcs; $AC=r$, $BC_1=r_1$ les distances des points A, B aux centres C, C_1; $ADC=N$ l'angle, qui mesure l'inclinaison de la normale commune aux arcs DE et DF sur la ligne des centres. Si A_1 et B_1 sont les positions des centres des arcs DE et DF au moment, où le décroissement de l'angle de l'inclinaison de la normale commune aux dents sur la ligne CC_1 est égal à v_1, la droite A_1B_1 représente la position de cette normale, correspondant à $\lambda=0,365\,l$; et par suite elle doit passer par D, point de contact des circonférences primitives.

Considérant les triangles CAD, CA_1D, C_1BD, C_1B_1D, où d'après nos notations

$$AC=A_1C=r,\ BC_1=B_1C_1=r_1,$$
$$AD=\rho,\ BD=\rho_1,\ AB=A_1B_1=\rho+\rho_1,$$
$$CD=R,\ C_1D=R_1,\ ADC=BDC_1=N,$$
$$A_1DC=B_1DC_1=N-v_1,$$

et posant

$$AD-A_1D=B_1D-BD=h,$$

nous aurons les égalités suivantes:

$$r^2=\rho^2+R^2-2\rho R\cos N,$$
$$r^2=(\rho-h)^2+R^2-2(\rho-h)R\cos(N-v_1),$$
$$r_1^2=\rho_1^2+R_1^2-2\rho_1R_1\cos N,$$
$$r_1^2=(\rho_1+h)^2+R_1^2-2(\rho_1+h)R_1\cos(N-v_1),$$

qui, après l'élimination de r et r_1, nous donnent:

$$\rho^2+R^2-2\rho R\cos N=(\rho-h)^2+R^2-2(\rho-h)R\cos(N-v_1),$$
$$\rho_1^2+R_1^2-2\rho_1R_1\cos N=(\rho_1+h)^2+R_1^2-2(\rho_1+h)R_1\cos(N-v_1).$$

Pour éliminer de ces équations la quantité h on peut les résoudre par rapport à

$$\rho-h \text{ et } \rho_1+h$$

et ajouter les résultats.

On arrive ainsi à l'équation:

$$\rho+\rho_1-(R+R_1)\cos(N-v_1)=$$
$$\sqrt{\rho^2-2R\rho\cos N+R^2\cos^2(N-v_1)}+\sqrt{\rho_1^2-2R_1\rho_1\cos N+R_1^2\cos^2(N-v_1)},$$

qui peut être réduite à la forme:

$$\rho + \rho_1 - (R + R_1)\cos(N - v_1) =$$
$$\sqrt{(\rho - R\cos N)^2 + R^2\left[\cos^2(N - v_1) - \cos^2 N\right]}$$
$$+ \sqrt{(\rho_1 - R_1\cos N)^2 + R_1^2\left[\cos^2(N - v_1) - \cos^2 N\right]}.$$

Posons pour abréger

(14) $$\frac{\cos^2(N - v_1) - \cos^2 N}{\cos^2 N} = t_1,$$

ce qui donne

$$\cos(N - v_1) = \cos N\sqrt{1 + t_1},$$

et nous pourrons écrire l'équation précédente comme il suit:

$$\rho + \rho_1 - (R + R_1)\cos N\sqrt{1 + t_1} =$$
$$\sqrt{(\rho - R\cos N)^2 + R^2\cos^2 N . t_1} + \sqrt{(\rho_1 - R_1\cos N)^2 + R_1^2\cos^2 N . t_1}.$$

Développant les radicaux suivant les puissances de t_1, on ramène tous les termes dans le premier membre; divisant par t_1, on trouve:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{R^2\cos N}{\rho - R\cos N} + \frac{R_1^2\cos N}{\rho_1 - R_1\cos N} + R + R_1 \\ -\frac{1}{4}\left[\frac{R^4\cos^3 N}{(\rho - R\cos N)^3} + \frac{R_1^4\cos^3 N}{(\rho_1 - R_1\cos N)^3} + R + R_1\right] t_1 \\ +\frac{1}{8}\left[\frac{R^6\cos^5 N}{(\rho - R\cos N)^5} + \frac{R_1^6\cos^5 N}{(\rho_1 - R_1\cos N)^5} + R + R_1\right] t_1^2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Faisons pour abréger

(15) $$\frac{R\cos N}{\rho - R\cos N} = X, \quad \frac{R_1\cos N}{\rho_1 - R_1\cos N} = Y,$$

et l'équation ci-dessus prendra la forme suivante:

(16) $$\left.\begin{array}{l} RX + R_1 Y + R + R_1 - \frac{1}{4}(RX^3 + R_1 Y^3 + R + R_1)\, t_1 \\ + \frac{1}{8}(RX^5 + R_1 Y^5 + R + R_1)\, t_1^2 + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

En répétant les mêmes opérations pour l'angle v_2, qui correspond à

l'angle de la rotation $\lambda = 0{,}865\, l$, pour lequel la normale commune doit passer aussi par le point D et posant:

(17) $$\frac{\cos^2(N - v_2) - \cos^2 N}{\cos^2 N} = t_2,$$

nous obtenons l'équation

(18) $$\left.\begin{aligned} RX + R_1Y + R + R_1 - \tfrac{1}{4}\,(RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1)\,t_2 \\ + \tfrac{1}{8}\,(RX^5 + R_1Y^5 + R + R_1)\,t_2^2 + \ldots \end{aligned}\right\} = 0,$$

analogue à l'équation (16).

Des équations (16) et (18) on déduit les valeurs de X et Y; en suite à l'aide des formules (15) on trouve les valeurs de ρ et ρ_1, rayons des arcs de cercle formant les profils des dents.

§ 11. Pour faciliter la résolution des équations (16) et (18) nous négligerons d'abord les termes contenant les puissances de t_1 et t_2 supérieures à la première. Nous aurons pour les valeurs approchées de X et Y les équations:

$$RX + R_1Y + R + R_1 - \tfrac{1}{4}\,(RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1)\,t_1 = 0,$$

$$RX + R_1Y + R + R_1 - \tfrac{1}{4}\,(RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1)\,t_2 = 0$$

qui se réduisent aux équations suivantes:

$$RX + R_1Y + R + R_1 = 0,$$

$$RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1 = 0.$$

On déduit de la première

(19) $$Y = -\frac{R}{R_1}\,X - \frac{R}{R_1} - 1.$$

Substituant cette valeur de Y dans la seconde on arrive à l'équation:

$$RX^3 + R_1\left(-\frac{R}{R_1}\,X - \frac{R}{R_1} - 1\right)^3 + R + R_1 = 0,$$

qui, les réductions faites, aura la forme:

$$(R_1 - R)\,X^3 - 3RX^2 - 3\,(R + R_1)\,X - R - 2R_1 = 0.$$

Cette équation a deux racines égales à -1 et la troisième, qui est égale à

$$\frac{R+2R_1}{R_1-R}.$$

Or, remarquant que d'après la première des formules (15) X ne peut devenir égal à -1 que si le rayon ρ devient nul, on conclut que les racines égales à -1 ne sont pas admissibles dans notre problème; donc il faut prendre pour la valeur cherchée de X la racine

$$\frac{R+2R_1}{R_1-R}.$$

Substituant cette valeur de X dans l'équation (19) on trouve

$$Y=\frac{R_1+2R}{R-R_1}.$$

Telles sont les premières valeurs approchées de X et de Y. Pour les déterminer avec plus d'exactitude, posons:

$$\text{(20)}\qquad \left\{\begin{aligned} X&=\frac{R+2R_1}{R_1-R}+\alpha,\\ Y&=\frac{R_1+2R}{R-R_1}+\beta,\end{aligned}\right.$$

où α et β sont les quantités négligées dans la première approximation.

Introduisant ces nouvelles valeurs de X et de Y dans les équations (16) et (18) et supprimant les termes, qui contiennent les puissances des quantités α, β, t_1, t_2 supérieures à la première, on obtient:

$$\left.\begin{aligned} &R\alpha+R_1\beta-\frac{3}{4}\left[R\left(\frac{R+2R_1}{R_1-R}\right)^2\alpha+R_1\left(\frac{R_1+2R}{R-R_1}\right)^2\beta\right]t_1\\ &\quad+\frac{1}{8}\left[R\left(\frac{R+2R_1}{R_1-R}\right)^5+R_1\left(\frac{R_1+2R}{R-R_1}\right)^5+R+R_1\right]t_1^2\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} &R\alpha+R_1\beta-\frac{3}{4}\left[R\left(\frac{R+2R_1}{R_1-R}\right)^2\alpha+R_1\left(\frac{R_1+2R}{R-R_1}\right)^2\beta\right]t_2\\ &\quad+\frac{1}{8}\left[R\left(\frac{R+2R_1}{R_1-R}\right)^5+R_1\left(\frac{R_1+2R}{R_1-R}\right)^5+R+R_1\right]t_2^2\end{aligned}\right\}=0.$$

Si l'on se borne à la première puissance de t_1 et t_2 dans la détermination des valeurs de α et β, les deux équations précédentes donnent immédiatement l'équation

$$R\alpha+R_1\beta=0.$$

Pour obtenir une seconde équation simple entre α et β soustrayons l'une de l'autre les mêmes équations et, supprimant le facteur commun $\frac{3}{4}(t_2 - t_1)$, nous aurons:

$$R\left(\frac{R+2R_1}{R_1-R}\right)^2\alpha + R_1\left(\frac{R_1+2R}{R-R_1}\right)^2\beta =$$
$$\frac{1}{6}\left[R\left(\frac{R+2R_1}{R_1-R}\right)^5 + R_1\left(\frac{R_1+2R}{R-R_1}\right)^5 + R + R_1\right](t_1+t_2).$$

Remplaçant dans cette équation

$$\beta = -\frac{R}{R_1}\alpha,$$

on a

$$R\left[\left(\frac{R+2R_1}{R_1-R}\right)^2 - \left(\frac{R_1+2R}{R_1-R}\right)^2\right]\alpha =$$
$$\frac{1}{6}\left[R\left(\frac{R+2R_1}{R_1-R}\right)^5 + R_1\left(\frac{R_1+2R}{R-R_1}\right)^5 + R + R_1\right](t_1+t_2),$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{R_1(R+2R_1)(R_1+2R)}{2(R_1-R)^3}(t_1+t_2),$$

et par suite

$$\beta = \frac{R(R+2R_1)(R_1+2R)}{2(R_1-R)^3}(t_1+t_2).$$

En portant ces valeurs de α et β, exactes jusqu'à la première puissance de t_1 et t_2 dans les formules (20), on obtient avec le même degré d'approximation:

$$X = \frac{R+2R_1}{R_1-R}\left[1 + \frac{R_1(R_1+2R)}{2(R_1-R)^2}(t_1+t_2)\right],$$
$$Y = \frac{R_1+2R}{R-R_1}\left[1 + \frac{R(R+2R_1)}{2(R_1-R)^2}(t_1+t_2)\right].$$

§ 12. Substituant les valeurs trouvées de X et Y dans les formules (15), on aura pour la détermination des valeurs ρ et ρ_1 les équations suivantes:

$$\frac{R\cos N}{\rho - R\cos N} = \frac{R+2R_1}{R_1-R}\left[1 + \frac{R_1(R_1+2R)}{2(R_1-R)^2}(t_1+t_2)\right],$$
$$\frac{R_1\cos N}{\rho_1 - R_1\cos N} = \frac{R_1+2R}{R-R_1}\left[1 + \frac{R(R+2R_1)}{2(R-R_1)^2}(t_1+t_2)\right].$$

Si l'on se borne aux termes du premier ordre relativement à t_1 et t_2, on en tire:

$$\rho = \frac{3RR_1\cos N}{R+2R_1}\left[1 - \frac{(R_1+2R)(t_1+t_2)}{6(R_1-R)}\right],$$
$$\rho_1 = \frac{3RR_1\cos N}{R_1+2R}\left[1 - \frac{(R+2R_1)(t_1+t_2)}{6(R-R_1)}\right].$$

Quant à la valeur de la somme $t_1 + t_2$, qui entre dans ces formules, on remarque que les expressions (14) et (17), étant développées suivant les puissances de v, donnent avec approximation jusqu'à la deuxième puissance

$$t_1 = \frac{2\cos N.\sin N}{\cos^2 N} v_1 = 2 \operatorname{tang} N.v_1; \quad t_2 = \frac{2\cos N.\sin N}{\cos^2 N} v_2 = 2 \operatorname{tang} N.v_2.$$

Mais d'après le § 10 on a avec approximation jusqu'à la deuxième puissance de l

$$v_1 = 0{,}365\ K_1 l, \quad v_2 = 0{,}865\ K_1 l,$$

donc avec la même approximation

$$t_1 + t_2 = 2\,(0{,}365 + 0{,}865)\,K_1 \operatorname{tang} N.l = 2{,}460\ K_1 \operatorname{tang} N.l,$$

où d'après (6)

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)}$$

Si dans cette expression de K_1 on remplace ρ et ρ_1 par leurs valeurs trouvées ci-dessus, on a avec approximation jusqu'à la première puissance de t_1 et t_2 exclusivement

$$K_1 = \frac{R - R_1}{3R_1}.$$

et par suite

$$t_1 + t_2 = \frac{2{,}460}{3}\,\frac{R - R_1}{R_1} \operatorname{tang} N.l$$
$$= 0{,}820\,.\,\frac{R - R_1}{R_1} \operatorname{tang} N.l.$$

Substituant cette valeur de $t_1 + t_2$ dans les expressions des valeurs de ρ et ρ_1 trouvées plus haut, nous obtenons

$$\rho = \frac{3RR_1 \cos N}{R + 2R_1}\left[1 + 0{,}137\ \frac{R_1 + 2R}{R_1} \operatorname{tang} N.l\right],$$
$$\rho_1 = \frac{3RR_1 \cos N}{R_1 + 2R}\left[1 - 0{,}137\ \frac{R + 2R_1}{R_1} \operatorname{tang} N.l\right].$$

Tels sont donc les rayons des arcs de cercle, dont l'un forme le profil de la face de la dent de la roue C et l'autre celui du flanc de la dent de roue C_1.

§ 13. Pour déterminer les longueurs de ces arcs, on a d'après le § 8 avec approximation jusqu'à l^3

$$\omega = (K_1 + 1)\,l + K_2 l^2,$$

où ω est la longueur de l'arc de cercle, profil de la face de la dent de la roue C_1, supposant que le rayon de cet arc est pris pour l'unité, et les coefficients K_1 et K_2 d'après le § 6 ont les valeurs suivantes:

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)};$$

$$K_2 = \frac{(\rho - R\cos N)(K_1 + 1)^2 + (R + R_1)\left[\cos N . K_1^2 + \frac{R - \rho\cos N}{\rho + \rho_1}\right]}{2R_1 \sin N}.$$

Remplaçant ρ et ρ_1 par leurs valeurs trouvées dans le § 12, nous supprimons les termes contenant, comme facteurs, l^2 dans l'expression de K_1 et l dans celle de K_2; nous aurons ainsi:

$$K_1 + 1 = \frac{R + 2R_1}{3R_1}\left(1 - 0{,}137\,\frac{R_1 + 2R}{R_1}\operatorname{tang} N . l\right),$$

$$K_2 = \frac{(R + 2R_1)(R_1 + 2R)}{18R_1^2}\operatorname{tang} N.$$

Après la substitution de ces valeurs dans l'expression ci-dessus de ω on obtient avec approximation jusqu'à l^3

$$\omega = \frac{R + 2R_1}{3R_1}\left[1 + \left(\frac{1}{6} - 0{,}137\right)\frac{R_1 + 2R}{R_1}\operatorname{tang} N . l\right] l.$$

Remplaçant dans cette formule ω par $-\omega_1$, l par $-\frac{R}{R_1}l$, R par R_1, ρ par ρ_1 et réciproquement on parvient d'après le § 9 à la formule pour déterminer la longueur de l'arc de cercle, qui forme le profil du flanc de la dent de la roue C_1:

$$\omega_1 = \frac{R_1 + 2R}{3R_1}\left[1 - \left(\frac{1}{6} - 0{,}137\right)\frac{R + 2R_1}{R_1}\operatorname{tang} N . l\right] l,$$

où ω_1 désigne la longueur de l'arc, son rayon étant pris pour l'unité.

On en déduit que la somme

$$\omega + \omega_1$$

est égale à

$$\frac{R + R_1}{R_1}\, l$$

et le produit

$$\rho . \omega$$

avec approximation jusqu'à l^3 se réduit à

$$R\cos N . l + \frac{R(R_1 + 2R)}{6R_1}\sin N . l^2.$$

Cette expression est la même que celle de la corde DE_1 (§ 8), qui résulte de la formule

$$DE_1 = R \cos N.l + R\left(\frac{\omega}{2} + \frac{R - R_1}{6R_1} l\right) \sin N.l,$$

après la substitution de la valeur de ω. On conclut de là, que dans le cas présent subsistent les propriétés que nous avons demontrées (§ 8, § 9) pour le cas, où dans le choix des arcs de cercle formant le profil de l'engrenage il n'y a qu'une seule quantité dont on peut disposer pour diminuer les irrégularités du mouvement.

Nous avons vu dans le § 9 que dans ce cas on peut modifier suivant les exigences de la pratique la direction de la normale commune aux dents qui sont en contact sur la ligne des centres, sans changer les positions choisies sur la circonférence DPP_1 (fig. 6) pour les extrémités des profils de la face de la dent de la roue C et de la partie vive du flanc de la dent de la roue C_1. Au contraire, dans le cas que nous examinons à présent la position de ces extrémités définit complétement la direction de la normale commune mentionnée, puisque d'après le § 8 (fig. 5) on a:

$$N = GDT = GDE + EDT = GDE + \frac{\omega}{2}.$$

En portant l'expression connue de ω, où ρ et ρ_1 doivent être remplacés par leurs valeurs, on trouve une équation, qui détermine l'angle N, si l'angle GDE est donné. Si l'on a égard à ce fait que c'est dans ce cas notamment que l'on obtient la plus grande régularité possible avec des engrenages profilés en arcs de cercle, on conclura de ce qui précède que toutes les fois, lorsqu'on choisit la direction de la normale commune AB conformément aux exigences de la pratique, il faut chercher donner à cette normale la direction qui s'écarte le moins possible de celle que l'équation précédente fait connaître.

Les valeurs trouvées de ω et ω_1 avec approximation jusqu'à l donnent

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1},$$

or d'après le § 8 (fig. 5)

$$\omega = DAE = 2EDT,$$
$$\omega_1 = DBF = 2FDT,$$

donc on a avec approximation jusqu'à la première puissance de l

$$\frac{FDT}{EDT} = \frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1}.$$

D'où il ressort que, si la normale commune aux dents en contact AB a la direction indiquée, leur tangente commune DT divisé l'arc EF en deux parties, qui sont entre elles dans le rapport

$$\frac{R_1+2R}{R+2R_1},$$

ce rapport étant exact jusqu'à la première puissance de l.

On en déduit une construction géométrique très-simple pour déterminer approximativement la direction de la tangente DT, correspondant à celle de la normale AB, pour laquelle les irregularites du mouvement de l'engrenage considéré deviennent les moindres possibles.

Remarquons pour terminer, que les angles que les cordes PD et P_1D (fig. 5) font avec le diamètre passant par le point D ont pour valeurs approximatives jusqu'à l^2, respectivement:

$$\frac{R+2R_1}{6R_1}l,\ \frac{R_1+2R}{6R_1}l.$$

En comparant ces valeurs avec celles des angles

$$PDG=\frac{\omega}{2},\ GDP_1=\frac{\omega_1}{2},$$

qui résultent des formules trouvées, on remarque qu'elles sont respectivement égales avec approximation jusqu'à la deuxième puissance de l. On voit de là, qu'avec ce degré d'approximation le diamètre du cercle DPP_1, passant par le point D, fait avec les cordes DP et DP_1 des angles respectivement égaux à ceux, que la tangente DT aux arcs DE et DF doit faire avec le cordes DE et DF, pour que l'irregularité de la transmission du mouvement par l'engrenage soit réduite au minimum possible.

9.

SUR LES QUADRATURES.

(Liouville. Journal de mathématiques pures et appliquées. II série, T. XIX, 1874, p. 19—34.)

Lu au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon. Séance du 25 août 1873.

Sur les quadratures.

1. Dans l'Ouvrage très-important que M. Hermite vient de publier sur l'Analyse mathématique, l'illustre géomètre donne une nouvelle formule pour évaluer approximativement la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Dans cette formule toutes les valeurs de la fonction $\varphi(x)$ entrent avec un même coefficient; c'est ce qui apporte une différence essentielle entre la formule de M. Hermite et celle de Gauss, et ce qui en rend très-commode l'application numérique. L'utilité des formules approximatives de ce genre m'engage à présenter quelques réflexions sur la recherche de ces formules.

Nous supposerons que, la fonction $F(x)$ étant donnée, on cherche à exprimer le plus près possible les intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, par la formule

$$k\left[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)\right],$$

où k, x_1, $x_2, \ldots x_n$ sont des valeurs qui ne dépendent pas de la fonction $\varphi(x)$. Comme cette formule ne contient que $n+1$ quantités k, x_1, $x_2, \ldots x_n$ dont on puisse disposer, il est impossible de l'identifier avec la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\, \varphi(x)\, dx$$

au delà des termes qui contiennent les n premières dérivées de la fonction $\varphi(x)$, et, par conséquent, on aura

$$(1)\quad \int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx - k\left[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)\right] = k_1\,\varphi^{(n+1)}(0)+k_2\,\varphi^{(n+2)}(0)+\ldots,$$

en designant par k_1, k_2,... les coefficients de $\varphi^{(n+1)}(0)$, $\varphi^{(n+2)}(0)$,... dans l'expression de la différence

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx - k\left[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)\right],$$

que l'on trouve en développant, d'après la formule de Maclaurin, la fonction $\varphi(x)$ sous le signe de l'intégrale et les valeurs $\varphi(x_1)$ $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_n)$ qui sont hors ce signe.

2. Pour trouver, d'après la formule (1), que l'on suppose possible, la valeur du coefficient k et les valeurs x_1, x_2, ..., x_n de la variable x, nous remarquons que cette formule, dans le cas particulieur où

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x},$$

z étant une quantité quelconque, se réduit à l'égalité

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}\,dx - k\left(\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\ldots+\frac{1}{z-x_n}\right) =$$
$$1.2.3\ldots(n+1)k_1 z^{-n-2} + 1.2.3\ldots(n+2)k_2 z^{-n-3} + \ldots$$

où k, k_1, k_2, ..., x_1, x_2, ..., x_n sont des valeurs qui ne dépendent pas de z. D'autre part, en dénotant par $f(z)$ le produit

$$(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\ldots+\frac{1}{z-x_n},$$

et, par suite, la formule précédente se réduit à celle-ci:

$$(2)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x}\,dx = k\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{1.2.3\ldots(n+1)k_1}{z^{n+2}} + \frac{1.2.3\ldots(n+2)k_2}{z^{n+3}} + \ldots$$

En multipliant cette formule par z et en remarquant que, pour $z = \infty$, les valeurs

$$z\int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{z-x}dx = \int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{1-\frac{x}{z}}dx,$$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-\frac{x_1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{x_2}{z}} + \ldots + \frac{1}{1-\frac{x_n}{z}},$$

$$\frac{1.2.3\ldots(n+1)k_1}{z^{n+1}}, \qquad \frac{1.2.3\ldots(n+2)k_2}{z^{n+2}}, \ldots$$

sont respectivement égales à

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx, \quad n, \quad 0, \quad 0, \ldots,$$

on parvient à cette égalité

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx = nk,$$

ce qui nous donne, pour la détermination du coefficient k, la formule suivante:

$$k = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx.$$

3. Pour déterminer la fonction

$$f(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n),$$

nous remarquons que la formule (2), étant intégrée par rapport à z, nous donne

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx = k\log\frac{f(z)}{C} - \frac{1.2.3\ldots nk_1}{z^{n+1}} - \frac{1.2.3\ldots(n+1)k_2}{z^{n+2}} - \ldots,$$

où C est une constante, et de là on trouve

$$f(z)\,e^{-\frac{1.2.3\ldots nk_1}{kz^{n+1}} - \frac{1.2.3\ldots(n+1)k_2}{kz^{n+2}} - \ldots} = Ce^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx}$$

Comme la fonction cherchée

$$f(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)$$

est de degré n et que l'expression

$$e^{-\frac{1.2.3\ldots nk_1}{kz^{n+1}} - \frac{1.2.3\ldots(n+1)k_2}{kz^{n+2}} - \ldots}$$

ne diffère de 1 que par les puissances de z inférieures à z^{-n}, il est clair que la partie entière du premier membre de la formule trouvée est égale à la fonction $f(z)$, et que, par conséquent, on aura

$$f(z) = ECe^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}$$

ou

$$(3) \qquad f(z) = CEe^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx},$$

en désignant par E la partie entière de la fonction mise sous ce signe. Dans cette formule, la valeur de la constante k, comme nous l'avons vu, est donnée par l'équation

$$(4) \qquad k = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx.$$

Quant à la constante C, on trouvera aisément sa valeur en remarquant que le coefficient de z^n, dans la fonction cherchée, est égal à 1; mais nous n'insisterons pas sur la recherche de la valeur de cette constante, vu qu'elle peut être toujours supprimée sans modifier l'équation

$$f(z) = CEe^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx} = 0,$$

dont les racines présentent les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la formule en question

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx = k\left[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)\right].$$

4. Passant aux applications, nous ferons d'abord

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui est le cas de M. Hermite, et où l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$$

se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Pour cette valeur de $F(x)$, on trouve

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

$$\int_{-1}^{+1} F(x) \log(z-x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{\log(z-x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi \log \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2};$$

donc, d'après (4),

$$k = \frac{\pi}{n},$$

et, d'après (3), l'équation $f(z)=0$, qui détermine les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se réduit à

$$Ee^{n \log \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}} = 0 \quad \text{или} \quad E\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n = 0,$$

résultat identique avec celui de M. Hermite, vu que la partie entière de la fonction

$$\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^n$$

est égal à

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arc\cos z).$$

5. Pour montrer une autre application des formules que nous venons de donner, nous poserons maintenant

$$F(x) = 1,$$

ce qui est le cas où l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$$

se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx;$$

intégrale pour laquelle Gauss a donné sa formule de quadrature.

Comme on trouve

$$\int_{-1}^{+1} dx = 2, \quad \int_{-1}^{+1} \log(z-x)\,dx = \log \frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}} - 2,$$

on conclut, d'après le n° 3, que la valeur approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$ sera donnée par la formule

$$k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)],$$

quand on fait $k = \frac{2}{n}$, et que l'on prend pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation

$$Ee^{\frac{n}{2}\left(\log\frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}}-2\right)} = 0 \quad \text{ou} \quad E\frac{(z+1)^{\frac{n(z+1)}{2}}}{(z-1)^{\frac{n(z-1)}{2}}} = 0,$$

équation qu'on peut mettre, par le développement en séries, sous la forme suivante:

$$(5) \qquad Ez^n e^{-\frac{n}{2.3\,z^2}-\frac{n}{4.5\,z^4}-\frac{n}{6.7\,z^6}-\cdots} = 0.$$

6. En donnant à n les valeurs les plus simples, telles que

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,$$

on trouve que, pour ces valeurs de n, l'équation (5) devient respectivement

$$z^2 - \frac{1}{8} = 0,$$

$$z^3 - \frac{1}{2}z = 0,$$

$$z^4 - \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{45} = 0,$$

$$z^5 - \frac{5}{6}z^3 + \frac{7}{72}z = 0,$$

$$z^6 - z^4 + \frac{1}{5}z^2 - \frac{1}{105} = 0,$$

$$z^7 - \frac{7}{6}z^5 + \frac{119}{360}z^3 - \frac{149}{6480}z = 0,$$

et, en resolvant ces équations, on obtient les systèmes suivants des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$n = 2.$

$$x_1 = -0{,}577350,$$

$$x_2 = +0{,}577350;$$

$n = 3.$

$$x_1 = -0{,}707107,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = +0{,}707107;$$

$n = 4.$

$x_1 = -0,794654,$

$x_2 = -0,187592,$

$x_3 = +0,187592,$

$x_4 = +0,794654;$

$n = 5.$

$x_1 = -0,832497,$

$x_2 = -0,374541,$

$x_3 = \quad 0,$

$x_4 = +0,374541,$

$x_5 = +0,832497;$

$n = 6.$

$x_1 = -0,866247,$

$x_2 = -0,422519,$

$x_3 = -0,266635,$

$x_4 = +0,266635,$

$x_5 = +0,422519,$

$x_6 = +0,866247;$

$n = 7.$

$x_1 = -0,883862,$

$x_2 = -0,529657,$

$x_3 = -0,323912,$

$x_4 = \quad 0,$

$x_5 = +0,323912,$

$x_6 = +0,529657,$

$x_7 = +0,883862.$

Avec ces valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la formule

$$\frac{2}{n}\left[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)\right]$$

donne l'expression approximative de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx,$$

qui, dans certains cas, est plus commode pour les applications que ne l'est celle de Gauss; car, dans cette dernière formule, les valeurs $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$ entrent munies de divers coefficients. Comme notre expression de l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx$ n'est exacte que jusqu'aux termes en $\varphi^{(n+1)}(0)$, $\varphi^{(n+2)}(0), \ldots$, on devra y prendre, en général, plus de termes que dans la formule de Gauss. Néanmoins, dans le cas où les valeurs de $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$, d'aprés lesquelles on détermine l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx$, sont affectées d'erreurs inconnues, notablement plus grandes que celle qui résulte des termes rejetés, la formule approchée que nous venons de trouver doit être préférée à celle de Gauss même par rapport au degré de précision, vu que, dans cette formule approchée, la somme des carrés de coefficients, à cause de leur égalité, a la plus petite valeur possible.

7. Revenant au cas résolu par M. Hermite, nous remarquons que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

pour $x=\cos\theta$ se réduit à

$$\int_{0}^{\pi}\varphi(\cos\theta)\,d\theta;$$

donc la formule donnée par lui peut avoir des applications trés-utiles dans la recherche des valeurs approchées du premier terme du développement de $\varphi(\cos\theta)$ en série

$$A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+\ldots$$

Pour trouver une expression pareille du coefficient A_1, on devrait faire, dans les formules du n° 3,

$$F(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or, pour cette valeur de $F(x)$, l'intégrale $\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx$, qui entre dans les formules du n° 3, se réduit à zéro, ce qui fait voir clairement que, pour

le cas en question, ces formules ne sont pas applicables. Nous allons montrer le parti qu'on peut cependant tirer, dans ce cas, de la méthode exposée plus haut.

En remplaçant, dans l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

la fonction $\varphi(x)$ par son développement en série

$$\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1}x + \frac{\varphi''(0)}{1.2}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

le terme du résultat qui contient $\varphi(0)$ s'annule toutes les fois que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$ est égale à zéro; mais il n'en est plus ainsi, évidemment, de son expression sous la forme

$$k\left[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)\right]$$

à moins qu'on ne prenne, dans cette formule, la moitié des termes avec le signe —. Nous allons donc chercher à exprimer la valeur approchée de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F(x) = 0,$$

dans la supposition de

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$$

par la formule

$$k\left[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1}) - \varphi(x_{m+2}) - \ldots - \varphi(x_{2m})\right],$$

où il y a m termes avec le signe + et m termes avec le signe —.

8. Comme, dans la formule

$$k\left[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1}) - \varphi(x_{m+2}) - \ldots - \varphi(x_{2m})\right],$$

il y a $2m+1$ valeurs, savoir: $k, x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$ dont on peut disposer, et que par sa composition, le terme en $\varphi(0)$ s'annule, on peut identifier cette formule avec l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$ jusqu'aux termes qui contiennent les $2m+1$ premières dérivées de $\varphi(x)$, ce qui nous donne l'équation

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)dx = k\left[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \ldots + \varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1}) - \varphi(x_{m+2}) \ldots - \varphi(x_{2m})\right] + k_1\,\varphi^{2m+2}(0) + k_2\,\varphi^{2m+3}(0) + \ldots$$

En suivant la même marche que dans les nos 2, 3, nous trouverons, d'après cette équation, les valeurs des quantités k, x_1, x_2, ..., x_{2m}. En effet, posant

$$\varphi(x)=\frac{1}{z-x},$$

l'équation précédente se réduit à celle-ci:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{z-x}\,dx=k\left(\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}\cdots+\frac{1}{z-x_m}-\frac{1}{z-x_{m+1}}-\frac{1}{z-x_{m+2}}\cdots-\frac{1}{z-x_{2m}}\right)$$
$$+\frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_1}{z^{2m+3}}+\frac{1.2.3\ldots(2m+3)k_2}{z^{2m+4}}+\ldots$$

Faisant ensuite

$$f_0(z)=(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_m),$$
$$f_1(z)=(z-x_{m+1})(z-x_{m+2})\ldots(z-x_{2m}),$$

et remarquant que, pour ces valeurs de $f_0(z)$, $f_1(z)$, on a

$$\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}=\frac{1}{z-x_1}+\frac{1}{z-x_2}+\ldots+\frac{1}{z-x_m},$$
$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}=\frac{1}{z-x_{m+1}}+\frac{1}{z-x_{m+2}}+\ldots+\frac{1}{z-x_{2m}},$$

on peut mettre l'équation sous la forme suivante:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{F(x)}{z-x}\,dx=k\left[\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}-\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right]+\frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_1}{z^{2m+3}}$$
$$+\frac{1.2.3\ldots(2m+3)k_2}{z^{2m+4}}+\ldots,$$

d'où, en intégrant par rapport à z, on tire

$$\int_{-1}^{+1}F(x)\log(z-x)\,dx=k\log\frac{f_0(z)}{f_1(z)}-\frac{1.2.3\ldots(2m+1)k_1}{z^{2m+2}}$$
$$-\frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_2}{z^{2m+3}}-\ldots.$$

La constante introduite par l'intégration se réduit à zéro, vu que tous les termes s'annulent pour $z=\infty$.

D'après cette équation et en faisant, pour abréger,

$$\frac{1.2.3\ldots(2m+1)k_1}{k}=L_1,\quad \frac{1.2.3\ldots(2m+2)k_2}{k}=L_2,\ldots,$$

on trouve

$$\frac{f_0(s)}{f_1(s)}\, e^{-L_1 s^{-2m-2} - L_2 s^{-2m-3} - \dots} = e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x) \log(s-x)\, dx}.$$

Les fonctions $f_0(s)$, $f_1(s)$ étant de même degré, la fraction $\frac{f_0(s)}{f_1(s)}$ est du degré zéro; de plus, l'expression

$$e^{-L_1 s^{-2m-2} - L_2 s^{-2m-3} - \dots}$$

ne diffère de 1 que par les puissances de s inférieures à s^{-2m-1}; par conséquent, l'équation trouvée nous montre que la fraction $\frac{f_0(s)}{f_1(s)}$ ne diffère de l'expression

$$e^{\frac{1}{k}\int_{+1}^{+1} F(x) \log(s-x)\, dx}$$

que par les termes qui renferment les puissances de s moins élevées que s^{-2m-1} et, par suite, moins élevées que le degré de la fraction $\frac{1}{s[f_1(s)]^2}$; car la fonction $f_1(s)$, comme nous l'avons vu, n'est que du degré m. Mais, on le sait, la fraction $\frac{f_0(s)}{f_1(s)}$ ne peut donner une valeur approchée d'une fonction quelconque exacte jusqu'à l'ordre de $\frac{1}{s[f_1(s)]^2}$, à moins qu'elle ne soit l'une des fractions convergentes qu'on trouve par le développement en fraction continue, et que le quotient complet, correspondant à cette fraction convergente, ne soit dépourvu du terme en $\frac{1}{s}$. En partant de là, il est aisé de trouver et la constante k et les fonctions $f_0(s)$, $f_1(s)$, qui déterminent les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2m}$. A cet effet, on développera l'expression

$$e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x) \log(s-x)\, dx}$$

en fraction continue, en s'arrêtant au quotient qui correspond à une fraction convergente dont les termes sont du degré m. Égalant à zéro le coefficient de $\frac{1}{s}$ dans l'expression complète de ce quotient, on aura l'équation qui déterminera la valeur de la constante k, et, en mettant la valeur de k ainsi déterminée dans deux termes de la fraction convergente, on aura les fonctions cherchées $f_0(s)$, $f_1(s)$.

9. Pour montrer, sur un exemple, l'usage de ce que nous venons d'exposer, supposons qu'il s'agisse de trouver l'expression approximative de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} x\varphi(x)\, dx.$$

Pour cela on posera, dans les formules du numéro précédent,

$$F(x) = x.$$

Pour cétte valeur de $F(x)$, on obtient

$$\int_{-1}^{+1} F(x) \log(z - x)\, dx = \int_{-1}^{+1} x \log(z - x)\, dx = \frac{z^2 - 1}{2} \log \frac{z+1}{z-1} - z,$$

$$e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx} = e^{\frac{z^2-1}{2k}\log\frac{z+1}{z-1} - \frac{z}{k}}.$$

En développant la dernière expression en fraction continue, on trouve que le quotient complet, correspondant à une fraction convergente dont les termes sont du premier degré, est égal à

$$3kz + 1 - \left(\frac{3}{5}k - \frac{1}{9k}\right)\frac{1}{z} + \ldots,$$

et que cette fraction est égale à

$$\frac{3kz - 1}{3kz + 1},$$

d'où nous concluons que, dans l'expression approximative de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} x\varphi(x)\, dx$$

par la formule

$$k\left[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right]$$

on doit prendre, pour k, une racine de l'équation

$$\frac{3}{5}k - \frac{1}{9k} = 0,$$

et, pour x_1, x_2, respectivement, les racines des équations

$$3kz - 1 = 0, \quad 3kz + 1 = 0.$$

On trouve ainsi deux valeurs de k:

$$k = +\sqrt{\frac{5}{27}}, \quad k = -\sqrt{\frac{5}{27}}$$

et deux systèmes des valeurs de x_1, x_2:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}};$$

mais de ces doubles valeurs de k, x_1, x_2, il ne résulte évidemment qu'une seule valeur de l'expression cherchée, savoir:

$$\sqrt{\frac{5}{27}}\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)-\varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Pour trouver une expression approximative à quatre termes de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} x\varphi(x)\,dx$$

on prendra le quotient de la même fraction continue qui correspond à la fraction convergente dont les termes sont du second degré. Comme la valeur complète de ce quotient s'exprime par la série

$$105\,k^2 z - \frac{5832\,k^4 - 945\,k^2 + 35}{243\,k^2 - 45}\,\frac{1}{z} + \ldots$$

et qu'il correspond à la fraction convergente

$$\frac{270\,k^2 z^2 - 90\,kz + 10 - 54\,k^2}{270\,k^2 z^2 + 90\,kz + 10 - 54\,k^2},$$

on trouvera les valeurs de la constante k et de x_1, x_2, x_3, x_4 par les équations

$$5832\,k^4 - 945\,k^2 + 35 = 0,$$

$$270\,k^2 z^2 - 90\,kz + 10 - 54\,k^2 = 0,$$

$$270\,k^2 z^2 + 90\,kz + 10 - 54\,k^2 = 0.$$

En les résolvant, on parvient à ces deux expressions approximatives de l'intégrale en question

$$0{,}23937\,[\varphi(0{,}89224) + \varphi(0{,}50030) - \varphi(-0{,}50030) - \varphi(-0{,}89224)],$$

et

$$0{,}32363\,[\varphi(0{,}84905) + \varphi(0{,}18093) - \varphi(-0{,}18093) - \varphi(-0{,}84905)].$$

10. En passant à la recherche des expressions approximatives de l'intégrale

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta \quad \text{ou} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\varphi(x)\,dx,$$

nous poserons dans nos formules

$$F(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pour cette valeur de $F(x)$ on obtient

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx=\int_{-1}^{+1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\log(z-x)\,dx=-\pi\left(z-\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$e^{\frac{1}{k}\int_{-1}^{+1} F(x)\log(z-x)\,dx}=e^{-\frac{\pi}{k}\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)}.$$

Développant la dernière expression en fraction continue, on trouve les fractions convergentes

$$\frac{4kz-\pi}{4kz+\pi},\quad \frac{48k^2z^2-12k\pi z+\pi^2-12k^2}{48k^2z^2+12k\pi z+\pi^2-12k^2},\ldots,$$

qui correspondent aux quotients complets

$$4kz+\pi-\frac{12k^2-\pi^2}{12k}\,\frac{1}{z}+\ldots,\quad 12kz-\frac{720k^4-60\pi^2k^2+\pi^4}{20(12k^2-\pi^2)k}\,\frac{1}{z}+\ldots,$$

d'où, d'après le n° 8: 1°, pour la détermination de k, x_1, x_2 dans l'expression approximative de l'intégrale

$$\int_0^{\pi}\cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta$$

par la formule

$$k\left[\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\right]$$

résultent ces équations

$$12k^2-\pi^2=0,\quad 4kz-\pi=0,\quad 4kz+\pi=0;$$

et 2°, pour la détermination d'une expression semblable à quatre termes, les équations

$$720k^4-60\pi^2k^2+\pi^4=0,$$

$$48k^2z^2-12k\pi z+\pi^2-12k^2=0,$$

$$48k^2z^2+12k\pi z+\pi^2-12k^2=0.$$

Les expressions approximatives de l'intégrale

$$\int_0^{\pi}\cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta,$$

que l'on obtient d'après ces équations, se réduisent à celles qui suivent:

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{12}}\{\varphi(\cos\theta_0) - \varphi[\cos(\pi+\theta_0)]\},$$

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta =$$

$$0{,}151765\pi\{\varphi(\cos\theta_1) + \varphi(\cos\theta_2) - \varphi[\cos(\pi+\theta_1)] - \varphi[\cos(\pi+\theta_2)]\},$$

où

$$\theta_0 = 30°, \quad \theta_1 = 12°, \quad \theta_2 = 48° \text{ *)}.$$

On trouverait des expressions plus approchées de l'intégrale

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta,$$

en prenant plus de termes dans la formule

$$k[\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1}) - \varphi(x_{m+2}) - \ldots - \varphi(x_{2m})].$$

Nous n'insisterons pas sur la recherche de ces formules; nous remarquerons seulement que, en remplaçant dans toutes ces formules les termes de la forme $\varphi(\cos\theta_\lambda)$ par

$$\frac{1}{l}\left[\varphi\left(\cos\frac{\theta_\lambda}{l}\right) + \varphi\left(\cos\frac{2\pi+\theta_\lambda}{l}\right) + \ldots + \varphi\left(\cos\frac{2(l-1)\pi+\theta_\lambda}{l}\right)\right],$$

où l est un nombre entier, on obtient les expressions approximatives de l'intégrale

$$\int_0^\pi \cos l\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta.$$

Ainsi, en partant des formules précédentes, qui donnent les valeurs approchées, à deux et quatre termes, de l'intégrale

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta,$$

on passerait aux expressions approximatives à $2l$ et $4l$ termes de l'intégrale

$$\int_0^\pi \cos l\theta\,\varphi(\cos\theta)\,d\theta,$$

---

*) Hormis cette expression, il existe une autre aussi aux quatres termes, où

$$k = 0{,}245562\pi, \qquad \theta_1 = 24^0, \qquad \theta_2 = 84^0.$$

A. L.

expressions qui peuvent être présentées ainsi:

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}\,l}\sum_{\mu=0}^{\mu=2l}(-1)^{\mu}\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_0}{l}\right),$$

$$\frac{0{,}151765\,\pi}{l}\sum_{\mu=0}^{\mu=2l}(-1)^{\mu}\left[\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_1}{l}\right)+\varphi\left(\cos\frac{\mu\pi+\theta_2}{l}\right)\right],$$

où les signes de sommations s'étendent à $\mu=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 2l-1$.

10.

SUR
LES VALEURS LIMITES DES INTÉGRALES.

(Liouville. Journal de mathématiques pures et appliquées. II série, T. XIX, 1874, p. 157—160.)

Lu au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Lyon. Séance du 27 août 1873.

Sur les valeurs limites des intégrales.

Dans un Mémoire très-intéressant, sous plus d'un rapport, que M. Bienaymé a lu à l'Académie des Sciences, en 1833, et que l'on trouve imprimé dans les *Comptes rendus*, et reproduit dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville (2-e série, t. XII, 1867), sous le titre: *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés*, l'illustre savant donne une méthode qui mérite une attention toute particulière.

Cette méthode consiste dans la détermination de la valeur limite de l'intégrale

$$\int_0^a f(x)\,dx$$

d'après les valeurs des intégrales

$$\int_0^A f(x)\,dx, \quad \int_0^A x\,f(x)\,dx, \quad \int_0^A x^2 f(x)\,dx, \ldots.$$

où $A > a$ et $f(x)$ une fonction inconnue, assujettie seulement à la condition de garder le signe $+$ entre les limites d'intégration. La démonstration simple et rigoureuse de la loi de Bernoulli, que l'on trouve dans ma Note sous le titre: *Des valeurs moyennes**), n'est qu'un des résultats que l'on tire aisément de la méthode de M. Bienaymé, et d'aprés laquelle il est parvenu luimême à démontrer une proposition sur les probabitités, d'où la loi de Bernoulli découle directement.

En cherchant à tirer tout le parti possible sur les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

T. I, p. 687—694.

des valeurs des intégrales

$$\int_A^B f(x)\,dx,\quad \int_A^B x\,f(x)\,dx,\quad \int_A^B x^2\,f(x)\,dx,\ldots\ldots,\quad \int_A^B x^m\,f(x)\,dx,$$

où l'on a

$$A < a,\quad B > b,$$

et où $f(x)$ reste positive, je suis parvenu à reconnaître que ces recherches conduisent à des théorèmes d'un nouveau genre, concernant le développement de l'expression

$$\int_A^B \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

en fraction continue, qui joue un si grand rôle dans la théorie des séries. Voici, par exemple, un de ces théorèmes:

Si $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ *est une des fractions convergentes de*

$$\int_A^B \frac{f(x)}{z-x}\,dx,$$

que l'on trouve en développant cette expression en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha z+\beta+\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2+\ldots}}},$$

et que

$$z_1,\quad z_2,\ldots\ldots,\quad z_l,\quad z_{l+1},\ldots\ldots,\quad z_{n-1},\quad z_n,\ldots\ldots,\quad z_m$$

soient les racines de l'équation

$$\psi(z)=0,$$

rangées suivant leur grandeur: toutes les fois que la fonction $f(x)$ *reste positive entre les limites* $x=A$, $x=B$, *la valeur de l'intégrale*

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,dx$$

surpasse la somme

$$\frac{\varphi(z_{l+1})}{\psi'(z_{l+1})}+\frac{\varphi(z_{l+2})}{\psi'(z_{l+2})}+\ldots\ldots+\frac{\varphi(z_{n-2})}{\psi'(z_{n-2})}+\frac{\varphi(z_{n-1})}{\psi'(z_{n-1})}$$

et reste au-dessous de celle-ci:

$$\frac{\varphi(z_l)}{\psi'(z_l)} + \frac{\varphi(z_{l+1})}{\psi'(z_{l+1})} + \dots + \frac{\varphi(z_{n-1})}{\psi'(z_{n-1})} + \frac{\varphi(z_n)}{\psi'(z_n)}.$$

Comme exemple des problèmes qu'on parvient à résoudre par cette méthode, je citerai celui-ci:

Étant donnés la longueur, le poids, le lieu du centre de gravité et le moment d'inertie d'une droite matérielle de densité inconnue et variable d'un point à l'autre, trouver les limites les plus proches du poids d'un tronçon de cette droite.

En supposant qu'il s'agisse d'évaluer le poids d'un tronçon de la ligne compté d'un de ses bouts, dont la distance du centre de gravité est égale à d, et en désignant par l, p la longueur et le poids de la ligne entière, par k son moment d'inertie autour de l'axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire à celle, par x, z la longueur et le poids du tronçon en question, on parvient à cette solution:

Tant que x est au-dessous de

$$d - \frac{k}{(l-d)p},$$

le poids z reste compris entre

$$0 \quad et \quad \frac{kp}{(d-x)^2 p + k};$$

dans le cas où x surpasse

$$d + \frac{k}{dp},$$

ce poids reste entre les limites

$$p \quad et \quad \frac{(d-x)^2 p^2}{(d-x)^2 p + k};$$

enfin, si x reste compris entre

$$d - \frac{k}{(l-d)p} \quad et \quad d + \frac{k}{dp},$$

la valeur de ce poids est comprise entre les quantités

$$\frac{(x-d)(l-d)p + k}{lx} \quad et \quad \frac{(l+d-x)(l-d)p - k}{l(l-x)}.$$

11.

SUR LES FONCTIONS QUI DIFFÉRENT LE MOINS POSSIBLE DE ZÉRO.

(TRADUIT PAR M. N. KHANIKOF.)

(Liouville. Journal des mathématiques pures et appliquées. II série, T. XIX, 1874, p. 319—346.)

О функціяхъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

(Приложеніе къ XXII тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 1, 1873 г., стр. 1—32.)

(Читано въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 28 ноября 1872 г.)

Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro.

1. J'ai montré, dans le Mémoire *Sur les fonctions semblables à celles de Legendre* *), comment le procédé que ce géomètre a employé **) pour établir la propriété fondamentale des fonctions connues sous son nom pouvait être étendue à d'autres fonctions, plus compliquées, qu'on obtient en développant l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\lambda}\,(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\mu}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

en une série de la forme

$$T_0+T_1 s+T_2 s^2+\ldots\ldots,$$

Jacobi, dans son Mémoire intitulé: *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* ***), déduit la même propriété des fonctions

$$T_0, \quad T_1, \quad T_2, \ldots\ldots$$

à l'aide d'une équation différentielle à laquelle on satisfait au moyen de séries hypergéométriques.

Je me propose ici d'appliquer ces fonctions à une recherche qui montrera plus clairement encore leur rapport intime aux fonctions de Legendre.

Cette application consiste à déterminer les polynômes de la forme

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

qui, sans cesser de croître ou de décroître constamment entre des limites données, diffèrent aussi peu que possible de zéro. Les polynômes de cette

*) T. II, p. 61—68.

**) Exercices du Calcul intégral, t. II, p. 250.

***) Jacobi, Mathematische Werke. Band. III.

espèce, comme nous le verrons, s'expriment à l'aide des fonctions de Legendre uniquement dans le cas où n, le degré du polynôme, est un nombre impair, et le polynôme lui-même est une fonction croissante. Dans tous les autres cas, la détermination de ces polynômes exige l'emploi d'autres fonctions que nous venons de désigner par T_0, T_1, $T_2, \ldots$ et que l'on obtient en développant en série l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\lambda\,(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\mu}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

pour des valeurs de λ et μ différentes de zéro. Les polynômes déterminés de cette façon trouvent une application utile dans les recherches de l'Analyse pure, comme dans les questions de Mécanique pratique, ainsi que nous l'avons montré dans notre Communication du 22 août 1871, faite à Kiev lors de la troisième réunion des naturalistes russes, de même que dans notre article sur le *Régulateur centrifuge*, imprimé à la suite du compte rendu de de l'École technique de Moscou pour l'année 1871.

2. Pour simplifier les formules, nous supposerons que les limites des valeurs de la variable x sont réduites à -1 et $+1$ (ce qu'il est toujours facile de réaliser).

En désignant par $F(x)$ le polynôme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots . + A_{n-1} x + A_n$$

nous ferons remarquer que l'une des conditions de notre problème impose à la fonction $F(x)$ d'être constamment croissante, ou constamment décroissante, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, de sorte que sa dérivée première

$$F'(x)$$

doit conserver toujours le même signe entre ces limites; par conséquent, les valeurs primitives

$$F(-1), \qquad F(+1),$$

qui correspondent aux valeurs

$$x = -1, \qquad x = +1,$$

représenteront les limites entre lesquelles la fonction $F(x)$ variera dans le passage de $x = -1$ à $x = +1$. Pour que le polynôme $F(x)$ puisse différer aussi peu que possible de zéro, en passant de $F(-1)$ à $F(+1)$, il faut que le plus grand des nombres

$$F(-1), \qquad F(+1)$$

soit, en valeur numérique, aussi petit que possible et qu'il ne puisse devenir moindre par aucune variation du polynôme $F(x)$, compatible avec les conditions de la question, qui déterminent le degré et la forme du polynôme

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n$$

ainsi que le signe de sa dérivée $F'(x)$.

Il est facile de voir que le polynôme cherché doit être tel que l'on ait l'égalité

$$F(+1) = -F(-1).$$

En effet, si cette égalité n'a pas lieu, nous n'aurons qu'à retrancher de

$$F(x)$$

la quantité constante

$$\frac{F(+1)+F(-1)}{2},$$

ce qui, évidemment, ne change ni la forme du polynôme $F(x)$, ni la valeur de sa dérivée, et nous obtenons, au lieu des limites anciennes,

$$F(-1), \qquad F(+1)$$

deux nouvelles valeurs que voici:

$$F(-1) - \frac{F(+1)+F(-1)}{2} = \frac{F(-1)-F(+1)}{2},$$

$$F(+1) - \frac{F(+1)+F(-1)}{2} = \frac{F(+1)-F(-1)}{2}.$$

En comparant les carrés de ces quantités avec la moyenne arithmétique des carrés de

$$F(-1), \qquad F(+1),$$

nous verrons que

$$\left(\frac{F(+1)-F(-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{F(-1)-F(+1)}{2}\right)^2 = \frac{F^2(+1)+F^2(-1)}{2} - \left(\frac{F(+1)+F(-1)}{2}\right)^2.$$

D'où il résulte que le carré des nouvelles limites

$$\frac{F(+1)-F(-1)}{2}, \qquad \frac{F(-1)-F(+1)}{2}$$

sera inférieur au plus grand des carrés

$$F^2(-1), \qquad F^2(+1),$$

et que, par suite, les nouvelles limites seront inférieures, en valeur numérique, à la plus grande des anciennes limites. Ainsi nous sommes conduits à admettre que, dans la question qui nous occupe, tous les polynômes cherchés doivent satisfaire à l'égalité

$$F(+1) = -F(-1).$$

Cette égalité nous donne donc les moyens de trouver la valeur des polynômes que nous examinons, à l'aide de la valeur de leur dérivée.

En effet, représentons le polynôme $F(x)$ par l'intégrale

$$F(x) = \int_{-1}^{x} F'(x)\,dx + C$$

et mettons cette expression dans l'égalité trouvée ci-dessus, nous obtenons, pour déterminer la constante C, l'équation que voici:

$$\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx + C = -C.$$

D'où l'on tire

$$C = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx,$$

En mettant cette valeur de C dans l'expression de $F(x)$, on a

$$(1) \qquad F(x) = \int_{-1}^{x} F'(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx.$$

En déterminant les valeurs limites du polynôme $F(x)$ correspondant à $x = \pm 1$, nous trouverons qu'elles sont égales à l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx$$

prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$. Il s'ensuit, de plus, que la plus grande valeur des polynômes que nous avons en vue sera égale à la valeur numérique de l'integrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx.$$

3. Passant à la détermination de la dérivée

$$F'(x),$$

nous ferons observer que, comme nous l'avons dit, c'est une propriété des polynômes que nous considérons d'avoir une dérivée première qui ne change pas de signe entre $x = -1$ et $x = +1$; donc non-seulement toutes les racines de l'équation

$$F'(x) = 0,$$

comprises entre les limites

$$x = -1, \qquad x = +1,$$

doivent être multiples, mais le degré de leur multiplicité doit s'exprimer en nombres pairs.

Or, désignons par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \alpha_m$$

toutes les racines de l'equation

$$F'(x) = 0,$$

supérieures à -1 et inférieures à $+1$, par

$$2\lambda_1, \quad 2\lambda_2, \ldots \; 2\lambda_m$$

les degrés de multiplicité de ces racines, et supposons, comme cela est permis, que l'équation

$$F'(x) = 0$$

ait λ racines égales à $+1$, et λ_0 racines égales à -1; nous allons prouver que la somme

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_m,$$

qui représente le nombre des racines de l'équation

$$F'(x) = 0,$$

ne dépassant pas les limites

$$x = -1, \qquad x = +1,$$

ne saurait être inférieure à $n - 1$, ou au degré de cette équation.

Pour nous en convaincre, admettons le contraire, c'est-à-dire posons

(2) $$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_m < n - 1,$$

et prouvons que dans cette hypothèse il est toujours possible de faire varier le polynôme $F(x)$ sans déranger ni sa forme, ni le signe de sa dérivée $F'(x)$ entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, mais de manière à diminuer la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx,$$

qui détermine la limite de l'écart entre le polynôme cherché et zéro.

Pour le faire voir, nous observerons que, d'après ce que nous venons de dire, l'équation

$$F'(x) = 0,$$

et la suivante

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m} = 0$$

auront, entre les valeurs limites $x = -1$ et $x = +1$, les mêmes racines et avec les mêmes degrés de multiplicité, et, par suite, le rapport

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}}$$

ne changera pas de signe entre $x = -1$ et $x = +1$ et sera compris entre deux quantités distinctes de zéro. Désignons par L_0 la plus petite de ces quantités en valeur numérique, et remarquons que la différence

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}} - L_0$$

pour toutes les valeurs de x inférieures à $+1$ et supérieures à -1, aura le même signe que le rapport

$$\frac{F'(x)}{(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}}$$

et qu'elle lui sera inférieure par sa valeur numérique. La même chose, évidemment, aura lieu pour les expressions

$$F'(x) - L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$
$$F'(x),$$

qu'on déduit des précédentes en les multipliant par

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}.$$

d'où il est clair qu'en soustrayant de $F'(x)$ l'expression

$$L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots.(x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$

nous ne cessons pas de satisfaire à la condition de conserver le même signe à $F'(x)$ entre les limites $x = \pm 1$; mais nous diminuons par là la valeur absolue de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx,$$

qui détermine la limite de l'écart entre le polynôme cherché et zéro.

Quant à la forme du polynôme

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots. + A_{n-1}x + A_n,$$

après avoir fait subir à $F'(x)$ la transformation ci-dessus indiquée, elle restera la même, car, d'après l'inégalité (2), l'expression

$$L_0(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots.(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}$$

ne contiendra pas de puissances de x, supérieures tout au plus à $n-2$.

Nous voyons ainsi qu'en admettant la possibilité de l'inégalité (2) on peut rendre le polynôme $F(x)$ plus approché de zéro, en lui conservant, conformément aux conditions de la question, la forme

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots. + A_{n-1}x + A_n$$

et sans faire varier le signe de sa dérivée première entre les limites $x = -1$ et $x = +1$.

Or cette conclusion est absurde, puisque, par hypothèse, le polynôme en question est celui qui diffère le moins possible de zéro, entre les limites $x = -1$ et $x = +1$.

En observant que cette inégalité, dont le côté gauche est le nombre des racines de l'équation

$$F'(x) = 0,$$

comprises entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, et la partie droite le degré $n-1$ de cette équation, ne peut avoir lieu, non plus, avec un signe d'inégalité contraire au premier, nous sommes conduits à admettre l'égalité

$$\lambda + \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots. + 2\lambda_m = n-1;$$

d'où il résulte que toutes les $n-1$ racines de l'équation

$$F'(x)=0$$

lui seront communes avec l'équation

$$(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}=0,$$

et qu'ainsi l'on a

$$F'(x)=C(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m},$$

où C est un facteur constant.

Pour trouver la valeur de ce facteur, nous observons que, le polynôme cherché étant de la forme

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

sa dérivée sera

$$F'(x)=nx^{n-1}+(n-1)A_1x^{n-2}+(n-2)A_2x^{n-3}+\ldots+A_{n-1},$$

ce qui, étant comparé à l'expression ci-dessus de $F'(x)$, nous donne

$$n=C.$$

Par conséquent, $F'(x)$ peut être représentée par la formule que voici:

$$F'(x)=n(x-1)^{\lambda}(x+1)^{\lambda_0}(x-\alpha_1)^{2\lambda_1}(x-\alpha_2)^{2\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{2\lambda_m}.$$

Si maintenant on désigne par

$$q,\quad q_0$$

es quotients, et par

$$\rho,\quad \rho_0$$

les restes qu'on obtient en divisant les exposants

$$\lambda,\quad \lambda_0$$

par 2, cette égalité pourra être mise sous la forme

$$F'(x)=n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}\Big[(x-1)^{q}(x+1)^{q_0}(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(x-\alpha_m)^{\lambda_m}\Big]^2,$$

ou bien

(3) $$F'(x)=n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}.\,U^2,$$

U étant un polynôme donné par la formule

$$(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots\ldots(x-\alpha_m)^{\lambda_m}=U.$$

4. Les nombres ρ et ρ_0 de la formule (3) étant les restes de la division de λ et λ_0 par 2, ils ne peuvent avoir que les valeurs

$$0,\quad 1,$$

et il est très-aisé de voir, dans chaque cas particulier, d'après la forme du nombre n, degré du polynôme cherché $F(x)$, et d'après le signe de sa dérivée première $F'(x)$, entre $x=-1$ et $x=+1$, lequel de ces deux nombres doit être adopté pour ρ et ρ_0 dans l'expression de $F'(x)$ par la formule (3)

$$F'(x)=n(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}U^2.$$

En effet, si n, degré du polynôme

$$F(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

est un nombre impair, sa dérivée $F'(x)$ sera de degré pair, et dans ce cas l'égalité (3), où U^2 est aussi une fonction de degré pair, indique que le facteur

$$(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}$$

doit aussi être une fonction de degré pair; mais comme il n'est possible de satisfaire à cette condition, ni dans l'hypothèse de

$$\rho=0 \quad \text{et} \quad \rho_0=1,$$

ni dans celle de

$$\rho=1 \quad \text{et} \quad \rho_0=0,$$

on est forcé d'admettre que, dans ce cas, on aura ou

$$\rho=0 \quad \text{et} \quad \rho_0=0,$$

ou bien

$$\rho=1 \quad \text{et} \quad \rho_0=1.$$

Pour décider lequel de ces deux systèmes de valeurs de ρ et ρ_0 doit être adopté, nous observerons que le premier nous donne, d'après la formule (3), l'expression

$$F'(x)=n\,U^2,$$

et le second

$$F'(x) = n(x-1)(x+1)U^2,$$

et qu'ainsi, la variable x demeurant comprise entre -1 et $+1$, dans le premier cas, $F'(x)$ aura une valeur positive, et que, dans le second cas, elle aura une valeur négative. De cette façon, il est clair que les valeurs

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0$$

doivent être adoptées dans le cas, où $F(x)$ sera une fonction constamment croissante entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, et les valeurs

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

dans le cas, où $F(x)$ sera une fonction constamment décroisante.

Passant à la considération du cas où n est pair, nous observerons que, dans cette hypothèse, le degré de la dérivée première de $F(x)$ sera impair, et, par suite, pour satisfaire à l'égalité (3), nous devons assigner à ρ et ρ_0 les valeurs que voici: ou bien

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1,$$

ou *vice versâ*

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0.$$

Or, comme pour ces valeurs de ρ et ρ_0 la formule (3) devient respectivement

$$F'(x) = n(x+1)U^2$$
$$F'(x) = n(x-1)U^2,$$

et que la première de ces deux expression reste constamment positive depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, et la seconde constamment négative pour les mêmes valeurs de x, nous concluons que, dans le cas de n pair, on a

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 1,$$

si $F(x)$ est un polynôme toujours croissant, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, et

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0,$$

quand $F(x)$ décroîtra constamment entre les mêmes limites.

5. Pour déterminer le polynôme U, qui figure dans l'expression ci-dessus de $F'(x)$, nous ferons remarquer que, d'après le n° 3, ce polynôme est un produit de la forme

$$(x-1)^q (x+1)^{q_0} (x-\alpha_1)^{\lambda_1} (x-\alpha_2)^{\lambda_2} \ldots . (x-\alpha_m)^{\lambda_m};$$

par conséquent, il a toujours la forme

$$U = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1} x + B_l,$$

et la valeur du degré l s'obtient à l'aide de l'égalité (3), qui donne, entre les exposants, la relation

$$(4) \qquad n - 1 = \rho + \rho_0 + 2l,$$

D'un autre côté nous savons, par le n° 3, que la limite de l'écart entre zéro et le polynôme cherché $F(x)$, depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, est égale à la valeur numérique de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)dx;$$

mais cette intégrale (3) se réduit à

$$\frac{(-1)^\rho n}{2}\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0}(1-x)^\rho U^2 dx,$$

si l'on y met pour $F'(x)$ son expression (3), et la valeur numérique de cette dernière intégrale est évidemment

$$\frac{n}{2}\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0}(1-x)^\rho U^2 dx.$$

Donc, en désignant par L la limite de l'écart entre zéro et le polynôme cherché $F(x)$, nous aurons

$$(5) \qquad L = \frac{n}{2}\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0}(1-x)^\rho U^2 dx.$$

Ainsi, pour diminuer, autant que possible, la quantité L, sans changer toutefois les conditions de la question, nous aurons à déterminer le polynôme U de façon à rendre minimum l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0}(1-x)^\rho U^2 dx.$$

Il est facile d'y parvenir à l'aide des fonctions

$$T_0, \quad T_1, \quad T_2, \ldots . T_l, \ldots . ,$$

qu'on obtient en développant l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\lambda\ (1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^\mu}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$

en une série de la forme

$$T_0+T_1 s+T_2 s^2+\ldots . + T_l s^l+\ldots .$$

En effet, on sait que ces fonctions sont de degrés 0, 1, 2,..., l,..., et qu'en général pour tout m distinct de m_1 elles satisfont à l'équation

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m T_{m_1}}{(1+x)^\lambda (1-x)^\mu}\, dx = 0;$$

de plus, il résulte, de ce que nous avons établi dans notre Mémoire *Sur les fractions continues* *), que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z^2}{(1+x)^\lambda (1-x)^\mu}\, dx$$

Z étant de la forme

$$x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots + B_{l-1} x + B_l$$

acquiert une valeur *minimum* lorsque le polynôme Z ne diffère de la fonction T_l que par un facteur constant. Nous en concluons donc que le polynôme

$$U = x^l + B_1 x^{l-1} + B_2 x^{l-2} + \ldots . + B_{l-1} x + B_l,$$

qui correspond à la valeur minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^\rho\, U^2\, dx,$$

sera donné par la formule

$$U = C \,.\, T_l,$$

en faisant

$$\lambda = -\rho_0, \quad \mu = -\rho,$$

---

*) T. I, pag. 203—230.

dans l'expression de la fonction T_l, qui nous est fournie par le développement en série

$$T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots + T_l s^l + \dots$$

de l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\lambda}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{\mu}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}.$$

Désignant par

$$K_l$$

le coefficient de x^l dans la fonction

$$T_l$$

et remarquant que cette puissance de x doit figurer dans le polynôme U avec un coefficient égal à l'unité, nous en concluons que l'expression que nous venons de trouver pour U entraîne l'égalité

$$1 = CK_l;$$

d'où l'on tire

$$C = \frac{1}{K_l};$$

et, par suite, le polynôme U est complètement déterminé par l'équation

$$U = \frac{1}{K_l} T_l, \tag{6}$$

où, comme nous venons de le dire, la fonction T_l s'obtient en développant l'expression

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho_0}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}.$$

Or, comme ce développement peut être représenté par l'égalité que voici:

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho_0}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1-2sx+s^2}} = \sum_0^{\infty} T_m s^m,$$

en désignant par

$$K_m, \quad K'_m, \dots$$

les coefficients de

$$x^m, \quad x^{m-1}, \dots$$

dans la fonction T_m pour une valeur quelconque de m, nous aurons

$$\frac{(1+s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho_0}(1-s+\sqrt{1-2sx+s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1-2sx+s^2}}$$
$$=\sum_0^\infty (K_m x^m + K'_m x^{m-1} + \ldots\ldots) s^m,$$

quelles que soient les valeurs de s et x. Donc, si l'on pose

$$x=\frac{\alpha}{s}$$

et si l'on fait ensuite

$$s=0,$$

l'égalité ci-dessus se réduit à la formule

$$\frac{(1+\sqrt{1-2\alpha})^{-\rho-\rho_0}}{\sqrt{1-2\alpha}}=\sum_0^\infty K_m \alpha^m.$$

Cette formule nous montre que K_l, coefficient de x^l dans la fonction T_l, sera identique au coefficient de α^l dans le développement en série de l'expression

$$\frac{(1+\sqrt{1-2\alpha})^{-\rho-\rho_0}}{\sqrt{1-2\alpha}}.$$

Mais comme on sait, par ce que nous avons dit dans le n° 4 sur les nombres ρ_0 et ρ, la somme $\rho+\rho_0$ ne peut être que zéro, 1 ou 2; l'expression

$$\frac{(1+\sqrt{1-2\alpha})^{-\rho_0-\rho}}{\sqrt{1-2\alpha}},$$

pour ces valeurs, peut être developpée en séries

$$1+\frac{1}{1}\alpha+\frac{1.3}{1.2}\alpha^2+\ldots\ldots+\frac{1.3.5\ldots.(2l-1)}{1.2.3\ldots..l}\alpha^l+\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.1.2}\alpha+\frac{1.3.5}{2.1.2.3}\alpha^2+\ldots\ldots+\frac{1.3.5\ldots.(2l+1)}{2.1.2.3\ldots(l+1)}\alpha^l+\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2.1.3}{3.1.2}\alpha+\ldots\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{l+1}{l+2}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2l+1)}{1.2.3\ldots.(l+1)}\alpha^l+\ldots\ldots,$$

par suite, le coefficient K_l, selon que l'on pose

$$\rho+\rho_0=0,$$
$$\rho+\rho_0=1,$$
$$\rho+\rho_0=2,$$

aura les trois valeurs que voici:

$$(7)\qquad \begin{cases} K_l = \dfrac{1.3.5\ldots.(2l-1)}{1.2.3\ldots.l}, \\[2ex] K_l = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1.3.5\ldots.(2l+1)}{1.2.3\ldots.(l+1)}, \\[2ex] K_l = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1.3.5\ldots.(2l+1)}{1.2.3\ldots.(l+1)}\cdot\dfrac{l+1}{l+2}. \end{cases}$$

6. D'après toutes les recherches précédentes, il sera aisé de trouver, dans chaque cas particulier, un polynôme $F(x)$ de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots . + A_{n-1} x + A_n,$$

qui, tout en restant toujours croissant ou décroissant depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, diffère le moins possible de zéro entre ces mêmes limites.

Nous commencerons par déterminer les nombres ρ et ρ_0 en observant que, d'après le n° 4, on a, n étant impair,

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

ou bien

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1,$$

selon que le polynôme cherché croîtra ou décroîtra constamment entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, et que, dans le cas de n pair, ces mêmes nombres seront

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1,$$

ou bien

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0,$$

selon que le polynôme cherché sera constamment croissant ou constamment décroissant pour toutes les valeurs de x depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$.

Connaissant ρ et ρ_0, nous trouvons, à l'aide de l'équation (4),

$$(8)\qquad l = \frac{n - \rho - \rho_0 - 1}{2},$$

puis nous cherchons la valeur de la fonction T_l, coefficient de s^l dans le développement de l'expression

$$\frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho_0}\,(1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^{-\rho}}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}$$

selon les puissances ascendantes de s, et la valeur du coefficient K_l, par la

formule (7). Les valeurs de T_l et de K_l étant connues, à l'aide des équations (3) et (6), dont on élimine la fonction U, nous déterminons $F'(x)$, dérivée du polynôme cherché,

$$F'(x) = \frac{n}{K_l^2}(x+1)^{\rho_0}(x-1)^{\rho}\,.\,T_l^2;$$

mettant cette valeur à la place de $F'(x)$ dans l'équation (1), nous obtenons enfin, pour l'expression du polynôme cherché, la formule que voici:

$$\frac{n}{K_l^2}\left[\int_{-1}^{x}(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}T_l^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_0}T_l^2\,dx\right].$$

Nous trouverons ainsi le polynôme cherché, qui, jouissant de la propriété de croître ou de décroître constamment depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$, différera de zéro moins que tous les autres polynômes de la même forme.

Maintenant, pour calculer la valeur de L, limite des écarts de ce polynôme, nous observerons que la formule (5), en y mettant l'expression de U tirée de l'équation (6), nous donne

$$L = \frac{n}{2K_l^2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}T_l^2\,dx,$$

ou bien, en mettant pour n sa valeur tirée de l'équation (4), c'est-à-dire la somme $2l + \rho + \rho_0 + 1$,

$$L = \frac{2l+\rho+\rho_0+1}{2K_l^2}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}T_l^2\,dx.$$

Nous observerons ensuite que, d'après ce que nous avons établi, dans notre Mémoire *Sur les fonctions semblables aux fonctions de Legendre* *), sur la réduction de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sum_0^{\infty}T_m s^m.\sum_0^{\infty}T_m t^m}{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu}}\,dx$$

*) T. II, p. 61—68.

à l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{2^{\lambda+\mu+1}(1-stx)^{\mu}}{x^{\lambda}(1-x)^{\mu}(1-stx^2)}\,dx,$$

la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}\,T_l^2\,dx$$

qui entre dans l'expression de L, sera le coefficient de $(st)^l$ dans le développement de la formule intégrale

$$\int_0^1 \frac{2^{-\rho_0-\rho+1}(1-stx)^{-\rho}}{x^{-\rho_0}(1-x)^{-\rho}(1-stx^2)}\,dx$$

suivant les puissances ascendantes de st. Or, comme cette intégrale devient

$$\frac{1}{\sqrt{st}}\log\frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}} \quad \text{pour} \quad \rho=0 \quad \text{et} \quad \rho_0=0,$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(st)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{1-\sqrt{st}}{1+\sqrt{st}}-\frac{\log(1-st)}{s^2t^2}\right] \quad \text{pour} \quad \rho=1, \ \rho_0=1,$$

et

$$-\frac{1}{2st}\log(1-st), \quad \text{pour} \quad \rho=0 \quad \text{et} \quad \rho_0=1$$

de même que pour $\rho = 1$ et $\rho_0 = 0$, et que ces trois expressions se développent en trois séries que voici:

$$2+\frac{2}{3}st+\frac{2}{5}(st)^2+\ldots\ldots+\frac{2}{2l+1}(st)^l+\ldots\ldots,$$

$$\frac{1.}{2.2.3}+\frac{2}{2.3.5}st+\frac{3}{2.4.7}(st)^2+\ldots\ldots+\frac{l+1}{2(l+2)(2l+3)}(st)^l+\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}st+\frac{1}{6}(st)^2+\ldots\ldots+\frac{1}{2(l+1)}(st)^l+\ldots\ldots,$$

les valeurs de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}(1+x)^{\rho_0}(1-x)^{\rho}\,T_l^2\,dx$$

seront pour les trois systèmes de valeurs de ρ et ρ_0 que nous venons de mentionner,

$$\frac{2}{2l+1}, \quad \frac{l+1}{2(l+2)(2l+3)}, \quad \frac{1}{2(l+1)}.$$

En mettant ces valeurs dans l'expression de L à la place de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\rho_0} (1-x)^{\rho} T_l^2 dx$$

qui y figure, et en remplaçant K_l par ses valeurs tirées des équations (7), nous obtenons pour la valeur de L les trois expressions que voici:

$$L = \left(\frac{1.2.3.\ldots\ldots l}{1.3.5.\ldots(2l-1)}\right)^2,$$

$$L = \left(\frac{1.2.3.\ldots(l+1)}{1.3.5.\ldots(2l+1)}\right)^2 \cdot \frac{l+2}{l+1},$$

$$L = 2\left(\frac{1.2.3.\ldots(l+1)}{1.3.5.\ldots(2l+1)}\right)^2,$$

correspondantes aux trois hypothèses sur les valeurs de ρ et de ρ_0

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1,$$

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1, \quad \text{ou bien} \quad \rho = 1, \quad \rho_0 = 0;$$

mais, d'après (8), ces trois systèmes d'hypothèses sur les valeurs de ρ et ρ_0 nous donnent

$$l = \frac{n-1}{2}, \quad l = \frac{n-3}{2}, \quad l = \frac{n-2}{2},$$

et par suite les expressions ci-dessus de L se réduisent à

$$L = \left(\frac{1.2.3.\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5.\ldots(n-2)}\right)^2,$$

$$L = \left(\frac{1.2.3.\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5.\ldots(n-2)}\right)\frac{n+1}{n-1},$$

$$L = 2\left(\frac{1.2.3.\ldots\ldots\frac{n}{2}}{1.3.5.\ldots(n-1)}\right)^2.$$

Les deux premières de ces expressions de L obtenues dans les hypothèses

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1,$$

et se rapportant toutes deux, d'après le n° 6, au cas de n impair, peuvent être remplacées par une seule formule

$$L = \left(\frac{1.2.3.\ldots.\frac{n-1}{2}}{1.3.5.\ldots.(n-1)}\right)^2 \frac{n+1}{n \pm 1},$$

qui se réduit à la première ou à la seconde, selon que dans $n \pm 1$ on prend le signe $+$ ou le signe $-$. Or, comme la première des trois expressions ci-dessus de L correspond à l'hypothèse

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

c'est-à-dire (d'après le n° 5) au cas, où le polynôme cherché ne cesse de croître entre les limites de $x = -1$ et $x = +1$, et que la seconde de ces expressions a été obtenue dans l'hypothèse de

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1,$$

c'est-à-dire en admettant que le polynôme cherché décroit constamment entre les limites de $x = -1$ et $x = +1$, nous concluons que l'on doit garder, dans la formule

$$L = \left(\frac{1.2.3.\ldots.\frac{n-1}{2}}{1.3.5.\ldots.(n-2)}\right)^2 \frac{n+1}{n \pm 1},$$

le signe $+$ ou le signe $-$, selon que le polynôme cherché ne cesse de croître ou de décroître entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, bien entendu dans le cas où n, le degré de ce polynôme, est un nombre impair.

Quant à la détermination de L dans les cas de n pair, la valeur est donnée par la troisième expression de L, à savoir:

$$L = 2\left(\frac{1.2.3.\ldots\ldots.\frac{n}{2}}{1.3.5.\ldots.(n-1)}\right)^2;$$

car elle a été obtenue en faisant

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1$$

ou bien

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0.$$

7. Les polynômes de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

déterminés conformément à ce qui vient d'être dit, différeront moins de zéro, entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, que tous les polynômes de la même espèce, et qui seront, comme eux, constamment croissants ou constamment décroissants entre les limites indiquées de la variable x. En d'autres termes, l'écart entre zéro et tout polynôme satisfaisant aux mêmes conditions ne saurait être inférieur à L, limite des écarts entre zéro et la valeur des polynômes que nous examinons. Les valeurs de L que nous venons de trouver nous permettent d'énoncer le théorème suivant:

Théoréme.

Si un polynôme de la forme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

ne cesse de croître ou de décroître depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$ sa valeur numérique ne saurait être, dans ces limites, inférieure à

$$2\left(\frac{1.2.3.\ldots\ldots.\frac{n}{2}}{1.3.5.\ldots(n-1)}\right)^2, \quad \textit{si } n \textit{ est un nombre pair,}$$

ou bien à

$$\left(\frac{1.2.3.\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5.\ldots(n-2)}\right)^2 \frac{n+1}{n \pm 1}, \quad \textit{si } n \textit{ est impair.}$$

Dans la dernière formule, il faut prendre dans l'expression $n \pm 1$ le signe $+$ ou le signe $-$, selon que le polynôme cherché croît ou décroît depuis $x = -1$ jusqu'à $x = +1$.

Ce théorème nous permettra d'en déduire un autre plus simple, en remplaçant les valeurs exactes de L par des valeurs approchées, mais inférieures aux premières. En effet, ces valeurs approchées s'obtiennent aisément à l'aide de la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m+2}{2m+1}\cdot\frac{2m+2}{2m+3}\cdots$$

Notamment, si l'on fait

$$X = \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2}\cdot\frac{(2m+2)(2m+4)}{(2m+3)^2}\cdots$$

et

$$Y = \frac{(2m+2)^2}{(2m+1)(2m+3)}\cdot\frac{(2m+4)^2}{(2m+3)(2m+5)}\cdots,$$

l'expression de $\frac{\pi}{2}$ devient

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdot\frac{2m}{2m-1}X,$$

et

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}Y;$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{1.2.3.........m}{1.3.5....(2m-1)}\right)^2=\frac{2m\pi}{2^{2m+1}X}$$

et

$$\left(\frac{1.2.3..........m}{1.3.5....(2m-1)}\right)^2=\frac{(2m+1)\pi}{2^{2m+1}Y};$$

mais comme les valeurs trouvées ci-dessus pour X et Y peuvent être miscs sous les formes

$$X=\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2m+3)^2}\right)\cdots,$$

$$Y=\left(1+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\right)\left(1+\frac{1}{(2m+3)(2m+5)}\right)\cdots,$$

il est évident que

$$X<1,\quad Y>1.$$

Donc en supprimant, dans les équations précédentes, les termes de X et Y, nous obtenons les inégalités

$$\left(\frac{1.2.3..........m}{1.3.5....(2m-1)}\right)^2>\frac{2m\pi}{2^{2m+1}},$$

et

$$\left(\frac{1.2.3..........m}{1.3.5....(2m-1)}\right)^2<\frac{(2m+1)\pi}{2^{2m+1}}.$$

Ainsi la valeur de

$$\left(\frac{1.2.3..........m}{1.3.5....(2m-1)}\right)^2$$

sera comprise entre deux produits qu'on obtient en multipliant

$$\frac{\pi}{2^{2m+1}}$$

par $2m$ et $2m+1$; donc cette valeur sera égale à $\frac{\pi}{2^{2m+1}}$, multipliée par une certaine valeur moyenne entre $2m$ et $2m+1$; mais, comme cette moyenne peut être représentée par $2m+\theta$, où l'on a $\theta>0$ et <1, nous pouvons remplacer les dernières inégalités par l'équation

$$\left(\frac{1.2.3..........m}{1.3.5....(2m-1)}\right)^2=\frac{(2m+\theta)\pi}{2^{2m+1}}.$$

En faisant dans cette formule

$$m = \frac{n-1}{2}$$

pour n impair, et

$$m = \frac{n}{2}$$

pour n pair, nous obtenons

$$\left(\frac{1.2.3\ldots\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots.(n-2)}\right)^2 = \frac{\pi}{2^n}(n-1+\theta),$$

et

$$\left(\frac{1.2.3\ldots\ldots\ \frac{n}{2}}{1.3.5\ldots.(n-1)}\right)^2 = \frac{\pi}{2^{n+1}}(n+\theta).$$

Or, comme la valeur de θ n'est limitée que par zéro et 1, et que la différence $1 - \theta$ se trouve dans le même cas, cette différence pourra être remplacée dans la formule ci-dessus par θ, ce qui nous permettra de simplifier les formules où figure cette différence et d'écrire

$$\left(\frac{1.2.3\ldots\ldots\frac{n-1}{2}}{1.3.5\ldots.(n-2)}\right)^2 = \frac{\pi}{2^n}(n-\theta).$$

Comparant les égalités que nous venons d'obtenir avec les expressions de L du nº 6, nous voyons que ces dernières peuvent être remplacées par

$$L = \frac{n+1}{n\pm1}\,\frac{n-\theta}{2^n}\,\pi, \quad L = \frac{n+\theta}{2^n}\,\pi.$$

En examinant ces valeurs de L, nous remarquons qu'on obtient la limite inférieure de L par la formule

$$L = \frac{n+1}{n\pm1}\,\frac{n-\theta}{2^n}\,\pi,$$

en y faisant $\theta = 1$ et en prenant ± 1 avec le signe $+$, de façon que cette valeur limite devient

$$\frac{n-1}{2^n}\,\pi.$$

On voit ainsi que L surpassera toujours

$$\frac{n-1}{2^n}\,\pi,$$

et nous sommes amenés au théorème que voici:

Théorème.

La valeur numérique du polynôme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

depuis $x = -1$ *jusqu'à* $x = +1$ *doit surpasser* $\frac{n-1}{2^n}\pi$, *si ce polynôme ne cesse de croître ou de décroître entre ces limites de la variable* x.

Si nous faisons dans nos formules

$$x = \frac{2z - a - b}{b - a},$$

et si nous remarquons que, dans ce cas, le polynôme

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n,$$

étant multiplié par

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^n,$$

se réduit à un polynôme de la forme

$$z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots$$

et que les limites de la nouvelle variable z deviennent

$$z = a \text{ pour } x = -1 \quad \text{et} \quad z = b \text{ pour } x = +1,$$

nous déduisons du théorème précédent le nouveau théorème que voici:

Théorème.

La valeur numérique du polynôme

$$z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots$$

depuis $z = a$ *jusqu'à* $z = b$ *doit surpasser* $(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \pi$, *si ce polynôme ne cesse de croître ou de décroître entre ces limites.*

Or, à l'aide de ce dernier théorème il nous sera aisé de conclure:

Théorème.

Si la valeur numérique de $f(b) - f(a)$, *différence de la valeur de*

$$f(z) = z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots$$

pour $z = a$ et $z = b$, ne surpasse pas la limite

$$2\,(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \pi,$$

la dérivée $f'(z)$ change de signe entre $z = a$ et $z = b$.

En effet, si $f'(z)$ ne changeait pas de signe entre $z = a$ et $z = b$, le polynôme

$$\Phi(z) = f(z) - \frac{f(b) + f(a)}{2},$$

ne cesserait d'être, entre ces limites, ou constamment croissant, ou constamment décroissant, de façon que toutes ses valeurs, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, seraient comprises entre ses deux valeurs extrêmes, qui correspondent aux valeurs limites de z que nous venons d'indiquer, et qui se réduisent à

$$\Phi(a) = -\frac{1}{2}\left(f(b) - f(a)\right),$$
$$\Phi(b) = \quad \frac{1}{2}\left(f(b) - f(a)\right).$$

On voit ainsi que, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, la valeur numérique de $\Phi(x)$ ne surpasserait pas celle de

$$\frac{1}{2}\left(f(b) - f(a)\right),$$

c'est-à-dire ne saurait être supérieure, d'après les conditions du théorème énoncé ci-dessus, à

$$\frac{1}{2} \cdot 2\,(n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \pi = (n-1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \pi,$$

ce qui est impossible en vertu du théorème précédent.

Faisons

$$F(z) = (m+1)\int_a^z (z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots.)\,dz,$$

La fonction $F(z)$ se réduit, dans ce cas, au polynôme

$$z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots.,$$

où

$$n = m + 1,$$

et la dérivée première de $F(z)$ est

$$F'(z) = (m+1)\,(z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots.),$$

On a donc

$$F(b) - F(a) = (m+1)\int_a^b (z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots.)\,dz,$$

Nous en concluons le théorème que voici:

Théorème.

L'équation

$$z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots = 0$$

doit nécessairement avoir au moins une racine entre $z = a$ et $z = b$, si la valeur numérique de l'intégrale

$$\int_a^b [z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \ldots .] \, dz$$

ne dépasse pas la valeur de

$$\frac{2m}{m+1} \pi \left(\frac{b-a}{4}\right)^{m+1}.$$

A l'aide du même théorème, il sera aisé d'établir un théorème nouveau concernant la série de fonctions

$$f(z), \quad f'(z), \quad f''(z), \ldots . \, f^{(n-1)}(z), \quad f^n(z),$$

qui servent à déterminer les racines d'après la méthode de Fourier.

Théorème.

Quelle que soit la valeur t, si l'on prend dans l'expression $t \pm 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$ le radical avec un signe contraire à celui de la fraction $\frac{f(t)}{f'(t)}$, le nombre des variations de signes dans la série

$$f(z), \quad f'(z), \quad f''(z), \ldots ., \quad f^{(n-1)}(z), \quad f^{(n)}(z),$$

où

$$f(z) = z^n + A' z^{n-1} + A'' z^{n-2} + \ldots .,$$

ne saurait rester le même, si l'on y met consécutivement pour z la valeur de t et celle de $t \pm 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$.

Ils se présentent plusieurs cas différents dans la démonstration de ce théorème, suivant le signe des quantités $f(t)$ et $f'(t)$. Nous nous bornerons à considérer le cas où ces deux quantités auront le signe $+$; mais le raisonnement que nous suivrons dans cette occasion s'appliquera facilement à tous les autres cas.

En supposant les deux valeurs $f(t)$ et $f'(t)$ positives, nous devrons prendre dans l'expression

$$t \pm 4 \sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$$

le radical avec le signe —, et nous aurons à démontrer que, dans le cas où

$$f(t) > 0, \quad f'(t) > 0,$$

le nombre de variations de signes de la série

$$f(z), \quad f'(z), \quad f''(z), \ldots \; f^{(n-1)}(z), \quad f^{(n)}(z)$$

n'est pas le même pour $z = t$ et pour $z = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$.

Pour le démontrer, nous observerons qu'il est évident que toutes les fois qu'entre les limites indiquées ci-dessus l'une des deux fonctions $f(z)$ ou $f'(z)$, ou toutes les deux à la fois, s'annulent, le nombre des variations de signes dans la série

$$f(z), \quad f'(z), \quad f''(z) \ldots \; f^{(n-1)}(z), \quad f^{(n)}(z)$$

doit varier; quant à l'hypothèse qu'aucune de ces fonctions ne devient zéro entre les limites que nous considérons, il est aisé de démontrer, à l'aide du théorème précédent, qu'elle ne peut avoir lieu.

En effet, si

$$f(t) > 0, \quad f'(t) > 0$$

et si en même temps les équations

$$f(z) = 0, \quad f'(z) = 0,$$

n'avaient pas de racines entre $z = t$, $z = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$, les fonctions

$$f(z), \quad f'(z)$$

devraient conserver, entre ces limites, le signe $+$: donc on aurait

$$f\left(t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right) > 0$$

et

$$f\left(t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right) < f(t),$$

et la valeur numérique de

$$f(t) - f\left(t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right)$$

devrait être inférieure à la valeur numérique de $f(t)$, ce qui, en vertu d'un théorème précédent, est impossible; car la différence

$$f(b) - f(a)$$

pour

$$b = t, \quad a = t - 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}},$$

d'après ce théorème, doit surpasser

$$2(n-1)\pi\left(\frac{b-a}{4}\right)^n = 2(n-1)\pi\left[\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}\right]^n = f(t).$$

En appliquant ce dernier théorème au cas où l'équation

$$z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \ldots . = 0$$

n'a pas de racines imaginaires, et observant que dans ce cas tout changement du nombre des variations de signes de la série

$$f(z), \quad f'(z), \quad f''(z), \ldots . \, f^{(n-1)}(z), \quad f^{(n)}(z)$$

indique la présence d'une racine de l'équation

$$f(z) = 0$$

entre les valeurs de z, nous sommes conduit au théorème que voici:

Théorème.

Quelle que soit la valeur t, on trouvera toujours au moins une racine de l'équation

$$f(z) = z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \ldots . = 0,$$

entre les limites t et $t \pm 4\sqrt[2n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$, en prenant devant ce dernier radical le signe contraire à celui de la fraction $\frac{f(t)}{f'(t)}$, si toutefois l'équation proposée n'a pas de racines imaginaires.

12.

SUR

L'INTERPOLATION DES VALEURS ÉQUIDISTANTES.

(TRADUIT PAR C. A. POSSÉ.)

Объ интерполированіи величинъ равноотстоящихъ.

Приложеніе къ XXV тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 5, 1875 г.

Sur l'interpolation des valeurs équidistantes.

§ 1. Si l'on cherche par la méthode des *moindres carrés* l'expression d'une certaine fonction $f(x)$ sous la forme d'un polynôme, les valeurs de la fonction $f(x)$ dont on se sert pour déterminer son expression étant

$$f(1),\ f(2), \ldots .\ f(m-1),$$

le polynôme cherché, comme on le sait, est donné *) par la formule

$$(1) \qquad \frac{\sum_1^m \varphi_0(x) f(x)}{\sum_1^m \varphi_0^2(x)} \varphi_0(x) + \frac{\sum_1^m \varphi_1(x) f(x)}{\sum_1^m \varphi_1^2(x)} \varphi_1(x) + \cdots\cdot,$$

où

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \ldots .$$

désignent les dénominateurs des fractions convergentes de la somme

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{1}{x-\lambda} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots . + \frac{1}{x-m+1},$$

obtenus par son développement en fraction continue

$$\cfrac{C_0}{A_0 x + B_0 + \cfrac{C_1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{C_2}{A_2 x + B_2 + \ldots}}}.$$

Les fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \ldots .,$$

*) Voir le Mémoire sous le titre: «Sur les fractions continues». T. I, p. 203—230.

comme j'ai déjà indiqué, jouent le même rôle dans *le calcul inverse des différences* que les fonctions de Legendre dans le calcul intégral et, par analogie à ces dernières, peuvent être représentées par la formule *)

$$\varphi_n(x) = \Delta^n (x-1)(x-2)\ldots(x-n)(m+n-1-x)\ldots(m-x),$$

en faisant abstraction des facteurs constants qui se suppriment évidemment dans la formule (1).

Cette expression des fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ldots,$$

simplifie notablement, comme on va le voir, le calcul de toutes les sommes qui figurent dans la formule (1).

§ 2. En abordant la déduction de l'expression mentionnée des fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ldots,$$

convenons de désigner, pour abréger, par $\Phi(x)$ le produit

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n)(m+n-x-1)(m+n-x-2)\ldots(m-x).$$

Ce produit s'annulant pour

$$x=1,\ 2,\ldots\ n,$$
$$x=m+n-1,\ m+n-2,\ldots\ m,$$

toutes les quantités

$$\Phi(x),\ \Phi(x+1),\ldots,\ \Phi(x+n-1)$$

pour $x=1$ et $x=m$ seront égales à zéro, et la même chose aura lieu à l'égard des différences

$$\Delta^{n-1}\Phi(x),\ \Delta^{n-2}\Phi(x+1),\ldots,\ \Delta\Phi(x+n-2)$$

qui se déterminent d'après les valeurs

$$\Phi(x),\ \Phi(x+1),\ldots,\ \Phi(x+n-1).$$

Cela posé, il n'est pas difficile de montrer que la somme

$$\sum_1^m F(x)\,\Delta^n\Phi(x),$$

*) *Sur une nouvelle série.* T. I, p. 381—384.

quelle que soit la fonction $F(x)$, se réduira à la somme

$$(-1)^n \sum_1^m \Phi(x+n)\,\Delta^n F(x).$$

Pour nous en convaincre, remarquons que, transformant la somme

$$\sum_1^m F(x)\,\Delta^n \Phi(x)$$

n fois de suite à l'aide de la formule connue

$$\sum U_x \Delta V_x = U_x V_x - \sum V_{x+1} \Delta U_x,$$

nous trouverons qu'elle se réduit à l'expression suivante:

$$F(x)\Delta^{n-1}\Phi(x) - \Delta F(x)\Delta^{n-2}\Phi(x+1) + \Delta^2 F(x)\Delta^{n-3}\Phi(x+2) + \ldots.$$
$$+ (-1)^{n-1}\Phi(x+n-1)\Delta^{n-1}F(x) + (-1)^n \sum \Phi(x+n)\,\Delta^n F(x).$$

Or, en vertu de ce qu'on a vu à l'égard de la fonction

$$\Phi\,(x+n-1)$$

et des différences

$$\Delta^{n-1}\Phi(x),\ \Delta^{n-2}\Phi(x+1), \ldots.\ \Delta\Phi(x+n-2),$$

tous les termes de la formule précédente hors du signe $\sum$ se réduisent à zéro pour $x=1$ et pour $x=m$; donc on aura dans ces limites

$$(2) \qquad \sum_1^m F(x)\,\Delta^n\Phi(x) = (-1)^n \sum_1^m \Phi(x+n)\,\Delta^n F(x).$$

En faisant

$$F(x)=\varphi_0(x),\ F(x)=\varphi_1(x), \ldots, F(x)=\varphi_{n-1}(x)$$

et remarquant que pour ces valeurs de $F(x)$ on a

$$\Delta^n F(x) = 0,$$

on trouvera

$$\sum_1^m \varphi_0(x)\,\Delta^n\Phi(x)=0,\ \sum_1^m \varphi_1(x)\,\Delta^n\Phi(x)=0, \ldots.\ \sum_1^m \varphi_{n-1}(x)\,\Delta^n\Phi(x)=0.$$

Or, ces égalités, en vertu du § VII du Mémoire cité sur les fractions continues, montrent que dans le développement de la fonction $\Delta^n \Phi(x)$ en série

$$A\varphi_0(x) + B\varphi_1(x) + \dots + G\varphi_{n-1}(x) + H\varphi_n(x)$$

les coefficients

$$A, \ B, \dots \ G$$

se réduisent à zéro, d'où il suit que $\Delta^n \Phi(x)$ ne diffère de $\varphi_n(x)$ que par un facteur constant. Ce facteur, comme il a été dit, se supprime dans la formule (1). En faisant abstraction de ce facteur nous prendrons

$$\varphi_n(x) = \Delta^n \Phi(x),$$

ce qui réduit l'égalité (2) à la suivante

$$\sum_1^m F(x)\varphi_n(x) = (-1)^n \sum_1^m \Phi(x+n)\Delta^n F(x),$$

où

$$\Phi(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n)(m+n-x-1)\dots(m-x).$$

§ 3. Passant à l'évaluation des sommes contenues dans la formule (1), nous introduirons, pour abréger l'écriture, le signe $\Gamma(\mu)$ pour désigner le produit $1.\ 2.\ 3 \dots (\mu-1)$.

A l'aide de cette notation les produits

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n),$$
$$(m+n-x-1)(m+n-x-2)\dots(m-x)$$

seront représentés par

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)}, \quad \frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)},$$

ce qui donne pour les expressions des fonctions $\Phi(x)$, $\varphi_n(x)$

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)} \frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)},$$

$$(3) \qquad \varphi_n(x) = \Delta^n \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)} \frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)},$$

et par suite la transformation précédente de la somme se réduit à la suivante

$$\sum_1^m \varphi_n(x) F(x) = (-1)^n \sum_1^m \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n-x)} \Delta^n F(x).$$

En faisant ici

$$F(x) = f(x),$$

nous trouverons pour l'évaluation des sommes

$$\sum_1^m \varphi_0(x) f(x), \quad \sum_1^m \varphi_1(x) f(x), \quad \sum_1^m \varphi_2(x) f(x), \ldots.$$

la formule suivante

$$\sum_1^m \varphi_n(x) f(x) = (-1)^n \sum_1^m \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n-x)} \Delta^n f(x).$$

En faisant dans la même formule

$$F(x) = \varphi_n(x),$$

nous aurons

$$\sum_1^m \varphi_n^2(x) = (-1)^n \sum_1^m \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n-x)} \Delta^n \varphi_n(x).$$

Or d'après (3)

$$\Delta^n \varphi_n(x) = \Delta^{2n} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)} \frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)},$$

d'ailleurs

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)} = (x-1)\ (x-2) \ldots .\ (x-n),$$

$$\frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)} = (m+n-x-1)\ (m+n-2) \ldots .\ (m-x),$$

donc, dans le produit

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)} \frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)}$$

le terme du plus haut degré en x est égal à

$$(-1)^n x^{2n};$$

il en résulte que la différence d'ordre $2n$ de cette fonction se réduit à la quantité constante

$$(-1)^n\, 2n\, (2n-1) \ldots .3.2.1,$$

ce qu'on peut représenter à l'aide du signe Γ comme il suit:

$$(-1)^n\, \Gamma(2n+1).$$

On en déduit que

$$\Delta^n \varphi_n(x) = (-1)^n \, \Gamma(2n+1),$$

et, par conséquent, la transformation trouvée ci-dessus de la somme

$$\sum_1^m \varphi^2_n(x)$$

nous donne

$$\sum_1^m \varphi^2_n(x) = \Gamma(2n+1) \sum_1^m \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n-x)}.$$

Or, $\Gamma(m-n-x)$ étant infinie pour

$$x = m-n, \; m-n+1, \ldots m-1,$$

tous les éléments de la somme

$$\sum_1^m \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n-x)}$$

à partir de $x = m-n$ se réduisent à zéro, et par conséquent on peut prendre pour limite supérieure de cette somme $m-n$ au lieu de m; en vertu de cela l'égalité précédente se réduit à la suivante

$$(4) \qquad \sum_1^m \varphi_n^2(x) = \Gamma(2n+1) \sum_1^{m-n} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n-x)}.$$

§ 4. Pour déterminer la valeur de la somme, qui figure dans la dernière égalité et dans d'autres pareilles à celle-ci, que nous rencontrerons plus loin, nous allons trouver maintenant l'expression de toutes les sommes de la forme

$$\sum_1^N \frac{\Gamma(x+p-1)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(N-x+q-1)}{\Gamma(N-x)},$$

ce qui est facile à faire à l'aide du binôme de Newton.

Remarquons pour cela que les développements des puissances

$$(1-t)^{-p}, \; (1-t)^{-q}, \; (1-t)^{-p-q}$$

en séries par la formule de Newton à l'aide des signes $\sum$ et Γ peuvent être écrits de la manière suivante:

$$(1-t)^{-p} = \sum \frac{\Gamma(p+\lambda)}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)} t^\lambda,$$

$$(1-t)^{-q} = \sum \frac{\Gamma(q+\mu)}{\Gamma(q)\Gamma(\mu+1)} t^\mu,$$

$$(1-t)^{-p-q} = \sum \frac{\Gamma(p+q+\nu)}{\Gamma(p+q)\Gamma(\nu+1)} t^\nu,$$

les sommations y étant étendues sur toutes les valeurs entières de λ, μ, ν de 0 à ∞. En comparant le produit des deux premières sommes à la dernière nous aurons l'identité

$$\sum \frac{\Gamma(p+\lambda)}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)} t^\lambda \cdot \sum \frac{\Gamma(q+\mu)}{\Gamma(q)\Gamma(\mu+1)} t^\mu = \sum \frac{\Gamma(p+q+\nu)}{\Gamma(p+q)\Gamma(\nu+1)} t^\nu,$$

qui peut être représentée d'une autre manière sous la forme

$$\sum\sum \frac{\Gamma(p+\lambda)}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)} \cdot \frac{\Gamma(q+\mu)}{\Gamma(q)\Gamma(\mu+1)} t^{\lambda+\mu} = \sum \frac{\Gamma(p+q+\nu)}{\Gamma(p+q)\Gamma(\nu+1)} t^\nu.$$

En déterminant ici les termes ayant le facteur t^{N-2}, nous apercevons que dans le premier membre de cette identité le coefficient de t^{N-2} est égal à la somme des valeurs de l'expression

$$\frac{\Gamma(p+\lambda)}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)} \cdot \frac{\Gamma(q+\mu)}{\Gamma(q)\Gamma(\mu+1)},$$

correspondant à toutes les valeurs entières et positives de λ et μ, dont la somme $\lambda+\mu$ est égale à $N-2$, ou, ce qui revient au même, à la somme de toutes les valeurs de cette expression, dans lesquelles

$$\mu = N - 2 - \lambda,$$

λ prenant successivement les valeurs 0, 1, 2, ... $N-2$. On voit d'après cela que le premier membre de l'identité considérée renferme le terme suivant avec la puissance t^{N-2}:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N-1} \frac{\Gamma(p+\lambda)}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)} \frac{\Gamma(q+N-2-\lambda)}{\Gamma(q)\Gamma(N-1-\lambda)} t^{N-2}.$$

D'ailleurs, le terme avec la même puissance de t au second membre de cette idéntité étant

$$\frac{\Gamma(p+q+N-2)}{\Gamma(p+q)\Gamma(N-1)} t^{N-2},$$

nous concluons qu'elle entraîne l'égalité suivante:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=N-1} \frac{\Gamma(p+\lambda)}{\Gamma(p)\Gamma(\lambda+1)} \frac{\Gamma(q+N-2-\lambda)}{\Gamma(q)\Gamma(N-1-\lambda)} = \frac{\Gamma(p+q+N-2)}{\Gamma(p+q)\Gamma(N-1)}.$$

En la multipliant par $\Gamma(p).\Gamma(q)$ et posant

$$\lambda+1=x,$$

nous la réduirons à la forme:

(5) $$\sum_1^N \frac{\Gamma(x+p-1)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(N-x+q-1)}{\Gamma(N-x)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \frac{\Gamma(p+q+N-2)}{\Gamma(N-1)}.$$

En posant ici

$$N = m - n,\ p = n + 1,\ q = n + 1,$$

nous aurons, pour déterminer la somme, renfermée dans la formule (4),

$$\sum_{1}^{m-n} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n-x)} = \frac{\Gamma^2(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m-n-1)},$$

d'où il résulte

$$\sum_{1}^{m} \varphi_n^2(x) = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+2)} \frac{\Gamma^2(n+1)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m-n-1)}.$$

Remplaçant encore $\Gamma(2n+2)$ par $(2n+1)\Gamma(2n+1)$ on aura

$$\sum_{1}^{m} \varphi_n^2(x) = \frac{\Gamma^2(n+1)\Gamma(m+n)}{(2n+1)\Gamma(m-n-1)}.$$

§ 5. Pour déterminer les fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,$$

à l'aide de la formule (3), nous allons déduire préalablement les expressions des différences des fonctions

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p)},\ \frac{\Gamma(q-x)}{\Gamma(q-p-x)}.$$

Calculant les différences du premier ordre, on aura

$$\Delta \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-p+1)} - \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p)};$$

$$\Delta \frac{\Gamma(q-x)}{\Gamma(q-p-x)} = \frac{\Gamma(q-x-1)}{\Gamma(q-p-x-1)} - \frac{\Gamma(q-x)}{\Gamma(q-p-x)}.$$

Remplaçant

$$\Gamma(x+1),\ \Gamma(x-p),\ \Gamma(q-p-x-1),\ \Gamma(q-x)$$

par les quantités équivalentes

$$x\Gamma(x),\ \frac{\Gamma(x-p+1)}{x-p},\ \frac{\Gamma(q-p-x)}{q-p-x-1},\ (q-x-1)\Gamma(q-x-1),$$

nous aurons, après quelques réductions,

$$\Delta \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p)} = p \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p+1)},$$

$$\Delta \frac{\Gamma(q-x)}{\Gamma(q-p-x)} = -p \frac{\Gamma(q-x-1)}{\Gamma(q-p-x)}.$$

En appliquant ces formules à la détermination des différences du 2-me, 3-me etc. ordres, nous trouvons en général

$$\Delta^l \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p)} = p\,(p-1)\ldots.(p-l+1)\,\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p+l)},$$

$$\Delta^l \frac{\Gamma(q-x)}{\Gamma(q-p-x)} = (-1)^l\, p\,(p-1)\ldots.(p-l+1)\,\frac{\Gamma(q-x-l)}{\Gamma(q-p-x)}.$$

Remplaçant le produit

$$p\,(p-1)\ldots.(p-l+1)$$

par

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-l+1)},$$

on obtient

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta^l \dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p)} = \dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-l+1)}\,\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-p+l)}, \\ \Delta^l \dfrac{\Gamma(q-x)}{\Gamma(q-p-x)} = (-1)^l\,\dfrac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-l+1)}\,\dfrac{\Gamma(q-x-l)}{\Gamma(q-p-x)}. \end{cases}$$

Passant à la détermination de la fonction $\varphi_n(x)$ d'après la formule

$$\varphi_n(x) = \Delta^n \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)}\,\frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)},$$

nous allons développer la fonction

$$\frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)}$$

en série à l'aide de la formule

$$F(x) = F(n+1) + \frac{x-n-1}{1}\,\Delta F(n+1) + \frac{(x-n-1)(x-n-2)}{1.\,2}\,\Delta^2 F(n+1) + \ldots,$$

qu'on peut représenter sous la forme suivante, au moyen des signes $\sum$ et Γ,

$$F(x) = \sum \frac{\Gamma(x-n)}{\Gamma(x-n-\lambda)}\,\frac{\Delta^\lambda F(n+1)}{\Gamma(\lambda+1)},$$

la somme étant étendue sur toutes les valeurs entières et positives de λ et $\Delta^0 F(n+1)$ coïncidant avec la fonction initiale $F(n+1)$.

En posant dans cette formule

$$F(x) = \frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)}$$

et remarquant que d'après (6) on a dans ce cas

$$\Delta^\lambda F(x) = (-1)^\lambda\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\lambda+1)}\,\frac{\Gamma(m+n-\lambda-x)}{\Gamma(m-x)},$$

nous aurons

$$\frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)}=\sum(-1)^{\lambda}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-\lambda-1)\Gamma(x-n)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(n-\lambda+1)\Gamma(m-n-1)\Gamma(x-n-\lambda)},$$

ce qui, étant multiplié par

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)}$$

se réduit à ce qui suit:

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)}\frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)}=\sum(-1)^{\lambda}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(n-\lambda+1)\Gamma(m-n-1)}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n-\lambda)}.$$

En déterminant d'après cette formule la différence

$$\Delta^{n}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n)}\frac{\Gamma(m+n-x)}{\Gamma(m-x)},$$

nous trouvons qu'elle s'exprime par

$$\sum(-1)^{\lambda}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-\lambda-1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(n-\lambda+1)\Gamma(m-n-1)}\Delta^{n}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n-\lambda)};$$

Or cette différence étant égale à la fonction

$$\varphi_n(x),$$

et la formule (6) donnant

$$\Delta^{n}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-n-\lambda)}=\frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)},$$

nous obtenons l'expression suivante de la fonction $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n(x)=\sum(-1)^{\lambda}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-\lambda-1)\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma^2(\lambda+1)\Gamma(n-\lambda+1)\Gamma(m-n-1)}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)},$$

où la sommation, comme on a vu, s'étend sur toutes les valeurs entières et positives de λ.

D'ailleurs, le diviseur $\Gamma(n-\lambda+1)$ se réduisant à ∞ à partir de $\lambda=n+1$ et les termes correspondants se réduisant par conséquent à zéro, on pourra prendre pour limite supérieure de la somme $\lambda=n+1$.

§ 6. Substituant les valeurs des sommes

$$\sum_{1}^{m}\varphi_n(x)f(x),\quad\sum_{1}^{m}\varphi_n^2(x)$$

trouvées ci-dessus dans la formule (1) et dénotant généralement par

$$C_{\alpha,\beta}$$

l'expression

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\ldots.(\alpha+1)}{1.2\ldots..\beta},$$

qui représente le coefficient de $a^\alpha b^\beta$ dans le développement de $(a+b)^{\alpha+\beta}$, nous trouvons que le terme général de cette formule peut être représenté comme il suit:

$$(-1)^n\frac{2n+1}{m-1}\frac{\Gamma(m-n-1)}{\Gamma(m-1)\Gamma(n+1)}\frac{\sum_1^m C_{x-1,n}\,C_{m-n-x-1,n}\,\Delta^n f(x)}{C_{m-1,n}}\varphi_n(x)$$

ou

$$\frac{\Gamma(m-n-1)F_n}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-1)}\varphi_n(x),$$

où l'on a posé pour abréger

$$F_n=(-1)^n\frac{2n+1}{m-1}\frac{\sum_1^m C_{x-1,n}\,C_{m-n-x-1,n}\,\Delta^n f(x)}{C_{m-1,n}},$$

Il en résulte que le développement de la fonction $f(x)$ d'aprés la formule (1), arrêté au $(l+1)$-me terme, sera représenté par la somme:

$$\sum_{n=0}^{n=l+1}\frac{\Gamma(m-n-1)F_n}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-1)}\varphi_n(x).$$

Désignant cette valeur approchée de $f(x)$ par $\mathrm{F}(x)$, nous aurons:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{n=l+1}\frac{\Gamma(m-n-1)F_n}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-1)}\varphi_n(x),$$

où, comme on l'a vu, la fonction $\varphi_n(x)$ a la valeur suivante:

$$\varphi_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n+1}(-1)^\lambda\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-\lambda-1)\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma^2(\lambda+1)\Gamma(n-\lambda+1)\Gamma(m-n-1)}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)}.$$

Développant les sommes renfermées dans ces formules nous obtenons $F(x)$ sous la forme d'un polynôme de dégré l; cette expression de $F(x)$ ne diffère que par les notations de celle que nous avons donnée dans la note mentionnée ci-dessus. D'autre part, à l'aide de ces formules, servant pour la détermination de $F(x)$, il est facile de calculer les valeurs

$$F(1),\ \Delta F(1),\ \Delta^2 F(1),\ldots.,$$

comme nous allons voir tout de suite.

En déterminant d'après ces formules les différences

$$\Delta^\mu F(x),\ \ \Delta^\mu\varphi_n(x),$$

μ étant un nombre quelconque nous aurons:

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta^{\mu} F(x) = \sum_{n=0}^{n=l+1} \frac{\Gamma(m-n-1)F_n}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-1)} \Delta^{\mu} \varphi_n(x), \\ \Delta^{\mu} \varphi_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n+1} (-1)^{\lambda} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-\lambda-1)\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma^2(\lambda+1)\Gamma(n-\lambda+1)\Gamma(m-n-1)} \Delta^{\mu} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)}. \end{cases}$$

Or d'aprés (6)

$$\Delta^{\mu} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda+\mu)},$$

ce qui donne, pour $x = 1$,

$$\Delta^{\mu} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\lambda+\mu)}.$$

Le diviseur $\Gamma(\lambda-\mu+1)$ étant infini pour $\lambda-\mu \leqq -1$ et le diviseur $\Gamma(1-\lambda+\mu)$ pour $\lambda-\mu \geqq 1$, la différence

$$\Delta^{\mu} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\lambda)}$$

ne diffère de 0 que pour $\lambda-\mu = 0$, c'est à dire pour $\lambda = \mu$; donc, dans la somme qui représente la valeur de $\Delta^{\mu} \varphi_n(x)$, pour $x = 1$, il ne reste qu'un seul terme, correspondant à $\lambda = \mu$ et dans ce terme la différence

$$\Delta^{\mu} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)},$$

d'après la formule que nous venons de trouver, en vertu le l'égalité $\lambda = \mu$, se réduit à $\Gamma(\mu+1)$. D'aprés cela, en vertu de (7), pour $x = 1$, il résulte

$$\Delta^{\mu} \varphi_n(1) = (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-\mu-1)\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(n-\mu+1)\Gamma(m-n-1)},$$

$$\Delta^{\mu} F(1) = \sum_{n=0}^{n=l+1} (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(m-\mu-1)\Gamma(n+\mu+1)F_n}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(m-1)\Gamma(n-\mu+1)}.$$

Le diviseur $\Gamma(n-\mu+1)$ se réduisant à ∞ pour

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \mu-1,$$

tous les éléments de la somme de $n = 0$ à $n = \mu$ se réduisent à zéro, et par suite on pourra prendre pour sa limite inférieure $n = \mu$, en vertu de quoi, la formule déduite s'écrira comme il suit:

$$\Delta^{\mu} F(1) = (-1)^{\mu} \sum_{n=\mu}^{n=l+1} \frac{\Gamma(m-\mu-1)\Gamma(n+\mu+1)F_n}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(m-1)\Gamma(n-\mu+1)}.$$

§ 7. Dans la formule qui exprime la valeur de la différence

$$\Delta^{\mu} F(1),$$

l'expression

$$(-1)^{\mu} \frac{\Gamma(m-\mu-1)\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(m-1)\Gamma(n-\mu+1)}$$

se réduit à 1 pour

$$\mu = 0,$$

ce qui correspond au cas où $\Delta^{\mu} F(1)$ se réduit à $F(1)$; par suite, la valeur de $F(1)$ sera donnée par la formule

$$F(1) = \sum_{n=0}^{n=l+1} F_n = F_0 + F_1 + \ldots . + F_l.$$

Passant à la recherche des différences $\Delta F(1)$, $\Delta^2 F(1), \ldots$ nous représenterons pour abréger l'expression

$$(-1)^{\mu} \frac{\Gamma(m-\mu-1)\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(m-1)\Gamma(n-\mu+1)}$$

par

$$(\mu, n);$$

d'après cela la formule que nous avons trouvée pour l'évaluation de $\Delta^{\mu} F(1)$ prendra la forme

$$\Delta^{\mu} F(1) = \sum_{n=\mu}^{n=l+1} (\mu, n)\ F_n.$$

Appliquant l'égalité

$$(\mu, n) = (-1)^{\mu} \frac{\Gamma(m-\mu-1)\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(m-1)\Gamma(\mu+1)\Gamma(n-\mu+1)},$$

à la détermination du rapport

$$\frac{(\mu+1, n)}{(\mu, n)}$$

nous trouvons

$$\frac{(\mu+1, n)}{(\mu, n)} = -\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+2)} \frac{\Gamma(m-\mu-2)}{\Gamma(m-\mu-1)} \frac{\Gamma(n+\mu+2)}{\Gamma(n+\mu+1)} \frac{\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(n-\mu)},$$

ce qui se réduit, à cause des égalités

$$\Gamma(\mu+2) = (\mu+1)\,\Gamma(\mu+1),\ \Gamma(m-\mu-1) = (m-\mu-2)\,\Gamma(m-\mu-2),$$

$$\Gamma(n+\mu+2) = (n+\mu+1)\,\Gamma(n+\mu+1),\ \Gamma(n-\mu+1) = (n-\mu)\,\Gamma(n-\mu),$$

à ce qui suit

$$\frac{(\mu+1, n)}{(\mu, n)} = -\frac{(n+\mu+1)(n-\mu)}{(\mu+1)(m-\mu-2)} = -\frac{n(n+1)-\mu(\mu+1)}{(\mu+1)(m-\mu-2)},$$

d'où il résulte

$$(\mu+1, n) = -\frac{n(n+1)-\mu(\mu+1)}{(\mu+1)(m-\mu-2)}(\mu, n).$$

Cette relation entre les quantités

$$(\mu+1, n), \ (\mu, n),$$

y joint l'égalité remarquée ci-dessus

$$(0, n) = 1,$$

donne le moyen de calculer facilement toutes les valeurs du facteur (μ, n) dans la formule

$$\Delta^{\mu} F(1) = \sum_{n=\mu}^{n=l+1} (\mu, n) F_n.$$

En vertu de ce qui précède nous concluons que les quantités

$$F(1), \ \Delta F(1), \ \Delta^2 F(1), \ \Delta^3 F(1), \ldots.$$

dans le cas, où la série (1) est arrêtée au $(l+1)$-me terme, se trouveront à l'aide des formules:

$$(8) \quad \begin{cases} F(1) = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \ldots . + F_l \\ \Delta F(1) = (1,1)F_1 + (1,2)F_2 + (1,3)F_3 + \ldots . + (1,l)F_l, \\ \Delta^2 F(1) = \qquad (2,2)F_2 + (2,3)F_3 + \ldots . + (2,l)F_l, \\ \Delta^3 F(1) = \qquad\qquad (3,3)F_3 + \ldots . + (3,l)F_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

les quantités

$$F_0, F_1, F_2, \ldots . F_l$$

étant données par les formules

$$F_n = (-1)^n \frac{2n+1}{m-1} \frac{\sum_1^m C_{x-1,n} C_{m-n-x-1,n} \Delta^n f(x)}{C_{m-1,n}},$$

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\ldots(\alpha+1)}{1.2\ldots\ldots\beta},$$

et les facteurs

$$\begin{array}{r}(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ldots.(1,l),\\ (2,2),\ (2,3),\ldots.(2,l),\\ (3,3),\ldots.(3,l),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

se déduisant successivement à l'aide de l'égalité

$$(9)\qquad (\mu+1,n)=-\frac{n(n+1)-\mu(\mu+1)}{(\mu+1)(m-\mu-2)}(\mu,n),$$

où l'on pose

$$(0,1)=1,\ (0,2)=1,\ (0,3)=1,\ldots.(0,l)=1.$$

§ 8. Pour montrer sur un exemple l'emploi de nos formules, nous allons les appliquer à l'exemple qui dans la Ballistique de N. Majevsky a été calculé d'après nos anciennes formules. Dans cet exemple les valeurs de la variable x et les valeurs correspondantes de la fonction $f(x)$ sont les suivantes:

$$\begin{array}{ll} x=1; & f(x)=\ \ 0,2020,\\ x=2; & f(x)=\ \ 0,1885,\\ x=3; & f(x)=\ \ 0,1645,\\ x=4; & f(x)=\ \ 0,1434,\\ x=5; & f(x)=\ \ 0,1176,\\ x=6; & f(x)=\ \ 0,0897,\\ x=7; & f(x)=\ \ 0,0581,\\ x=8; & f(x)=\ \ 0,0244,\\ x=9; & f(x)=-0,0122,\end{array}$$

En calculant d'aprés ces valeurs de $f(x)$ ses différences de divers ordres, formons la table suivante:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1	0,2020	— 0,0135	— 0,0105	+ 0,0134
2	0,1885	— 0,0240	+ 0,0029	— 0,0076
3	0,1645	— 0,0211	— 0,0047	+ 0,0026
4	0,1434	— 0,0258	— 0,0021	— 0,0016
5	0,1176	— 0,0279	— 0,0037	+ 0,0016
6	0,0897	— 0,0316	— 0,0021	— 0,0008
7	0,0581	— 0,0337	— 0,0029	
8	0,0244	— 0,0366		
9	— 0,0122			

Ayant $m = 10$, dans cet exemple, nous aurons pour $n = 0$

$$C_{x-1,0} \cdot C_{9-x,0} = 1; \quad C_{9,0} = 1; F_0 = \frac{1}{9}\sum_1^{10} f(x);$$

pour $n = 1$

$$C_{x-1,1} \cdot C_{8-x,1} = \frac{x(9-x)}{1 \cdot 1}; \; C_{9,1} = \frac{10}{1},$$

$$F_1 = -\frac{3}{9 \cdot 10}\sum_1^{10} \frac{x(9-x)}{1 \cdot 1} \Delta f(x);$$

pour $n = 2$

$$C_{x-1,2} \cdot C_{7-x,2} = \frac{(x+1)x}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(9-x)(8-x)}{1 \cdot 2}, \; C_{9,2} = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2},$$

$$F_2 = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 11 \cdot 10}\sum \frac{(x+1)x}{1 \cdot 2} \frac{(9-x)(8-x)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(x);$$

pour $n = 3$

$$C_{x-1,3}\, C_{6-x,3} = \frac{(x+2)(x+1)x}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(9-x)(8-x)(7-x)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \; C_{9,3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$F_3 = -\frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{9 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}\sum_1^{10} \frac{(x+2)(x+1)x(9-x)(8-x)(7-x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 f(x).$$

Déterminant d'après les valeurs données ci-dessus de $f(x)$ et de ses différences $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, $\Delta^3 f(x)$ les sommes contenues dans les quantités

$$F_0, F_1, F_2, F_3,$$

nous trouvons

$$\sum f(x) = 0{,}9760;$$

$$\sum \frac{x}{1} \cdot \frac{9-x}{1} \Delta f(x) = -3{,}2312;$$

$$\sum \frac{(x+1)x}{1 \cdot 2} \frac{(9-x)(8-x)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(x) = -1{,}2908;$$

$$\sum \frac{(x+2)(x+1)x}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{(9-x)(8-x)(7-x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 f(x) = 0{,}0656;$$

ce qui donne après la substitution dans les expressions des quantités

$$F_0, F_1, F_2, F_3$$

les valeurs suivantes:

$$F_0 = \frac{1}{9} \cdot 0{,}9760 = 0{,}1084$$

$$F_1 = -\frac{3}{9.10} \cdot -3{,}2312 = 0{,}1077,$$

$$F_2 = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 11 \cdot 10} \cdot -1{,}2908 = -0{,}0130,$$

$$F_3 = -\frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{9 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10} \cdot 0{,}0656 = -0{,}0002.$$

En ajoutant ces quantités, nous avons d'après (8) la valeur de $F(1)$ correspondant au cas où l'on s'arrête au 4me terme dans l'expression (1) de la fonction cherchée ou, ce qui revient au même, quand on suppose ses quatrièmes différences égales à zéro. Ainsi, on trouve pour la valeur de $F(1)$

$$F(1) = 0,1084 + 0,1077 - 0,0130 - 0,0002.$$

D'aprés les mêmes valeurs des

$$F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3$$

nous obtenons en vertu des formules (8) les différences

$$\Delta F(1),\ \Delta^2 F(1),\ \Delta^3 F(1)$$

à l'aide des facteurs

$$\begin{array}{lll}(1,1), & (1,2), & (1,3),\\ & (2,2), & (2,3),\\ & & (3,3).\end{array}$$

Or d'après (9) pour

$$m = 10,\ \mu = 0,\ n = 1,2,3,$$

en posant

$$(0,1) = 1,\ (0,2) = 1,\ (0,3) = 1,$$

nous trouvons

$$(1,1) = -\frac{1 \,.\, 2 - 0 \,.\, 1}{1 \,.\, (10-2)} \cdot 1 = -\frac{1}{4},$$

$$(1,2) = -\frac{2 \,.\, 3 - 0 \,.\, 1}{1 \,.\, (10-2)} \cdot 1 = -\frac{3}{4},$$

$$(1,3) = -\frac{3 \,.\, 4 - 0 \,.\, 1}{1 \,.\, (10-2)} \cdot 1 = -\frac{3}{2}.$$

Donc, d'après (8), on passe de la valeur trouvée ci-dessus de $F(1)$ à la valeur de $\Delta F(1)$, en omettant le premier terme et multipliant les autres respectivement par

$$(1,1) = -\frac{1}{4},\ (1,2) = -\frac{3}{4},\ (1,3) = -\frac{3}{2}.$$

Ainsi, nous trouvons

$$\Delta F(1) = -\frac{1}{4} \cdot 0,1077 + \frac{3}{4} \cdot 0,0130 + \frac{3}{2} \cdot 0,0002 =$$
$$= -0,0269 + 0,0097 + 0,0003.$$

Pour passer de cette valeur de la première différence de $F(1)$ à la se-

conde, il nous faut omettre d'aprés (8) le premier terme et multiplier les suivants respectivement par les rapports

$$\frac{(2,2)}{(1,2)},\ \frac{(2,3)}{(1,3)}.$$

Or, ayant d'après (9) pour $m = 10$

$$\frac{(2,2)}{(1,2)} = -\frac{2.3-1.2}{2(10-3)} = -\frac{2}{7},\ \frac{(2,3)}{(1,3)} = -\frac{3.4-1.2}{2(10-3)} = -\frac{5}{7},$$

nous aurons en vertu de ce qui précède pour la valeur de $\Delta^2 F(1)$

$$\Delta^2 F(1) = -\frac{2}{7}\cdot 0,0097 - \frac{5}{7}\cdot 0,0003 = -0,0028 - 0,0002.$$

En y omettant le premier terme et multipliant le second par le rapport

$$\frac{(3,3)}{(2,3)},$$

égal, en vertu de (9), à

$$-\frac{3.4-2.3}{3(10-4)} = -\frac{6}{3.6} = -\frac{1}{3},$$

nous trouvons

$$\Delta^3 F(1) = -\frac{1}{3}\cdot - 0,0002 = 0,0001.$$

Ainsi, pour l'évaluation de la fonction cherchée, la quatrième différence étant supposée nulle, nous aurons

$$F(1) = 0,1084 + 0,1077 - 0,0130 - 0,0002 = 0,2029,$$

$$\Delta F(1) = -0,0269 + 0,0097 + 0,0003 = -0,0169,$$

$$\Delta^2 F(1) = -0,0028 - 0,0002 = -0,0030,$$

$$\Delta^3 F(1) = 0,0001.$$

§ 9. Les formules que nous avons déduites se rapportent au cas où toutes les valeurs

$$f(1),\ f(2), \ldots\ldots, f(m-1)$$

sont supposées *également bonnes*, ou ce qui revient au même, quand leurs erreurs moyennes *quadratiques* sont égales.

Dans le cas où ces erreurs de quantités

$$f(1),\ f(2), \ldots\ldots f(m-1)$$

sont inégales et inversement proportionelles aux quantités

$$\theta(1),\ \theta(2), \ldots\ldots \theta(m-1),$$

la formule (1) doit être remplacée, comme on sait, par la suivante

$$f(x) = \frac{\sum_1^m \varphi_0(x)\,\theta^2(x)\,f(x)}{\sum_1^m \varphi_0^2(x)\,\theta^2(x)}\,\varphi_0(x) + \frac{\sum_1^m \varphi_1(x)\,\theta^2(x)\,f(x)}{\sum_1^m \varphi_1^2(x)\,\theta^2(x)}\,\varphi_1(x) + \ldots\ldots,$$

où

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \ldots\ldots\ldots$$

désignant les dénominateurs des réduites de la somme

$$\sum \frac{\theta^2(\lambda)}{x-\lambda} = \frac{\theta^2(1)}{x-1} + \frac{\theta^2(2)}{x-2} + \ldots\ldots + \frac{\theta^2(m-1)}{x-m+1},$$

obtenus par son développement en fraction continue

$$\cfrac{C_0}{A_0 x + B_0 + \cfrac{C_1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{C_2}{A_2 x + B_2 + \ldots}}}$$

Il n'est par difficile de montrer que le cas où

$$\theta^2(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)},$$

α, β étant des constantes quelconques, peut être traité à l'aide des formules analogues à celles qu'on a déduites pour le cas de $\theta(x) = 1$.

Remarquons pour cela que la fraction

$$\frac{\Delta^n \dfrac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\,\dfrac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}}{\dfrac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\,\dfrac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)}}$$

se réduit à une fonction entière de dégré n *) et qu'en vertu de (2) en y posant

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)},$$

on trouve

$$(10)\quad \sum_1^m F(x)\,\Delta^n \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)} = (-1)^n \sum_1^m \frac{\Gamma(x+n+\alpha)}{\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-n-x)}\,\Delta^n F(x).$$

*) L'expression de cette fonction est indiquée ci-après.

En faisant ici $F(x)$ successivement égale à

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ldots.\ \varphi_{n-1}(x)$$

et remarquant que pour ces valeurs de $F(x)$ la différence

$$\Delta^n F(x)$$

se réduit à zéro, nous concluons que toutes les sommes

$$\sum_1^m \varphi_0(x)\,\Delta^n \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\;\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)},$$

$$\sum_1^m \varphi_1(x)\,\Delta^n \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\;\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)},$$

. . . .

$$\sum_1^m \varphi_{n-1}(x)\,\Delta^n \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\;\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}$$

sont égales à zéro; donc, en prenant

$$\theta^2(x)=\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\;\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)}$$

et posant pour abréger

$$\frac{\Delta^n \dfrac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\;\dfrac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}}{\dfrac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\;\dfrac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)}}=W_x,$$

nous aurons

$$\sum_1^m \varphi_0(x)\,W_x\,\theta^2(x)=0,\ \sum_1^m \varphi_1(x)\,W_x\,\theta^2(x)=0,\ldots.\ \sum_1^m \varphi_{n-1}(x)\,W_x\,\theta^2(x)=0.$$

Or, de ces égalités, en procedant comme en § 2 dans le cas de $\theta(x)=1$, on conclut que

$$\varphi_n(x)=W_x,$$

et par conséquent, d'après nos notations

$$(11)\qquad \varphi_n(x)=\frac{\Delta^n \dfrac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\;\dfrac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}}{\dfrac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\;\dfrac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)}}.$$

Passant à la détermination des sommes

$$\sum \varphi_0(x)\,\theta^2(x) f(x),\ \sum \varphi_1(x)\,\theta^2(x) f(x),\ \sum \varphi_2(x)\,\theta^2(x) f(x),\ldots,$$

$$\sum \varphi_0^2(x)\,\theta^2(x),\ \sum \varphi_1^2(x)\,\theta^2(x),\ \sum \varphi_2^2(x)\,\theta^2(x),\ldots,$$

nous remarquons que l'égalité (10), après y avoir substitué la valeur de

$$\Delta^n \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}$$

tirée de (11) et remplacé

$$\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)}$$

par

$$\theta^2(x),$$

donne

$$\sum_1^m F(x)\,\varphi_n(x)\,\theta^2(x) = (-1)^n \sum_1^m \frac{\Gamma(x+\alpha+n)}{\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x-n)}\,\Delta^n F(x).$$

En faisant ici $F(x) = f(x)$, nous trouvons

$$\sum_1^m f(x)\,\varphi_n(x)\,\theta^2(x) = (-1)^n \sum_1^m \frac{\Gamma(x+\alpha+n)}{\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x-n)}\,\Delta^n f(x),$$

ce qui sert à faciliter le calcul des sommes

$$\sum_1^m f(x)\,\varphi_0(x)\,\theta^2(x),\ \sum_1^m f(x)\,\varphi_1(x)\,\theta^2(x),\ldots.$$

Pour évaluer la somme

$$\sum_1^m \varphi_n^2(x)\,\theta^2(x)$$

nous poserons dans cette égalité

$$F(x) = \varphi_n(x),$$

et la formule (11) donnant pour une telle valeur de $F(x)$

$$\Delta^n F(x) = \Delta^n \varphi_n(x) = (-1)^n\,\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

nous aurons

$$\sum_1^m \varphi_n^2(x)\,\theta^2(x) = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sum_1^m \frac{\Gamma(x+\alpha+n)\,\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(x)\,\Gamma(m-x-n)}.$$

La fonction

$$\Gamma(m-x-n)$$

devenant infinie pour

$$x=m-n,\ m-n-1, \ldots\ldots,\ m-1,$$

en vertu de quoi tous les éléments de la somme

$$\sum_{1}^{m} \frac{\Gamma(x+\alpha+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x-n)},$$

à partir de $x=m-n$ se réduisent à zéro, on pourra prendre $m-n$ pour limite supérieure de cette somme, et elle s'écrira comme il suit:

$$\sum_{1}^{m-n} \frac{\Gamma(x+\alpha+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x-n)},$$

Or cette somme est égale, d'après (5), à

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \frac{\Gamma(m+n+\alpha+\beta)}{\Gamma(m-n-1)}.$$

En substituant cette valeur de la somme

$$\sum_{1}^{m-n} \frac{\Gamma(x+\alpha+n)}{\Gamma(x)} \frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x-n)}$$

dans la formule précédente, nous trouvons que la somme

$$\sum_{1}^{m} \varphi_n^2(x)\,\theta^2(x)$$

s'exprime de la manière suivante

$$\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(m+n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(m-n-1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

§ 10. Passant à la détermination des fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \ldots.$$

d'après la formule (11), nous remarquons qu'en général la différence

$$\Delta^n\, U_x\, V_x$$

se réduit à la somme

$$V_{x+n}\Delta^n U_x + \frac{n}{1}\Delta V_{x+n-1}.\Delta^{n-1}U_x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 V_{x+n-2}.\Delta^{n-2}U_x + \ldots.$$

qu'on peut encore représenter sous la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n+1}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(n-\lambda+1)}\,\Delta^\lambda V_{x+n-\lambda}.\Delta^{n-\lambda}U_x.$$

En y posant

$$U_x = \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)},\quad V_x = \frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)},$$

nous trouvons que la différence

$$\Delta^n \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}$$

est égale à

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n+1}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(n-\lambda+1)}\,\Delta^\lambda\frac{\Gamma(m+\beta+\lambda-x)}{\Gamma(m-n+\lambda-x)}\,\Delta^{n-\lambda}\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)},$$

et, ayant d'après (6)

$$\Delta^\lambda\frac{\Gamma(m+\beta+\lambda-x)}{\Gamma(m-n+\lambda-x)} = (-1)^\lambda\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\lambda+1)}\,\frac{\Gamma(m+\beta-x)}{\Gamma(m-n+\lambda-x)},$$

$$\Delta^{n-\lambda}\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\,\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-\lambda)};$$

on aura pour la valeur de la différence

$$\Delta^n \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}$$

l'expression suivante

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n+1}\frac{(-1)^\lambda\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(m+\beta-x)\,\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(n-\lambda+1)\,\Gamma(\alpha+\lambda+1)\,\Gamma(n+\beta-\lambda+1)\,\Gamma(m-n+\lambda-x)\,\Gamma(x-\lambda)},$$

Divisant cette valeur de la différence

$$\Delta^n \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x-n)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta+n)}{\Gamma(m-x)}$$

par

$$\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)}\,\frac{\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(m-x)},$$

ou a le quotient

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n+1} \frac{(-1)^{\lambda}\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(n-\lambda+1)\,\Gamma(\alpha+\lambda+1)\,\Gamma(n+\beta-\lambda+1)}\,\frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n+\lambda-x)}\,\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)},$$

Or, d'après (11), cette expression est égale à la fonction $\varphi_n(x)$.

D'ailleurs, ayant

$$\frac{\Gamma(m-x)}{\Gamma(m-n+\lambda-x)}=(m-x-1)\,(m-x-2)\ldots.(m-n+\lambda-x),$$

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)}=(x-1)\,(x-2)\ldots.(x-\lambda),$$

tous les termes de cette somme représentent des polynômes de dégré n.

13.

SUR
LES EXPRESSIONS APPROCHÉES LINÉAIRES PAR RAPPORT À DEUX POLYNOMES.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Deuxième série. Tome I. Année 1877, p. 289—312.

О приближенныхъ выраженіяхъ, линейныхъ относительно двухъ полиномовъ.

(Приложеніе къ XXX тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 4, 1877 г., стр. 1—24.)

16*

Sur les expressions approchées linéaires par rapport à deux polynomes.

§ 1. Dans une Lettre à M. Braschmann*), nous avons montré de quelle manière, en développant une fonction u en une fraction continue

$$q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots$$

et déterminant ses fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1 q_0 + 1}{q_1}, \ldots,$$

on peut trouver les valeurs des polynômes X, Y, pour lesquels l'expression

$$uX - Y$$

diffère le moins possible d'une fonction donnée v.

Ainsi que nous l'avons indiqué dans la Lettre que nous venons de citer, et démontré dans le Mémoire intitulé: *Sur le développement des fonctions en série au moyen des fractions continues* **), les polynômes X, Y, qui satisfont à cette condition, sont déterminés par les séries

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \omega_3 Q_3 + \ldots, \\ Y = -Ev + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 + \ldots, \end{cases}$$

où nous désignons par E la partie entière d'une fonction et par

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \ldots$$

*) T. I, pag. 611—614.

**) T. I, pag. 617—686.

des fonctions entières, que l'on obtient au moyen de la valeur de la fonction v et des dénominateurs

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ldots,$$
$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ldots,$$

fournis par le développement ci-dessus de la fonction u en fraction continue, au moyen de la formule générale

$$\omega_i = (-1)^{i-1}\, E(q_i(vQ_i - EvQ_i)),$$

que l'on peut écrire, d'une manière plus abrégée,

$$\omega_i = (-1)^{i-1}\, E(q_i F(vQ_i)), \tag{2}$$

en représentant par la notation

$$F(vQ_i)$$

l'ensemble de tous les termes du développement de la fonction vQ_i qui renferment des puissances négatives de la variable.

En arrêtant les séries ci-dessus aux termes correspondants quelconques

$$\omega_m Q_m,\ \omega_m P_m,$$

on trouve le système des polynômes X, Y, tel que X est d'un degré inférieur à Q_{m+1}, et que la différence entre l'expression $uX - Y$ et la fonction v est du degré le moins élevé compatible avec la supposition que X est un polynôme de degré moindre que Q_{m+1}. Alors, le degré du polynôme X est déterminé par le degré du terme

$$\omega_m Q_m,$$

le dernier des termes conservés dans le développement de X, et le degré de la différence

$$uX - Y - v$$

est déterminé par le degré du premier terme de la série

$$\omega_{m+1}(uQ_{m+1} - P_{m+1}) + \omega_{m+2}(uQ_{m+2} - P_{m+2}) + \ldots,$$

qui ne se réduit pas à zéro *).

En supposant que le premier de ces termes soit

$$\omega_{m+n}(uQ_{m+n} - P_{m+n}),$$

*) *Voir* les articles cités plus haut, et notre Mémoire intitulé: *Des maxima et minima des sommes composées des valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées.* T. II, pag. 3—40.

et désignant par ρ le degré de la fonction

$$\omega_{m+n},$$

on conclura de ce qui vient d'être dit que, en général, le degré d'approximation de l'expression $uX-Y$ par rapport à v est déterminé par le degré du produit

$$x^{\rho}(uQ_{m+n}-P_{m+n}),$$

et conséquemment par le degré de la fraction

$$\frac{x^{\rho}}{Q_{m+n+1}},$$

vu que, d'après les propriétés des fractions convergentes, le degré de la différence

$$uQ_{m+n}-P_{m+n}$$

est égal au degré de la fraction

$$\frac{1}{Q_{m+n+1}}.$$

On voit d'après cela que l'expression

$$uX-Y,$$

X, Y étant des fonctions entières, et X étant d'un degré qui ne surpasse pas celui de $x^{\sigma}Q_m$, peut représenter la fonction v avec une exactitude poussée jusqu'aux termes du degré de

$$\frac{x^{\rho}}{Q_{m+n+1}}$$

dans le cas seulement où les équations suivantes sont satisfaites:

$$\omega_{m+1}=0,\ \omega_{m+2}=0,\ldots\ \omega_{m+n-1}=0,$$
$$\delta\omega_m \overline{\overline{<}}\ \sigma,\ \delta\omega_{m+n}\overline{\overline{<}}\ \rho,$$

où nous désignons, suivant la notation d'Abel, par δ le degré d'une fonction.

Lorsque ces conditions sont remplies, les séries (1), arrêtées aux termes $\omega_m Q_m$, $\omega_m P_m$, donnent, comme on l'a vu, une valeur de X d'un degré au plus égal à celui de $x^{\sigma}Q_m$, et l'expression $uX-Y$ diffère de v par des termes d'un degré au plus égal à celui de

$$\frac{x^{\rho}}{Q_{m+n+1}}.$$

D'après cela, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la formule

$$uX-Y$$

puisse représenter la fonction v avec une exactitude poussée jusqu'à x^{-N}, le degré de X ne surpassant pas M, s'écriront ainsi

$$(3)\qquad \begin{cases} \omega_{m+1}=0,\ \omega_{m+2}=0,\ldots,\ \omega_{m+n-1}=0, \\ \delta\omega_m \overline{\overline{<}}\, \sigma,\ \delta\omega_{m+n}\overline{\overline{<}}\,\rho, \end{cases}$$

en désignant par

$$Q_m,\ Q_{m+n}$$

les derniers dénominateurs des fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ldots,$$

dont les degrés ne dépassent pas les limites M et $N-1$, et par σ, ρ les degrés des fractions

$$\frac{x^M}{Q_m},\ \frac{Q_{m+n+1}}{x^N}.$$

§ 2. Nous allons maintenant démontrer que ces conditions peuvent être remplacées par celles-ci, qui sont plus simples:

$$(4)\qquad \delta F(vQ_{l-1}) \leqq \delta\frac{x^M}{Q_l},\quad \delta F(vQ_l) \leqq \delta\frac{Q_l}{x^N},$$

dans lesquelles

$$Q_{l-1},\ Q_l$$

sont les deux derniers termes de la série

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ldots,$$

qui, étant multipliés entre eux, donnent un produit de degré moindre que $M+N$.

Pour cela, trouvons d'abord une limite supérieure des degrés

$$\delta F(vQ_m),\ \delta F(vQ_{m+1}),\ldots,\ \delta F(vQ_{m+n})$$

dans le cas où les conditions (3) sont satisfaites. Après nous être convaincus, de cette manière, de la nécessité des conditions (4), nous démontrerons que celles-ci, de leur côté, supposent que chacune des conditions (3) soit remplie.

D'après la liaison qui existe entre les fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ldots$$

de l'expression

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots}}$$

on a

$$Q_{i+1} = Q_i q_i + Q_{i-1},$$

ce qui donne, en multipliant par v,

$$vQ_{i+1} = vQ_i q_i + vQ_{i-1}.$$

En passant de l'égalité des fonctions à l'égalité de leurs parties fractionnaires, on trouve, d'après notre notation,

(5) $$F(vQ_{i+1}) = F(vQ_i q_i) + F(vQ_{i-1}).$$

En décomposant maintenant les fonctions

$$vQ_i, \ vQ_i q_i$$

en une partie entière et une partie fractionnaire, il vient

$$vQ_i = E(vQ_i) + F(vQ_i),$$
$$vQ_i q_i = E(vQ_i q_i) + F(vQ_i q_i),$$

ce qui donne, par l'élimination de Q_i,

$$F(vQ_i q_i) = q_i F(vQ_i) + q_i E(vQ_i) - E(vQ_i q_i).$$

Portant cette valeur de

$$F(vQ_i q_i)$$

dans l'égalité (5), et désignant, pour abréger, par U_i la fonction entière

$$E(vQ_i q_i) - q_i E(vQ_i),$$

on obtient l'égalité

$$q_i F(vQ_i) = F(vQ_{i+1}) - F(vQ_{i-1}) + U_i.$$

Si nous remarquons que les fonctions

$$F(vQ_{i+1}), \ F(vQ_{i-1})$$

ne contiennent que des termes avec des puissances négatives de la variable, on en conclut

$$E\big(q_i F(vQ_i)\big) = U_i,$$

ce qui, d'aprés la formule (2),

$$\omega_i = (-1)^{i-1} E(q_i F(vQ_i))$$

nous donne

$$U_i = (-1)^{i-1} \omega_i,$$

et, en conséquence, l'expression trouvée plus haut de la fonction $q_i F(vQ_i)$ est fournie par l'égalité

$$q_i F(vQ_i) = F(vQ_{i+1}) - F(vQ_{i-1}) + (-1)^{i-1} \omega_i,$$

qui nous servira à obtenir la limite supérieure des degrés des fonctions

$$F(vQ_m),\ F(vQ_{m+1}), \ldots,\ F(vQ_{m+n})$$

dans le cas où l'on a

$$\omega_{m+1} = 0,\ \omega_{m+2} = 0, \ldots,\ \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta\omega_m \overline{\overline{<}}\, \sigma,\ \delta\omega_{m+n} \overline{\overline{<}}\, \rho.$$

Comme, dans ce cas, pour toutes les valeurs de i, depuis $i = m+1$ jusqu'à $i = m+n-1$ inclusivement, la fonction ω_i se réduit à zéro, il s'ensuit que, pour toutes ces valeurs, l'égalité que nous venons de trouver se réduira à la suivante:

(6) $$q_i F(vQ_i) = F(vQ_{i+1}) - F(vQ_{i-1}).$$

En remarquant que la fonction q_i est d'un degré non inférieur au premier, on conclura de cette égalité que dans la suite

$$F(vQ_m),\ F(vQ_{m+1}), \ldots\ F(vQ_{m+n})$$

parmi trois termes consécutifs

$$F(vQ_{i+1}),\ F(vQ_i),\ F(vQ_{i-1}),$$

la fonction du milieu

$$F(vQ_i)$$

devra dans tous les cas être d'un degré moindre que celui d'une des fonctions extrêmes

$$F(vQ_{i+1}),\ F(vQ_{i-1}).$$

On voit par là que, dans la suite

$$\delta F(vQ_m),\ \delta F(vQ_{m+1}), \ldots\ \delta F(vQ_{m+n})$$

aucun des termes intermédiaires ne peut présenter un maximum, et par suite il ne peut y avoir qu'un minimum.

En supposant que

$$\delta F(vQ_\lambda)$$

soit le premier terme de la suite

$$\delta F(vQ_m),\ \delta F(vQ_{m+1}), \ldots \ \delta F(vQ_{m+n})$$

qui donne une valeur minimum, nous remarquerons que, pour toutes les valeurs de i, depuis $i = m + 1$ jusqu'à $i = \lambda - 1$, la fonction

$$F(vQ_{i-1})$$

sera d'un degré plus élevé que

$$F(vQ_{i+1}),$$

et par suite, d'après l'égalité (6), son degré déterminera le degré de l'expression

$$q_i F(vQ_i),$$

On tire de là, pour les i grandeurs considérées, l'égalité

$$\delta F(vQ_i) = \delta \frac{F(vQ_{i-1})}{q_i}.$$

En y faisant

$$i = m + 1,\ m + 2, \ldots, \ \lambda - 1,$$

on obtiendra une suite d'équations qui serviront à passer successivement de la fonction

$$F(vQ_m)$$

aux fonctions

$$F(vQ_{m+1}),\ F(vQ_{m+2}), \ldots, \ F(vQ_{\lambda-1}).$$

Ces équations nous donnent

$$\delta F(vQ_{m+1}) = \delta \frac{F(vQ_m)}{q_{m+1}},$$

$$\delta F(vQ_{m+2}) = \delta \frac{F(vQ_m)}{q_{m+1} q_{m+2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta F(vQ_{\lambda-1}) = \delta \frac{F(vQ_m)}{q_{m+1} q_{m+2} \cdots q_{\lambda-1}}.$$

En passant aux termes de la suite

(7) $$\delta F(vQ_m),\ \delta F(vQ_{m+1}), \ldots, \ \delta F(vQ_\lambda), \ldots \ \delta F(vQ_{m+n}),$$

qui suivent le premier terme mentionné

$$\delta F(vQ_\lambda),$$

nous remarquerons qu'aucun de ces termes ne peut être moindre que le terme en question, et par suite nous aurons ou

$$\delta F(vQ_{\lambda+1}) = \delta F(vQ_\lambda),$$

ou

$$\delta F(vQ_{\lambda+1}) > \delta F(vQ_\lambda),$$

selon que le terme en question devra, ou non, être suivi d'un terme qui lui soit égal.

Pour ce qui est du troisième terme

$$\delta F(vQ_{\lambda+2}),$$

il ne peut avoir la même valeur que le terme en question; autrement il se trouverait, dans la suite

$$F(vQ_m),\ F(vQ_{m+1}), \ldots,\ F(vQ_{m+n})$$

trois termes du même degré, ce qui a été démontré impossible par ce qui précède. On voit par là que, après le terme

$$\delta F(vQ_{\lambda+1})$$

de la suite (7), les termes doivent aller nécessairement en croissant, et par conséquent, pour toutes les valeurs de i, depuis $i=\lambda+1$ jusqu'à $i=m+n-1$, on aura

$$\delta F(vQ_{i+1}) > \delta F(vQ_{i-1}).$$

Il s'ensuit de là, en vertu de (6), que, pour ces valeurs de i, le degré du terme

$$q_i F(vQ_i)$$

sera déterminé par le degré du terme $F(vQ_{i+1})$, ce qui suppose l'égalité

$$\delta F(vQ_i) = \delta \frac{F(vQ_{i+1})}{q_i},$$

En y faisant tour à tour

$$i = m+n-1,\ m+n-2, \ldots,\ \lambda+1,$$

on obtient une suite d'équations, qui serviront à passer successivement de la fonction

$$F(vQ_{m+n})$$

aux fonctions

$$F(vQ_{m+n-1}),\ F(vQ_{m+n-2}), \dots\ F(vQ_{\lambda+1}).$$

De ces équations on tire

$$\delta F(vQ_{m+n-1}) = \delta \frac{F(vQ_{m+n})}{q_{m+n-1}},$$

$$\delta F(vQ_{m+n-2}) = \delta \frac{F(vQ_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\delta F(vQ_{\lambda+1}) = \delta \frac{F(vQ_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \dots q_{\lambda+1}}.$$

§ 3. De cette manière on déterminera, au moyen des deux fonctions extrêmes de la suite

$$F(vQ_m),\ F(vQ_{m+1}), \dots\ F(vQ_{m+n-1}),\ F(vQ_{m+n})$$

les degrés de toutes les autres, à l'exclusion d'une seule fonction

$$F(vQ_\lambda).$$

Pour déterminer le degré de cette fonction, remarquons que la formule (6) donne, pour $i = \lambda$,

$$q_\lambda F(vQ_\lambda) = F(vQ_{\lambda+1}) - F(vQ_{\lambda-1}).$$

Comme, en vertu du paragraphe précédent, les termes

$$F(vQ_{\lambda+1}),\ F(vQ_{\lambda-1})$$

sont des mêmes degrés que les expressions

$$\frac{F(vQ_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \dots q_{\lambda+1}},$$

$$\frac{F(vQ_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2} \dots q_{\lambda-1}},$$

l'une au moins de ces expressions sera d'un degré non inférieur à celui de

$$q_\lambda F(vQ_\lambda).$$

et par suite nous aurons

$$\delta F(vQ_\lambda) \mathrel{\substack{=\\[-2pt]>\\[-2pt]<}} \delta \frac{F(vQ_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2} \dots q_{\lambda-1}\, q_\lambda},$$

ou

$$\delta F(vQ_\lambda) \mathrel{\substack{=\\[-2pt]>\\[-2pt]<}} \delta \frac{F(vQ_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \dots q_{\lambda+1}\, q_\lambda}.$$

Comme, en vertu du paragraphe précédent, pour

$$i = m + 1,\ m + 2, \ldots\ \lambda - 1,$$
$$i = \lambda + 1,\ \lambda = 2, \ldots\ m + n - 1$$

on a ou l'égalité

$$\delta F(vQ_i) = \delta \frac{F(vQ_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2} \cdots q_i},$$

ou l'égalité

$$\delta F(vQ_i) = \delta \frac{F(vQ_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \cdots q_i},$$

et qu'alors il est évident qu'une au moins des conditions

$$\delta F(vQ_i) \overline{\overline{<}}\, \delta \frac{F(vQ_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2} \cdots q_i},$$
$$\delta F(vQ_i) \overline{\overline{<}}\, \delta \frac{F(vQ_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \cdots q_i},$$

que nous avons trouvées ci-dessus pour

$$i = \lambda,$$

est satisfaite, nous en conclurons que, pour toutes les valeurs de i depuis $i = m + 1$ jusqu'à $i = m + n - 1$, on aura l'une ou l'autre des conditions

$$\delta F(vQ_i) \overline{\overline{<}}\, \delta \frac{F(vQ_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2} \cdots q_i},$$

ou

$$\delta F(vQ_i) \overline{\overline{<}}\, \delta \frac{F(vQ_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \cdots q_i}.$$

Pour ce qui est des limites supérieures des degrés des fonctions

$$F(vQ_m),\ F(vQ_{m+n}),$$

elles peuvent être déduites des dernières conditions (3),

$$\delta\omega_m \overline{\overline{<}}\, \sigma,\ \delta\omega_{m+n} \overline{\overline{<}}\, \rho.$$

Pour cela, nous remarquerons que, d'après la formule (2), qui détermine les fonctions

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \ldots,$$

on a

$$\omega_m = (-1)^{m-1} E\big(q_m F(vQ_m)\big),$$
$$\omega_{m+n} = (-1)^{m+n-1} E\big(q_{m+n} F(vQ_{m+n})\big);$$

d'où il s'ensuit que les conditions précédemment démontrées relativement aux degrés des fonctions

$$\omega_m, \ \omega_{m+n}$$

supposent que les fonctions

$$q_m F(vQ_m), \ q_{m+n} F(vQ_{m+n})$$

ne sont pas de degrés supérieurs à

$$\sigma, \ \rho,$$

et que, par suite,

$$\delta F(vQ_m) \leqq \delta \frac{x^\sigma}{q_m},$$

$$\delta F(vQ_{m+n}) \leqq \delta \frac{x^\rho}{q_{m+n}}.$$

En conséquence, les limites trouvées plus haut du degré de $F(vQ_i)$ se réduisent à celles-ci,

$$\delta F(vQ_i) \gtreqqless \delta \frac{x^\sigma}{q_m \, q_{m+1} \cdots \, q_i},$$

ou

$$\delta F(vQ_i) \gtreqqless \delta \frac{x^\rho}{q_{m+n} \, q_{m+n-1} \cdots \, q_i}.$$

Ces formules sont susceptibles d'une simplification notable.

D'après notre notation, la fraction convergente du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_k + \ddots}}},$$

correspondante au quotient incomplet q_k, est

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}},$$

et par suite le produit des quotients incomplets

$$q_1 \, q_2 \, q_3 \cdots \, q_k$$

sera du même degré que le dénominateur Q_{k+1}.

En vertu de cela, on trouve que les produits

$$q_m \, q_{m+1} \cdots \, q_i,$$

$$q_{m+n} \, q_{m+n-1} \cdots \, q_i$$

seront de mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{i+1}}{Q_m}, \quad \frac{Q_{m+n+1}}{Q_i}.$$

Par conséquent, les égalités que nous avons trouvées plus haut donnent

$$\delta F(vQ_i) \overline{\gtrless} \delta \frac{x^\sigma Q_m}{Q_{i+1}}, \text{ ou } \delta F(vQ_i) \leqq \delta \frac{x^\rho Q_i}{Q_{m+n+1}}.$$

Et comme, d'après cette notation (§ 1),

$$x^\sigma Q_m, \quad \frac{x^\rho}{Q_{m+n+1}}$$

sont de mêmes degrés que

$$x^M, \; x^{-N},$$

ces inégalités conduiront à la suivante:

$$\delta F(vQ_i) \overline{\gtrless} \delta \frac{x^M}{Q_{i+1}}, \text{ ou } \leqq \delta \frac{Q_i}{x^N}.$$

On voit par là que la limite supérieure du degré de chacune des fonctions

$$F(vQ_m), \; F(vQ_{m+1}), \ldots \; F(vQ_{m+n})$$

sera déterminée par la plus grande des deux quantités

$$\delta \frac{x^M}{Q_{i+1}}, \; \delta \frac{Q_i}{x^N}$$

pour la valeur correspondante de i.

En supposant que dans la suite

$$Q_1, \; Q_2, \; Q_3, \ldots$$

les deux dernières fonctions qui, étant multipliées l'une par l'autre, donnent un produit d'un degré inférieur à $M + N$ soient

$$Q_{l-1}, \; Q_l,$$

nous remarquerons qu'elles devront satisfaire aux inégalités

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta(Q_{l-1} \cdot Q_l) < M + N, \\ \delta(Q_l \cdot Q_{l+1}) \overline{>} M + N. \end{cases}$$

et comme

$$\delta \frac{x^M}{Q_{i+1}} - \delta \frac{Q_i}{x^N} = M + N - \delta (Q_i . Q_{i+1}),$$

ces inégalités supposent que l'on a

$$\delta \frac{x^M}{Q_{i+1}} > \delta \frac{Q_i}{x^N},$$

si $i = l - 1$, et que

$$\delta \frac{Q_i}{x^N} \leqq \delta \frac{x^M}{Q_{i+1}},$$

si $i = l$; par conséquent, d'après ce que nous avons trouvé relativement à la limite supérieure du degré

$$\delta F(vQ_i),$$

nous aurons, pour $i = l - 1$ et $i = l$,

$$(9) \qquad \begin{cases} \delta F(vQ_{l-1}) \leqq \delta \dfrac{x^M}{Q_l}, \\ \delta F(vQ_l) \leqq \delta \dfrac{Q_l}{x^N}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant démontrer que ces inégalités, déduites, comme on l'a vu, des conditions (3), exigent à leur tour nécessairement que chacune des conditions (3) soit satisfaite.

§ 4. D'après notre système de notations,

$$\frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}}, \ \frac{P_l}{Q_l}, \ \frac{P_{l+\mu}}{Q_{l+\mu}}$$

représentent les fractions convergentes du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \cfrac{1}{q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1} + \cdots}}}}}}$$

qui correspondent aux quotients incomplets

$$q_{l-2}, \ q_{l-1}, \ q_{l+\mu-1}.$$

En représentant par

$$\frac{S}{T}$$

la fraction ordinaire à laquelle se réduit la fraction continue

$$q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1}}}$$

on trouve, en vertu des propriétés des fractions continues,

$$Q_{l+\mu} = Q_l S + Q_{l-1} T.$$

Multipliant cette égalité par v, on a

$$vQ_{l+\mu} = vQ_l S + vQ_{l-1} T,$$

ce qui suppose l'égalité

$$F(vQ_{l+\mu}) = F(vQ_l S) + F(vQ_{l-1} T).$$

En séparant les parties entières et fractionnaires des fonctions

$$vQ_l,\ vQ_l S,\ vQ_{l-1},\ vQ_{l-1} T,$$

il vient

$$vQ_l = E(vQ_l) + F(vQ_l),\ vQ_l S = E(vQ_l S) + F(vQ_l S),$$
$$vQ_{l-1} = E(vQ_{l-1}) + F(vQ_{l-1}),\ vQ_{l-1} T = E(vQ_{l-1} T) + F(vQ_{l-1} T);$$

par l'élimination de Q_l, Q_{l-1}, en tant qu'ils sont en dehors des signes E, F, on en tire

$$F(vQ_l S) = SF(vQ_l) + SE(vQ_l) - E(vQ_l S),$$
$$F(vQ_{l-1} T) = TF(vQ_{l-1}) + TE(vQ_{l-1}) - E(vQ_{l-1} T).$$

En portant ces valeurs des fonctions

$$F(vQ_l S),\ F(vQ_{l-1} T)$$

dans l'expression trouvée plus haut de la fonction

$$F(vQ_{l+\mu})$$

et posant, pour abréger,

$$SE(vQ_l) - E(vQ_l S) + TE(vQ_{l-1}) - E(vQ_{l-1} T) = U,$$

il vient

(10) $$F(vQ_{l+\mu}) = SF(vQ_l) + TF(vQ_{l-1}) + U.$$

Comme S et T sont les termes de la fraction simple

$$\frac{S}{T}$$

à laquelle se réduit la fraction continue

$$q_l + \frac{1}{q_{l+1} + \ldots + \frac{1}{q_{l+\mu-1}}},$$

ces quantités seront de mêmes degrés que les produits

$$q_l\, q_{l+1} \cdots\cdots q_{l+\mu-1},$$
$$q_{l+1}\, q_{l+2} \cdots\cdots q_{l+\mu-1},$$

et par suite de mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{l+\mu}}{Q_l},\ \frac{Q_{l+\mu}}{Q_{l+1}}$$

formées avec les dénominateurs des fractions convergentes

$$\frac{P_l}{Q_l},\ \frac{P_{l+1}}{Q_{l+1}},\ \frac{P_{l+\mu}}{Q_{l+\mu}}$$

du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_{l-1} + \cfrac{1}{q_l + \cdots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1} + \cdots}}}}$$

D'après cela nous aurons

$$\delta S = \delta \frac{Q_{l+\mu}}{Q_l},\ \delta T = \delta \frac{Q_{l+\mu}}{Q_{l+1}}.$$

En remarquant maintenant que, en vertu de (9),

$$\delta F(vQ_l) \leqq \delta \frac{Q_l}{x^N},\ \delta F(vQ_{l-1}) \leqq \delta \frac{x^M}{Q_l},$$

on trouve

$$\delta S + \delta F(vQ_l) = \delta SF(vQ_l) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N},$$

$$\delta T + \delta F(vQ_{l-1}) = \delta TF(vQ_{l-1}) \leqq \delta \frac{x^M Q_{l+\mu}}{Q_l \cdot Q_{l+1}}.$$

Or, d'après (8), le produit

$$Q_l \cdot\ Q_{l+1}$$

est d'un degré non inférieur à $M + N$; par conséquent la dernière inégalité donnera

$$\delta TF(vQ_{l-1}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N}.$$

On voit par là que, dans l'expression de la fonction

$$F(vQ_{l+\mu})$$

d'après la formule (10), les deux termes qui contiennent la variable aux degrés négatifs sont d'un degré non supérienr à

$$\frac{Q_{l+\mu}}{x^N},$$

et par suite

$$\delta F(vQ_{l+\mu}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N}.$$

Si l'on remarque maintenant que

$$\delta q_{l+\mu} = \delta \frac{Q_{l+\mu+1}}{Q_{l+\mu}},$$

nous en conclurons que

$$\delta q_{l+\mu} F(vQ_{l+\mu}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu+1}}{x^N}.$$

En faisant successivement dans cette inégalité

$$\mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n+m-l-1$$

et remarquant que, pour ces valeurs de μ, la fonction $Q_{l+\mu+1}$ atteint seulement la limite Q_{m+n}, dont le degré, d'après le § 1, ne surpasse pas $N-1$, nous en conclurons que

$$\delta q_l F(vQ_l) < 0,\ \delta q_{l+1} F(vQ_{l+1}) < 0, \ldots\ \delta q_{m+n-1} F(vQ_{m+n-1}) < 0;$$

d'où il s'ensuit que, en déterminant les fonctions

$$\omega_l,\ \omega_{l+1}, \ldots\ \omega_{m+n-1}$$

par la formule

$$\omega_i = (-1)^{i-1} E(q_i F(vQ_i)),$$

on trouvera

$$\omega_l = 0,\ \omega_{l+1} = 0, \ldots\ \omega_{m+n-1} = 0.$$

En faisant maintenant $\mu = m+n-l$, on aura

$$\delta q_{m+n} F(vQ_{m+n}) < \delta \frac{Q_{m+n+1}}{x^N},$$

et par suite, en déterminant la fonction ω_{m+n} par la même formule, on remarquera qu'elle sera d'un degré non supérieur à celui de $\frac{Q_{m+n+1}}{x^N}$.

Comme on a, d'après notre notation (§ 1),

$$\delta \frac{Q_{m+n+1}}{x^N} = \rho,$$

on en conclut que

$$\delta \omega_{m+n} \leqq \rho.$$

Ainsi nous nous assurons que les inégalités (9) entraînent necéssairement les conditions

$$\omega_l = 0,\ \omega_{l+1} = 0, \ldots\ \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta \omega_{m+n} \leqq \rho.$$

Pour démontrer maintenant que la même chose a lieu relativement aux autres conditions (3), représentons par

$$\frac{S_1}{T_1},\ \frac{S_2}{T_2}$$

les fractions convergentes du développement

$$q_{l-\lambda}+\cfrac{1}{q_{l-\lambda+1}+\ldots}$$

qui correspondent aux quotients incomplets q_{l-2}, q_{l-1}.

A l'aide de ces fractions, les fractions convergentes du développement

$$u=q_0+\cfrac{1}{q_1+\ldots+\cfrac{1}{q_{l-\lambda-2}+\cfrac{1}{q_{l-\lambda-1}+\ldots}}}$$

qui correspondent aux quotients incomplets

$$q_{l-\lambda-2},\ q_{l-\lambda-1},\ q_{l-2},\ q_{l-1},$$

seront déterminées les unes par les autres de la manière suivante:

$$\frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}}=\frac{P_{l-\lambda}S_1+P_{l-\lambda-1}T_1}{Q_{l-\lambda}S_1+Q_{l-\lambda-1}T_1},\quad \frac{P_l}{Q_l}=\frac{P_{l-\lambda}.S_2+P_{l-\lambda-1}T_2}{Q_{l-\lambda}.S_2+Q_{l-\lambda-1}T_2}.$$

En résolvant maintenant les équations

$$Q_{l-1}=Q_{l-\lambda}.S_1+Q_{l-\lambda-1}T_1,$$
$$Q_l=Q_{l-\lambda}S_2+Q_{l-\lambda-1}T_2$$

par rapport à

$$Q_{l-\lambda},\ Q_{l-\lambda-1},$$

et remarquant que, d'après les propriétés des fractions convergentes,

$$S_1T_2-T_1S_2=\pm 1,$$

on trouve pour $Q_{l-\lambda}$ l'expression

$$\pm Q_{l-\lambda}=Q_{l-1}T_2-Q_lT_1.$$

Multipliant cette expression par v, et passant de l'égalité des fonctions à l'égalité de leurs parties fractionnaires, il vient

$$\pm F(vQ_{l-\lambda})=F(vQ_{l-1}T_2)-F(vQ_lT_1).$$

Or, en vertu des égalités

$$vQ_{l-1}T_2=E(vQ_{l-1}T_2)+F(vQ_{l-1}T_2),\quad vQ_{l-1}=E(vQ_{l-1})+F(vQ_{l-1}),$$
$$vQ_lT_1=E(vQ_lT_1)+F(vQ_lT_1),\quad vQ_l=E(vQ_l)+F(vQ_l),$$

on trouve

$$F(vQ_{l-1}T_2) = T_2F(vQ_{l-1}) + T_2E(vQ_{l-1}) - E(vQ_{l-1}T_2),$$
$$F(vQ_lT_1) = T_1F(vQ_l) + T_1E(vQ_l) - E(vQ_lT_1).$$

Portant ces valeurs des fonctions

$$F(vQ_{l-1}T_2),\ F(vQ_lT_1)$$

dans l'expression obtenue plus haut de la fonction

$$F(vQ_{l-\lambda})$$

et faisant, pour abréger,

$$T_2E(vQ_{l-1}) - E(vQ_{l-1}T_2) - T_1E(vQ_l) + E(vQ_lT_1) = V,$$

il vient

$$(11) \qquad \pm F(vQ_{l-\lambda}) = T_2F(vQ_{l-1}) - T_1F(vQ_l) + V.$$

Comme, d'après nos notations,

$$\frac{S_1}{T_1},\ \frac{S_2}{T_2}$$

sont les fractions convergentes du développement

$$q_{l-\lambda} + \cfrac{1}{q_{l-\lambda+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \cdots}}}$$

qui correspondent aux quotients incomplets

$$q_{l-2},\ q_{l-1},$$

leurs dénominateurs T_1, T_2, devront être de mêmes degrés que les produits

$$q_{l-\lambda+1}\, q_{l-\lambda+2} \cdots q_{l-2},$$
$$q_{l-\lambda+1}\, q_{l-\lambda+2} \cdots q_{l-2}\, q_{l-1}$$

et par suite de mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{l-1}}{Q_{l-\lambda+1}},\ \frac{Q_l}{Q_{l-\lambda+1}},$$

formées au moyen des dénominateurs des fractions convergentes

$$\frac{P_{l-\lambda+1}}{Q_{l-\lambda+1}},\ \frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}},\ \frac{P_l}{Q_l}$$

de la fraction continue

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \ldots + \frac{1}{q_{l-\lambda} + \ldots + \frac{1}{q_{l-2} + \frac{1}{q_{l-1} + \ldots}}}},$$

par conséquent, on aura

$$\delta T_1 = \delta \frac{Q_{l-1}}{Q_{l-\lambda+1}}, \quad \delta T_2 = \delta \frac{Q_l}{Q_{l-\lambda+1}}.$$

Mais on a, d'après (9),

$$\delta F(vQ_l) \mathrel{\substack{=\\<}} \delta \frac{Q_l}{x^N}, \quad \delta F(vQ_{l-1}) \mathrel{\substack{=\\<}} \delta \frac{x^M}{Q_l};$$

on tire de là

$$\delta T_1 F(vQ_l) \mathrel{\substack{=\\<}} \delta \frac{Q_{l-1}\, Q_l}{x^N\, Q_{l-\lambda+1}}, \quad \delta T_2 F(vQ_{l-1}) \mathrel{\substack{=\\<}} \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}}.$$

Comme, d'après (8), le produit $Q_{l-1}\, Q_l$ est de degré inférieur à $M + N$, la première de ces inégalités nous donne

$$\delta T_1 F(vQ_l) < \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}}.$$

On voit par là que les deux fonctions

$$T_2 F(vQ_{l-1}), \quad T_1 F(vQ_l)$$

sont de degrés non inférieurs à

$$\frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}},$$

et dans ce cas, d'après la formule (11) et en remarquant que V ne contient pas de puissances négatives de la variable, on trouve

$$\delta F(vQ_{l-\lambda}) \mathrel{\substack{=\\<}} \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}},$$

ce qui, joint à l'égalité

$$\delta q_{l-\lambda} = \delta \frac{Q_{l-\lambda+1}}{Q_{l-\lambda}},$$

nous donne

$$\delta q_{l-\lambda} F(vQ_{l-\lambda}) \mathrel{\substack{=\\<}} \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda}}.$$

En faisant ici

$$\lambda = l - m - 1,\ l - m - 2, \ldots.\ 1,$$

et remarquant que, d'après le § 1, la fraction

$$\frac{x^M}{Q_{l-\lambda}}$$

reste de degré négatif, il vient

$$\delta q_{m+1} F(vQ_{m+1}) < 0,\ \delta q_{m+2} F(vQ_{m+2}) < 0, \ldots .\ \delta q_{l-1} F(vQ_{l-1}) < 0;$$

d'où il s'ensuit que, en déterminant les fonctions

$$\omega_{m+1},\ \omega_{m+2}, \ldots .\ \omega_{l-1}$$

par la formule générale

$$\omega_i = (-1)^{i-1} E(q_i F(vQ_i)),$$

on trouvera

$$\omega_{m+1} = 0,\ \omega_{m+2} = 0, \ldots ,\ \omega_{l-1} = 0.$$

En posant dans la formule précédente

$$\lambda = l - m$$

et remarquant que, suivant notre notation (§ 1),

$$\delta \frac{x^M}{Q_m} = \sigma,$$

on trouve

$$\delta q_m F(vQ_m) \overline{\overline{<}} \sigma;$$

d'où l'on conclut, d'après la formule ci-dessus qui détermine la valeur de la fonction ω_i, que

$$\delta \omega_m \overline{\overline{<}} \sigma.$$

Ainsi nous nous assurons de l'accomplissement des conditions

$$\omega_{m+1} = 0,\ \omega_{m+2} = 0. \ldots .\ \omega_{l-1} = 0,$$
$$\delta \omega_m \overline{\overline{<}} \sigma,$$

qui, avec les conditions déduites plus haut

$$\omega_l = 0,\ \omega_{l+1} = 0, \ldots .\ \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta \omega_{m+n} = \rho,$$

comprennent toutes les conditions (3).

On voit par là que les inégalités (4) constituent les conditions non-seulement nécessaires, mais encore suffisantes, pour que la formule

$$uX - Y,$$

X, Y étant entières, et X de degré non supérieur à m, puisse donner une expression approchée de la fonction v aux quantités près de l'ordre x^{-N} exclusivement.

14.

SUR
LA RÉSULTANTE DE DEUX FORCES
APPLIQUÉES À UN SEUL POINT.

Bulletin de la Société Mathématique de France, publié par les Secrétaires.
Tome VI. — Année 1877—78, p. 188—198.

(Séance du 14 juillet 1878).

Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point.

1. D'après un théorème sur les angles compris entre les plans qui passent par un point, on parvient aisément à une relation très-remarquable entre les angles que font les trois forces R_1, R_2, R_3, appliquées à un seul point et les résultantes de ces forces, prises deux à deux, savoir:

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} \frac{\sin(R_2, [R_2, R_3])}{\sin(R_3, [R_2, R_3])} \frac{\sin(R_3, [R_3, R_1])}{\sin(R_1, [R_3, R_1])} = 1, \tag{1}$$

où par

$$[R_1, R_2], \quad [R_2, R_3], \quad [R_3, R_1],$$

nous désignons les résultantes des forces R_1 et R_2, R_2 et R_3, R_3 et R_1, et par

$$(R_1, [R_1, R_2]) \quad (R_2, [R_1, R_2]), \quad (R_3, [R_3, R_1]), \ldots .$$

les angles entre les résultantes et les forces qui les composent.

C'est cette équation qui servait de base à deux nouvelles démonstrations du *parallélogramme des forces*, données en décembre 1875 par M. Darboux dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, et par moi dans une Communication faite à la *Société mathématique* de Moscou.

Nous allons montrer maintenant comment on peut trouver, d'après cette équation, la valeur du rapport

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])},$$

sans rien admettre sur la direction de la résultante et la continuité.

2. Après avoir remarqué, d'après l'équation (1), que le rapport

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])}$$

ne dépend pas de l'angle fait par les forces R_1, R_3 *), nous supposons que cet angle est réduit à 120 degrés, et nous désignons par φ l'angle entre la force R_1 et la résultante $[R_1, R_3]$ des deux forces R_1, R_3.

Nous obtenons ainsi

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\!g\,\varphi + \frac{1}{2}.$$

Mais on reconnaît aisément que la résultante d'un tel système de deux forces ne sera pas altérée si l'on diminue de 60 degrés l'angle compris entre elles, et que l'on diminue en même temps la force R_1 de R_3; car un tel changement de notre système peut évidemment être effectué si l'on y ajoute trois forces égales à R_3 et disposées symétriquement autour du point d'application, savoir: deux forces dans les directions opposées aux deux forces en question, et la troisième faisant avec ces forces un angle de 60 degrés.

Or, pour le système de deux forces R_1, R_3 ainsi modifié, on aura, d'après notre notation,

$$\frac{\sin(R_3, [R_1 - R_3, R_3])}{\sin(R_1 - R_3, [R_1 - R_3, R_3])} = \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\!g\,\varphi - \frac{1}{2},$$

ce qui, étant retranché de la formule précédente, nous donne

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} - \frac{\sin(R_3, [R_1 - R_3, R_3])}{\sin(R_1 - R_3, [R_1 - R_3, R_3])} = 1.$$

3. En remplaçant dans cette équation R_1 par

$$R_0, \quad R_0 - R_3, \quad R_0 - 2R_3, \ldots, \quad R_0 - (m-1)R_3,$$

que nous supposons toutes ne pas être inférieures à R_3, nous trouvons une série d'équations qui donnent

$$\frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} - \frac{\sin(R_3, [R_0 - mR_3, R_3])}{\sin(R_0 - mR_3, [R_0 - mR_3, R_3])} = m,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(2) \quad \frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} = \frac{R_0}{R_3}\left(1 + \frac{R_0 - mR_3}{R_0}\left\{\frac{R_3 \sin(R_3, [R_0 - mR_3, R_3])}{(R_0 - mR_3)\sin(R_0 - mR_3, [R_0 - mR_3, R_3])} - 1\right\}\right),$$

en remplaçant le nombre m par la différence

$$\frac{R_0}{R_3} - \frac{R_0 - mR_3}{R_3},$$

égale à ce nombre.

C'est à l'aide de cette formule que nous parvenons à tirer de l'équation (1) la valeur du rapport

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])}.$$

*) *Voir* la démonstration du parallélogramme des forces de M. Darboux, citée plus haut.

4. A cet effet, nous supposons que, pour une force quelconque r, on ait trouvé une quantité L telle que la valeur numérique de

$$\frac{r \sin(r, [r, r_1])}{r_1 \sin(r_1, [r, r_1])} - 1$$

ne surpasse pas L pour toutes les valeurs de r_1 depuis $r_1 = r$ jusqu'à $r_1 = 2r$, l'angle (r, r_1) étant égal à 60 degrés. Dans cette supposition, en désignant par θ, $\theta^{(0)}$ des quantités comprises entre zéro et 1, nous aurons, pour toutes les valeurs de $r_1 = r + \theta r$, cette formule

$$\frac{r \sin(r, [r, r + \theta r])}{(r + \theta r)\sin(r + \theta r, [r, r + \theta r])} - 1 = \pm\, \theta^{(0)} L.$$

Comme il est certain que la résultante ne change pas de direction quand on remplace les forces par leurs sous-multiples, on aura de même

$$(3) \qquad \frac{R_3 \sin(R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])}{(R_3 + \theta R_3)\sin(R_3 + \theta R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])} - 1 = \pm\, \theta^{(0)} L,$$

pour toutes les valeurs de

$$(4) \qquad R_3 = \frac{r}{n},$$

n étant un nombre entier.

5. Mais, en prenant dans l'équation (2) pour m la partie entière du quotient

$$(R_0 - R_3) : R_3,$$

on aura

$$R_0 - mR_3 = R_3 + \theta R_3,$$

et, pour cette valeur de m, l'équation (2) devient

$$\frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} = \frac{R_0}{R_3}\left(1 + \frac{R_3 + \theta R_3}{R_0}\left\{\frac{R_3 \sin(R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])}{(R_3 + \theta R_3)\sin(R_3 + \theta R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])} - 1\right\}\right),$$

qui, d'après (3), dans le cas de

$$R_3 = \frac{r}{n},$$

nous donne

$$\frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} = \frac{R_0}{R_3}\left[1 \pm \frac{R_3 + \theta R_3}{R_0}\, \theta^{(0)} L\right].$$

En posant, dans cette formule,

$$R_0 = R_1, \quad R_0 = R_2,$$

et en désignant par

$$\theta_1, \quad \theta_2,$$
$$\theta_1^{(0)}, \quad \theta_2^{(0)}$$

les valeurs correspondantes de θ et $\theta^{(0)}$, nous obtenons

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} = \frac{R_1}{R_3}\left[1 \pm \frac{R_3 + \theta_1 R_3}{R_1}\,\theta_1^{(0)} L\right],$$

$$\frac{\sin(R_3, [R_2, R_3])}{\sin(R_2, [R_2, R_3])} = \frac{R_2}{R_3}\left[1 \pm \frac{R_3 + \theta_2 R_3}{R_2}\,\theta_2^{(0)} L\right].$$

6. En portant ces valeurs dans l'équation (1), nous trouvons qu'elle donnera

$$\frac{\sin(R_1, [R_1 . R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1}\,\frac{1 \pm \dfrac{(1+\theta_2) R_3}{R_2}\,\theta_2^{(0)} L}{1 \pm \dfrac{(1+\theta_1) R_3}{R_1}\,\theta_1^{(0)} L};$$

d'où, par la substitution de la valeur (4) de R_3, nous tirons cette formule:

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1}\,\frac{1 \pm \dfrac{(1+\theta_2) r}{nR_2}\,\theta_2^{(0)} L}{1 \pm \dfrac{(1+\theta_1) r}{nR_1}\,\theta_1^{(0)} L}.$$

Comme, dans cette formule, le nombre n peut être pris aussi grand qu'on le voudra, et que les quantités

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_1^{(0)},\ \theta_2^{(0)},$$

les seules qui dépendent du nombre n et des forces R_1, R_2, restent comprises entre zéro et 1, on trouve, d'après cette formule, en faisant croître n à l'infini,

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1}.$$

15.

LES PLUS SIMPLES SYSTÈMES DE TIGES ARTICULÉES.

(TRADUIT PAR L. FALISSE ET V. DWELSHAUVERS-DERY.)

(Revue Universelle des Mines. T. XV, 2-e série, p. 507, 28-e année, 1884.)

О простѣйшихъ сочлененіяхъ.

(Математическій Сборникъ, издаваемый Московскимъ математическимъ обществомъ.
T. IX, стр. 340—351, 1878.)

Les plus simples systèmes de tiges articulées.

§ 1. Dans un article paru au tome XIV des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St-Pétersbourg sous le titre «*Sur un mécanisme*» *), nous avons montré comment on peut, au moyen de trois barres ou tiges (deux manivelles et une bielle) composer un mécanisme tel que le point milieu de la bielle décrive une courbe qui, entre des limites fort éloignées, s'écarte peu d'une ligne droite; s'en écarte moins que la courbe obtenue par des systèmes aussi simples, tels que le parallélogramme simple de Watt et celui d'Evans.

Nous allons montrer maintenant qu'il existe d'autres systèmes articulés qui ne sont non plus composés que de trois pièces, et qui donnent le même degré d'approximation à la ligne droite. On les obtient par la substitution de certaines tiges à d'autres du premier mécanisme, faite en vue de ne modifier en rien la trajectoire du point décrivant. En conséquence toutes les formules démontrées dans l'article ci-dessus cité restent applicables.

Nous traiterons par la même méthode le mécanisme que nous avons fait connaître dans une Note lue au Congrès de l'Association Française pour l'avancement des sciences (Paris, 1878).

§ 2. Le mécanisme qui fait l'objet de l'article cité plus haut est représenté sur la figure 1. Il se compose de deux manivelles égales CA, C_1A_1, tournant autour des centres fixes C, C_1, et de la bielle AA_1 articulée aux extrémités des manivelles. C'est le point M, milieu de cette bielle, qui décrit une courbe fort approchée de la ligne droite dès que les conditions suivantes sont remplies:

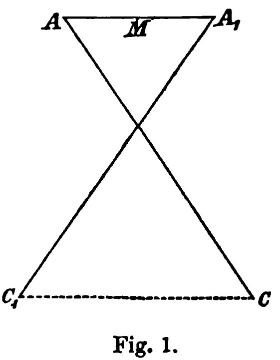


Fig. 1.

1) *La distance des centres fixes C, C_1 doit être rigoureusement égale au tiers de la somme des longueurs* $AC + A_1C_1 + AA_1$.

*) T. II, pag. 51—57.

2) *La longueur de la bielle AA_1 doit dépasser le quart de celle des manivelles, mais ne pas différer notablement de cette limite.*

A mesure que $AA_1 - \frac{AC}{4}$ tend vers zéro, la longueur de la portion sensiblement rectiligne de la trajectoire du point M diminue, mais en même temps le degré d'approximation à la ligne droite croît plus rapidement que ne diminue sa longueur. C'est ce que nous avons démontré dans l'article précité dont nous rapportons les formules suivantes:

$$\frac{AA_1}{AC} = a,$$

$$l = AC\sqrt{\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{(a+2)^2}},$$

$$E = \frac{AC}{3}\left[\sqrt{1+\frac{3(4a-1)^3}{16(1-a)(a+2)^3}} - 1\right]\sqrt{(1-a)(a+2)},$$

dans lesquelles l représente la longueur de la course du point décrivant M, et E l'écart maximum.

§ 3. En vue de transformer ce mécanisme (fig. 2), menons les droites $BM = CA$ et $BC = MA_1 = MA = \frac{AA_1}{2}$. Quelle que soit la position des pièces, la droite qui joint le point A_1 au point C rencontrera toujours la droite MB en son point milieu N,

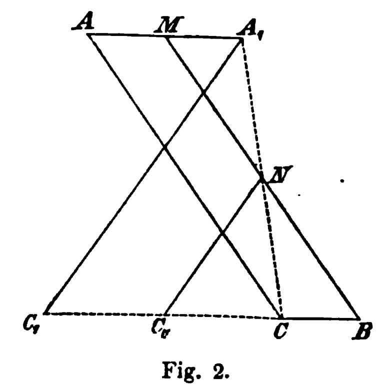


Fig. 2.

$$NC = \frac{1}{2}A_1C.$$

Il s'ensuit que le point A_1 et le point N décrivent des courbes semblables dont les éléments sont entre eux comme $2:1$ et en même temps sont parallèles. Or le point A_1 décrit un arc de cercle dont C_1 est le centre et A_1C_1 le rayon; donc le point N décrira aussi un arc de cercle, dont le rayon sera la moitié de A_1C_1 et dont le centre se trouvera sur une droite parallèle à A_1C_1. Soit C_{11} ce centre, on aura donc

$$NC_{11} = \frac{1}{2}A_1C_1.$$

Il est visible que le point C_{11} se trouve au milieu de la droite CC_1,

$$CC_{11} = C_1C_{11}.$$

Maintenant faisons de $C_{11}\,N$ une manivelle rigide, de CB une seconde manivelle, de BN une bielle que nous prolongeons jusqu'en M, nous aurons le mécanisme représenté sur la fig. 3, fournissant pour le point M la même trajectoire que le mécanisme de la fig. 1 et composé du même nombre de pièces.

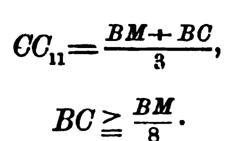
Les conditions relatives à la fig. 1,

$$CC_1 = \frac{2AC + AA_1}{3}$$

$$AA_1 \geqq \frac{AC}{4}$$

Fig. 3.

s'énoncent, pour la fig. 3, comme suit:



$$CC_{11} = \frac{BM + BC}{3},$$

$$BC \geqq \frac{BM}{8}.$$

De plus le rapport a qui entre dans les expressions de l et E devient

$$a = 2\,\frac{BC}{BM}.$$

§ 4. Passons au mécanisme dont nous avons donné communication au Congrès de Paris, en 1878, et dans lequel le point décrivant M ne se trouve plus sur la direction AA_1, mais est toujours invariablement relié à la bielle. Nous considérerons donc cette bielle comme ayant la forme du triangle AMA_1 (fig. 4) articulé en A et A_1 respectivement aux deux manivelles.

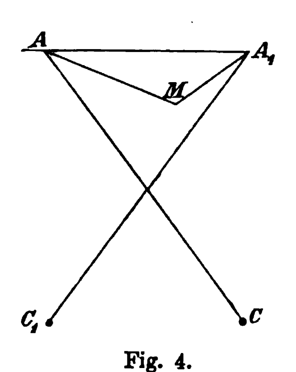


Fig. 4.

Pour transformer ce mécanisme comme précédemment, nous introduisons dans sa composition les lignes MB égale et parallèle à AC, et CB égale et parallèle à AM (fig. 5); ensuite un triangle MBN fixé à la droite MB et semblable au triangle AMA_1, de manière que l'on ait

(1) $$MBN = A_1AM;$$

(2) $$\frac{NB}{MB} = \frac{AM}{AA_1}.$$

Traçons les droites CA_1 et CN. Les angles A_1AC et NBC seront égaux, car

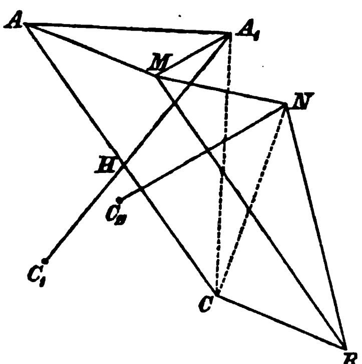


Fig. 5.

$$A_1AC = A_1AM + MAC,$$

$$NBC = NBM + MBC,$$

Or $A_1AM = NBM$ et $MAC = MBC$ parce que la figure $AMBC$ est un parallélogramme. Donc, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{NB}{AC} = \frac{CB}{AA_1},$$

et les triangles A_1AC et CBN sont semblables, ce qui mène aux relations suivantes:

(3) $$\frac{A_1C}{CN} = \frac{AA_1}{CB},$$

$$NCB = AA_1C,$$

(4) $$CNB = ACA_1.$$

Dans le triangle A_1AC, nous avons

$$AA_1C = \pi - A_1AC - ACA_1 = \pi - A_1AM - MAC - ACA_1;$$

remplaçant ici

$$\pi - MAC$$

par

$$ACB = ACA_1 + A_1CN + NCB,$$

nous obtenons

$$AA_1C = A_1CN + NCB - A_1AM,$$

ce qui, à cause de l'égalité des angles NCB et A_1AC, donne

$$A_1CN = A_1AM.$$

Ainsi donc, quelle que soit la position des pièces du mécanisme, les droites A_1C et NC comprendront toujours un même angle constant et égal à A_1AM. De plus, si dans l'équation (3) nous remplaçons CB par son égale AM, nous trouvons

$$\frac{A_1C}{CN} = \frac{AA_1}{AM},$$

relation qui indique que le rapport des longueurs CA_1 et CN des rayons vecteurs est aussi constant.

§ 5. Il s'ensuit que les points A_1 et N décrivent des courbes semblables dont les éléments homologues forment avec leurs rayons vecteurs des angles égaux. Et puisque le point A_1 décrit un arc de cercle dont le centre est C_1, nous en concluons que le point N décrit aussi un arc de cercle.

Soit C_{11} le centre de cet arc de cercle. Les rayons vecteurs C_1A_1 et $C_{11}N$ sont respectivement normaux aux arcs élémentaires décrits par les points A_1 et N; et, en vertu de ce que nous venons de dire et du rapport des rayons C_1A_1 et CN et de l'inclinaison des arcs élémentaires, nous avons

$$\frac{A_1C_1}{C_{11}N}=\frac{AA_1}{AM},$$

ce qui donne, pour déterminer la position du point C_{11},

$$CNC_{11}=CA_1C_1,$$

(5) $$C_{11}N=\frac{AM}{AA_1}\cdot A_1C_1.$$

Combinant l'avant-dernière égalité avec l'équation (4), nous trouvons

$$CNC_{11}+CNB=CA_1C_1+ACA_1,$$

ce qui, ainsi qu'il est facile de voir fig. 5, nous conduit à

$$BNC_{11}=AHA_1,$$

Ainsi, il est fort simple de déterminer la direction de la ligne NC_{11}; ensuite l'équation (5) donne la position du centre C_{11}.

Le point fixe C_{11} autour duquel tourne le point N étant ainsi déterminé, on n'entravera nullement les mouvements du mécanisme si on y introduit la manivelle $C_{11}N$ et le triangle mobile MNB. Mais on pourra en supprimer les manivelles C_1A_1 et CA en conservant la nouvelle manivelle CB.

Ainsi l'on arrive à la forme de mécanisme représentée fig. 6 qui est exactement l'équivalent du mécanisme fig. 4.

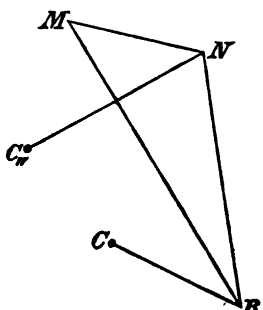


Fig. 6.

§ 6. Admettons que le mécanisme fig. 4

que nous avons ainsi transformé soit symétrique dans sa position moyenne, c'est-à-dire que

$$MAA_1 = MA_1A;\ MAC = MA_1C_1;\ AC = A_1C_1,$$

et posons pour plus de simplicité (fig. 5):

$$HAA_1 = HA_1A = \varphi,$$
$$MAA_1 = MA_1A = \psi,$$
$$AC = A_1C_1 = r.$$

Nous trouverons:

$$(6)\quad \begin{cases} MBN = BMN = \psi;\ MNB = \pi - 2\psi; \\ CBN = \varphi;\ C_{11}NB = AHA_1 = \pi - 2\varphi; \\ BC = AM = \frac{AA_1}{2\cos\psi}; \\ MN = NB = \frac{r}{2\cos\psi};\ C_{11}N = \frac{r}{2\cos\psi}. \end{cases}$$

Les deux dernières équations montrent que, dans le cas spécial que nous examinons, fig. 7, les longueurs MN, NB et $C_{11}N$ sont égales.

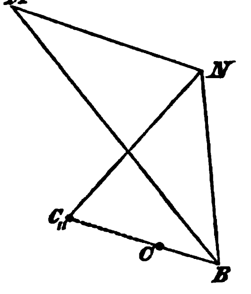


Fig. 7.

D'où il suit que le triangle $C_{11}NB$ est isocèle et que l'angle

$$NBC_{11} = \frac{\pi - C_{11}NB}{2},$$

et puisque

$$C_{11}NB = \pi - 2\varphi,$$

il en résulte

$$NBC_{11} = \varphi.$$

Or, on a aussi

$$NBC = \varphi,$$

donc les trois points B, C, C_{11} sont en ligne droite.

Ainsi donc le mécanisme symétrique à trois pièces peut toujours être remplacé par un mécanisme non symétrique, fig. 7, dans lequel les longueurs MN, NB, $C_{11}N$ sont égales, le triangle MNB isocèle, et les centres de rotation fixes C et C_{11} se trouvent situés sur la même droite occupée par la manivelle CB lorsque le mécanisme est dans sa position moyenne.

aires pour obtenir de ce mécanisme le
toire rectiligne, on les trouve facilement
a formule que nous avons donnée dans la
1878 au sujet du mécanisme symétrique.
l'un déplacement indéfiniment petit, on a:

$$\frac{\cos 2\varphi}{\ldots\varphi} r; \quad \psi = 3\varphi - \pi.$$

les relations (6), nous avons, pour déter-
non symétrique:

$$- 2\psi = 3\pi - 6\varphi;$$

$$= - \frac{\cos^2\varphi . \cos 2\varphi}{\cos^2 3\varphi} r;$$

$$N = \frac{r}{2\cos\psi} = - \frac{r}{2\cos 3\varphi}.$$

$$B = C_{11} N = R$$

$$\frac{\cos^2\varphi \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} R.$$

celle de

$$= 3\pi - 6\varphi,$$

ion moyenne, les trois points C_{11}, C et B
$V = \varphi$, suffisent pour déterminer complè-

étriques ainsi dérivés du mécanisme symé-
nation du mouvement rectiligne alternatif
En donnant aux centres de rotation des
aire décrire un tour entier à la manivelle
ligne sensiblement droite.
es (Note au Congrès de 1878), on trouve,
nction de la quantité auxiliaire t,

$$\frac{t(t^2+2)+\sqrt{2-t^2}}{2(t^2+1)},$$

$$\text{tang}\,\psi = \frac{(3 - t\sqrt{2-t^2})\sin\varphi + 2(t - \sqrt{2-t^2})}{(1 + t\sqrt{2-t^2})\cos\varphi},$$

$$AA_1 = \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{1+t\sqrt{2-t^2}} \cos\varphi . r.$$

Ayant déterminé φ, ψ et AA_1 à l'aide de ces formules, les équations (6) nous donnent pour le mécanisme non symétrique dérivé (fig. 7):

$$MNB = \pi - 2\psi;\ \ OBN = \varphi;$$
$$C_{11}N = MN = NB = \frac{r}{2\cos\psi};$$
$$BC = \frac{AA_1}{2\cos\psi} = \frac{t\sqrt{2-t^2}}{1+t\sqrt{2-t^2}}\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\cdot r.$$

Faisant

$$NB = R$$

et éliminant r, on trouve

$$BC = \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{1+t\sqrt{2-t^2}}\cos\varphi\,.\,R,$$
$$C_{11}N = R;\ \ MN = R;$$

ce qui, avec les relations

$$MNB = \pi - 2\psi;\ \ CBN = \varphi$$

suffit complètement pour déterminer le mécanisme et c'est *pour une valeur quelconque* de t.

Le choix de cette valeur dépend du degré d'approximation au mouvement rectiligne que l'on veut obtenir. Plus t est petit, moindre est l'écart maximum dont l'expression est du reste donnée par

$$E = \frac{4\cos\psi\,(1+2t\sin\varphi+t^2)\,t^3}{[2\sin\varphi+3t+2t^2\sin\varphi+t^3]^2}\,R.$$

La longueur de l'excursion du point M pour un tour entier de la manivelle BC diminue également avec la valeur de t, mais pas aussi rapidement. Elle est donnée par la formule

$$l = \frac{4\cos\varphi\,.\cos\psi\,.\,t\sqrt{2-t^2}}{1+t\sqrt{2-t^2}}\,K.R,$$

dans laquelle K est la plus grande valeur que prend l'expression

$$\left[\sqrt{\frac{(1+t\sqrt{2-t^2})^2.\operatorname{tang}^2\varphi+2t\sqrt{2-t^2}\,(1-\cos\alpha)}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2-2t\sqrt{2-t^2}\,(1-\cos\alpha)}}-\operatorname{tang}\psi\right]\sin\alpha,$$

quand on y fait varier α de 0 à 2π.

Faisons, par exemple, $t = 0{,}15$, nous trouvons par les formules ci-dessus:

$$\varphi = 32^\circ 38';\ \ \psi = -44^\circ 43';\ \ BC = 0{,}2934\,R.$$

Ce valeurs nous conduisent au mécanisme représenté fig. 8, dans lequel le point décrivant M engendre à peu près la droite M_1M_{11} par tour de la manivelle BC.

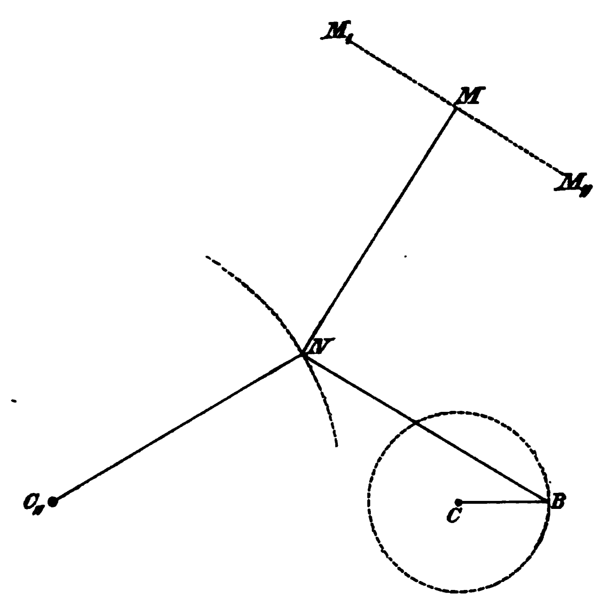


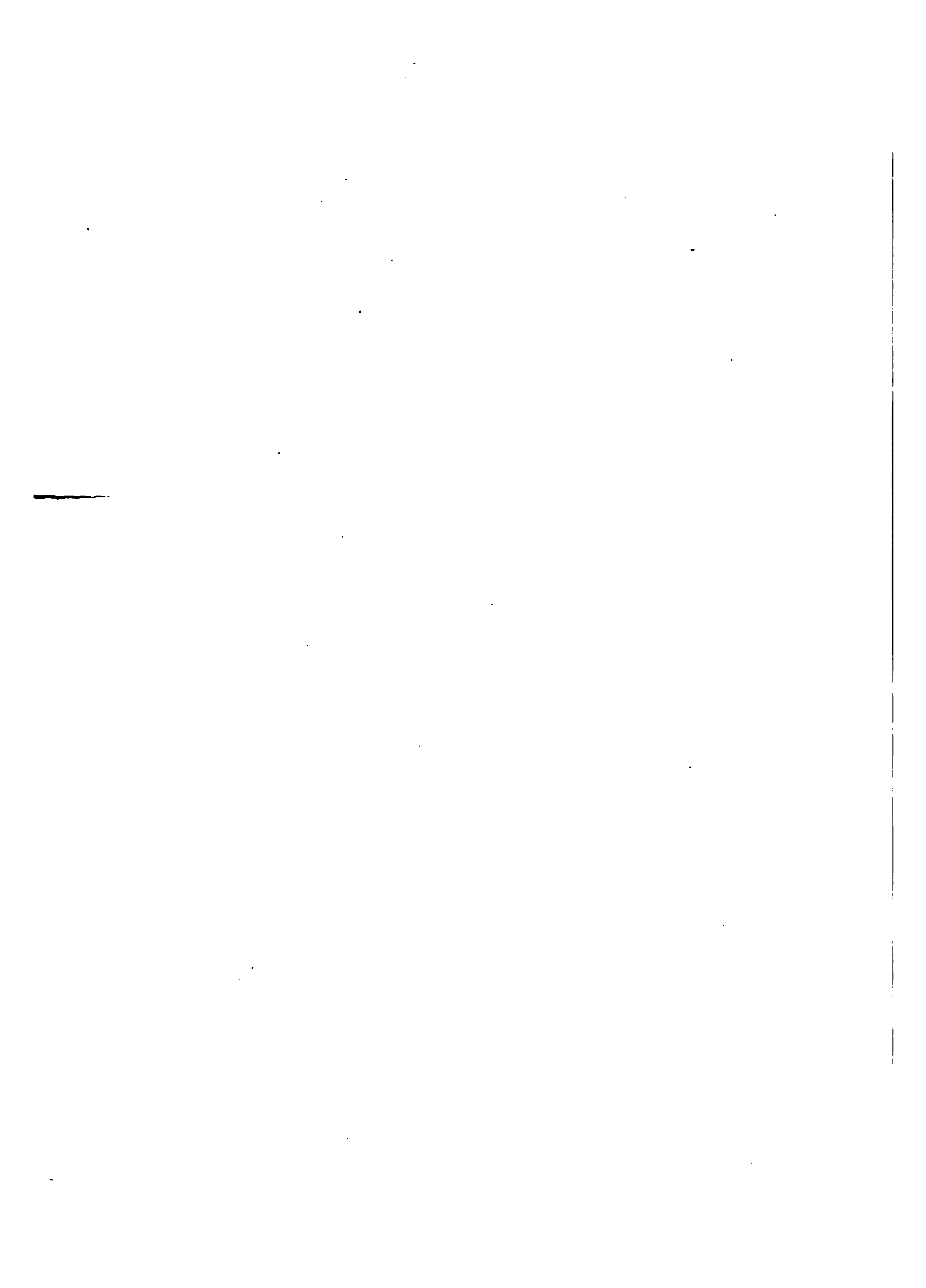
Fig. 8.

Faisant $t = 0,15$ et donnant à φ et ψ les valeurs ci-dessus dans la formule qui donne l'écart maximum E, nous trouvons que

$$\text{cet écart maximum } E = 0,00458\, R.$$

La course l du point générateur de la ligne approximativement droite sera

$$l = 0,842\, R.$$



16.

SUR LES PARALLÉLOGRAMMES
COMPOSÉS DE TROIS ÉLÉMENTS
ET SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT À UN AXE.

(TRADUIT PAR I. W. MESTSCHERSKY.)

О параллелограммахъ,

состоящихъ изъ трехъ элементовъ и симметрическихъ около одной оси.

(Приложеніе къ XXXIV тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 3, 1879 г.)

Sur les parallélogrammes composés de trois éléments et symétriques par rapport à un axe.

§ 1. Dans un article intitulé: *Sur un mécanisme* *), nous avons indiqué les conditions pour qu'un parallélogramme le plus simple réalise le mouvement qui diffère très peu du mouvement rectiligne.

Ce parallélogramme consiste de deux manivelles AC et A_1C_1 (fig. 1), de la même longueur, tournant autour des axes fixes C et C_1, et de la bielle AA_1 articulée aux extrémités des manivelles; le point M, qui exécute le mouve-

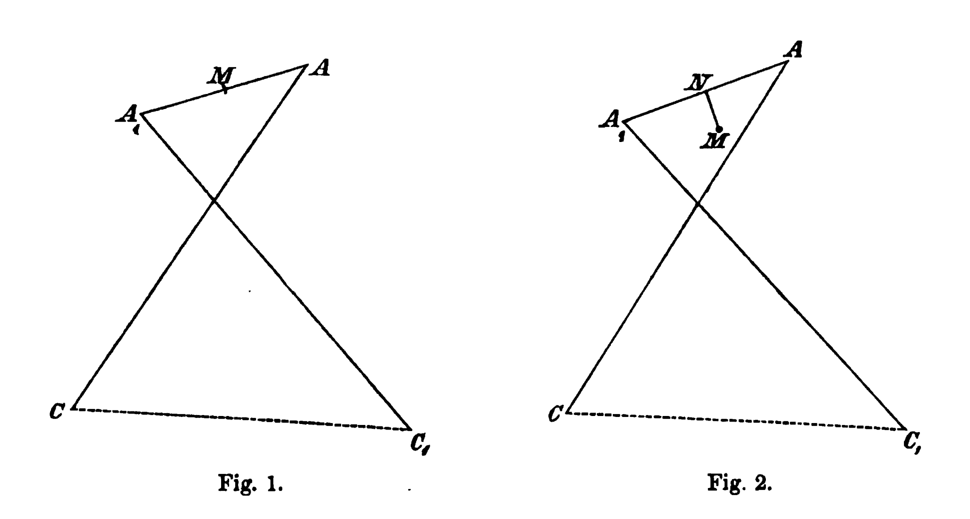


Fig. 1. Fig. 2.

ment désiré, se trouve sur l'axe de la bielle AA_1 à distance égale de ses extrémités A et A_1.

Nous allons indiquer maintenant les conditions du même genre pour le cas, où le point qui a le mouvement désiré ne se trouve pas sur l'axe de la bielle AA_1, mais sur la perpendiculaire MN (fig. 2) également distante des points A et A_1.

*) T. II, pag. 51—57.

Il est facile de voir que dans ce cas le mécanisme considéré comprend tous les parallélogrammes composés de trois éléments et symétriques par rapport à un axe.

Les conditions pour que ces parallélogrammes en leur forme générale réalisent le mouvement qui s'approche le plus près possible du mouvement rectiligne s'obtiennent par les mêmes méthodes que nous avons appliquées dans le cas particulier, qui était l'objet de la note citée.

Toute la différence consiste en ce que dans le cas général les calculs sont plus compliqués et par suite les conditions cherchées ne peuvent pas être exprimées d'une manière si simple comme dans le cas particulier que nous avons examiné, où la longueur de la perpendiculaire MN est égale à zéro.

Pour présenter ces conditions sous la forme la plus simple possible nous introduirons une quantité auxiliaire au moyen de laquelle toutes les dimensions des parallélogrammes considérés s'expriment rationnellement.

Quant à la détermination de cette quantité auxiliaire, elle peut être calculée ou d'après le degré de précision que doit avoir le mouvement cherché presque rectiligne, ou bien d'après la longueur de la course, sur laquelle on désire avoir le mouvement qui s'écarte peu du mouvement rectiligne.

Les équations qu'on y rencontre alors peuvent être facilement résolues par approximation.

§ 2. En considérant notre mécanisme dans sa position moyenne (fig. 3), où AA_1 est parallèle à CC_1, droite qui passe par les axes de rotation des manivelles, et par suite les angles ACC_1 et A_1C_1C sont égaux, nous posons

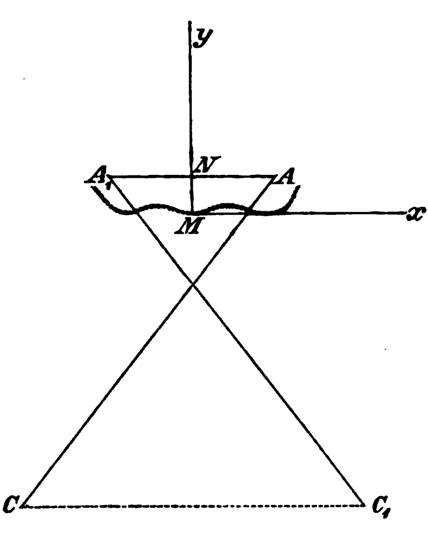


Fig. 3.

$$ACC_1 = A_1C_1C = \varphi.$$

La place du point M, qu'il occupe alors, sera prise pour origine des coordonnées, une parallèle à CC_1 pour axe des x et une perpendiculaire pour axe des y.

En examinant la courbe décrite par le point M, nous observons qu'elle est symétrique par rapport à l'axe Oy, puisque tout le mécanisme est symétrique par rapport à cet axe; par suite, cette courbe, passant par l'origine, touchera en ce point l'axe Ox sans le couper; dans le voisinage de ce point la courbe décrite par le point M est susceptible de devenir très peu différente de la droite.

Les conditions pour que cela ait lieu peuvent être représentées au moyen d'une quantité auxiliaire t de la manière suivante.

En posant

$$AC = A_1C_1 = 1, \quad AA_1 = a, \quad NM = c,$$

nous déterminons les quantités a et c d'après les formules

(1) $$a = \frac{T^2 - 2}{T^2 - 1} \cos\varphi,$$

(2) $$c = \frac{(2 - T^2)\,[2T - (T^2 + 1)\sin\varphi]}{2\,(T^2 - 1)^2},$$

où

(3) $$T = \frac{2\sin\varphi\,(1 + t^2) + t\,(3 + t^2)}{1 - t^2}.$$

Il est facile de montrer que, ces conditions étant remplies, la courbe décrite par le point M dans une certaine étendue plus ou moins considérable ne sort pas de l'espace limité par deux parallèles, dont la distance est égale à

$$\frac{4\,(1 + 2\sin\varphi . t + t^2)\,t^3}{(2\sin\varphi + 3t + 2\sin\varphi . t^2 + t^3)^2},$$

et se rapproche donc rapidement de zéro, à mesure que la quantité auxiliaire t diminue.

§ 3. Pour déterminer les positions du point M correspondantes aux différents angles que fait la droite AA_1 avec CC_1 (fig. 4), nous désignons par α l'angle variable compris entre les droites AA_1 et CC_1, par β et γ respectivement les angles ACC_1 et A_1C_1C. En projetant la ligne brisée OO_1CANM sur les axes des coordonnées et observant que

$$AC = 1, \quad AN = \frac{a}{2}, \quad NM = c,$$

et que l'axe Ox est parallèle à la droite CC_1, nous obtenons

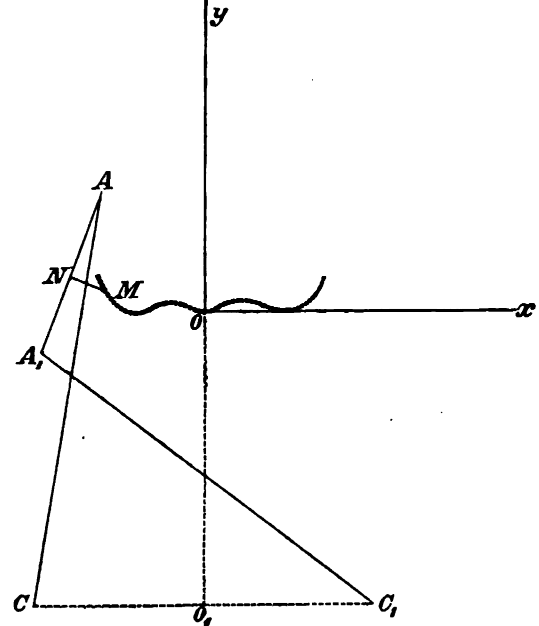


Fig. 4.

les formules suivantes pour la détermination des coordonnées du point M:

$$x = -\,CO_1 + \cos\beta - \frac{a}{2}\cos\alpha + c\sin\alpha,$$

$$y = -\,OO_1 + \sin\beta - \frac{a}{2}\sin\alpha - c\cos\alpha.$$

On applique ces formules au cas, où la droite AA_1 est parallèle à CC_1; observant que dans ce cas

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \varphi,$$

on obtient les égalités

$$0 = -CO_1 + \cos\varphi - \frac{a}{2},$$

$$0 = -OO_1 + \sin\varphi - c.$$

En portant les longueurs des droites CO et OO_1, tirées de ces égalités, dans les équations précédentes, nous aurons les expressions suivantes pour les coordonnées du point M:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \cos\beta + \frac{a}{2}(1 - \cos\alpha) + c\sin\alpha - \cos\varphi, \\ y = \sin\beta - \frac{a}{2}\sin\alpha + c(1 - \cos\alpha) - \sin\varphi. \end{cases}$$

Pour obtenir l'équation entre les angles variables β et α nous projetons la ligne brisée CAA_1C_1 sur les axes des coordonnées, ce qui nous donne les équatious:

$$\cos\beta - a\cos\alpha + \cos\gamma - CC_1 = 0,$$

$$\sin\beta - a\sin\alpha - \sin\gamma = 0.$$

En appliquant ces équations au cas, où la droite AA_1 est parallèle à CC_1 et par conséquent

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma = \varphi,$$

nous avons

$$2\cos\varphi - a - CC_1 = 0;$$

par suite, les équations précédentes nous donnent:

$$\cos\gamma = 2\cos\varphi - \cos\beta - a(1 - \cos\alpha), \quad \sin\gamma = \sin\beta - a\sin\alpha.$$

En ajoutant ces équations après les avoir élevées au carré, nous trouverons l'équation suivante entre les angles variables β et α:

$$[2\cos\varphi - \cos\beta - a(1 - \cos\alpha)]^2 + [\sin\beta - a\sin\alpha]^2 = 1.$$

En effectuant les opérations indiquées nous réduisons cette équation à la forme:

$$(5) \quad [2\cos\varphi - a(1-\cos\alpha)]\cos\beta = 2\cos^2\varphi - a\sin\alpha\sin\beta - a(2\cos\varphi - a)(1-\cos\alpha).$$

En remplaçant $\cos\beta$ par $\sqrt{1-\sin^2\beta}$ et élevant au carré, nous trouvons:

$$[2\cos\varphi - a(1-\cos\alpha)]^2 (1-\sin^2\beta) =$$
$$\left[a\sin\alpha\sin\beta - 2\cos^2\varphi + a(2\cos\varphi - a)(1-\cos\alpha)\right]^2.$$

Il en résulte l'équation suivante pour déterminer la différence $\sin\beta - \frac{a}{2}\sin\alpha$:

$$2\left[2\cos^2\varphi + a(a-2\cos\varphi)(1-\cos\alpha)\right]\left[\sin\beta-\frac{a}{2}\sin\alpha\right]^2 =$$
$$[2\cos\varphi - a(1-\cos\alpha)]^2\left[1-\cos^2\varphi - \frac{a(a-2\cos\varphi)}{2}(1-\cos\alpha)\right].$$

En portant ici la valeur de a, tirée de (1), et posant

$$\nu = 1 + \frac{1}{2}\frac{T^2(2-T^2)}{(T^2-1)^2}(1-\cos\alpha), \tag{6}$$

on trouve l'équation:

$$\nu\left[\sin\beta - \frac{a}{2}\sin\alpha\right]^2 T^4 = [1+(T^2-1)\nu]^2(1-\cos^2\varphi\,.\,\nu). \tag{7}$$

D'ailleurs d'après les formules (4) nous trouvons que

$$\sin\beta - \frac{a}{2}\sin\alpha = y - c(1-\cos\alpha) + \sin\varphi;$$

en y portant la valeur de c tirée de l'équation (2) et la valeur de $1-\cos\alpha$ d'après (6), nous avons

$$\sin\beta - \frac{a}{2}\sin\alpha = y + \sin\varphi - \frac{2T-(T^2+1)\sin\varphi}{T^2}(\nu-1);$$

par suite, l'équation (7) nous donne

$$\nu\left\{T^2y + 2T - \sin\varphi - [2T-(T^2+1)\sin\varphi]\nu\right\}^2 =$$
$$[1+(T^2-1)\nu]^2(1-\cos^2\varphi\,.\,\nu). \tag{8}$$

§ 4. D'après l'équation (8) que nous avons trouvée, il est facile de faire voir pour quelles valeurs de l'angle α le point M se trouvera sur l'axe Ox.

Puisque l'ordonnée y pour les points de cet axe est égale à zéro, on obtient les valeurs de ν qui correspondent à la position du point M sur l'axe Ox de l'équation (8), si l'on pose

$$y = 0.$$

On trouve ainsi pour déterminer ces valeurs de ν l'équation:

$$\nu\left\{2T - \sin\varphi - [2T-(T^2+1)\sin\varphi]\nu\right\}^2 = [1+(T^2-1)\nu]^2(1-\cos^2\varphi\,.\,\nu).$$

§ 5. Pour la détermination des valeurs limites $\alpha = \pm \alpha_1$ et $x = \pm x_1$, pour lesquelles le point M traverse la droite (10), d'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, nous posons dans l'équation (6)

$$\nu = \left(\frac{1 + 2 \sin \varphi . t + t^2}{1 - 2 \sin \varphi . T + T^2}\right)^2;$$

on obtient alors pour déterminer les valeurs $\alpha = \pm \alpha_1$ l'équation suivante:

$$(12) \qquad \cos \alpha_1 = 1 - \frac{2(1 - T^2)^2}{T^2 (2 - T^2)} \left[\left(\frac{1 + 2 \sin \varphi . t + t^2}{1 - 2 \sin \varphi . T + T^2}\right)^2 - 1\right].$$

Pour trouver les valeurs correspondantes de la coordonnée $x = \pm x_1$ nous portons la valeur de $\cos \beta$ tirée de l'équation (5) dans l'expression (4) de la coordonnée x, qui devient alors

$$x = -a \left[\frac{\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha}{2 \cos \varphi - a (1 - \cos \alpha)} - \frac{c}{a}\right] \sin \alpha;$$

en remplaçant dans l'expression

$$2 \cos \varphi - a (1 - \cos \alpha)$$

a et $1 - \cos \alpha$ par leurs valeurs tirées des équations (1) et (6), on obtient

$$2 \cos \varphi - a (1 - \cos \alpha) = \frac{2 \cos \varphi}{T^2} \left[1 + (T^2 - 1) \nu\right].$$

En déterminant, d'après l'équation (7), la valeur de

$$\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha,$$

nous avons

$$\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{1 + (T^2 - 1)\nu}{T^2} \sqrt{\frac{1}{\nu} - \cos^2 \varphi},$$

d'où il vient

$$\frac{\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha}{2 \cos \varphi - a (1 - \cos \alpha)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\nu} - \cos^2 \varphi}}{2 \cos \varphi};$$

par conséquent, l'expression de la coordonnée x que nous avons trouvée plus haut peut s'écrire:

$$(13) \qquad x = -a \left[\frac{1}{2 \cos \varphi} \sqrt{\frac{1}{\nu} - \cos^2 \varphi} - \frac{c}{a}\right] \sin \alpha.$$

On détermine ainsi la coordonnée x du point M pour les différentes valeurs de l'angle α; quant à la valeur de ν, on la trouve de l'équation (6).

L'équation (13) nous permet de déterminer les valeurs extrêmes de la coordonnée $x = \pm x_1$, en y faisant

$$\alpha = \pm \alpha_1, \quad \nu = \left(\frac{1 + 2 \sin\varphi . t + t^2}{1 - 2 \sin\varphi . T + T^2}\right)^2.$$

Pour cette valeur de ν on a

$$\sqrt{\frac{1}{\nu} - \cos^2\varphi} = \sqrt{\left(\frac{1 - 2\sin\varphi . T + T^2}{1 + 2 \sin\varphi . t + t^2}\right)^2 - \cos^2\varphi};$$

en portant la valeur T d'après l'équation (3), on trouve

$$\frac{1 - 2\sin\varphi . T + T^2}{1 + 2\sin\varphi . t + t^2} = \frac{1 + 4\sin\varphi . t + 6t^2 + 4\sin\varphi . t^3 + t^4}{(1 - t^2)^2};$$

on aura donc:

$$\sqrt{\frac{1}{\nu} - \cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{(1 + 4\sin\varphi . t + 6t^2 + 4\sin\varphi . t^3 + t^4)^2}{(1 - t^2)^4} - \cos^2\varphi}.$$

En éloignant les parenthèses et extrayant la racine carrée, on obtient

$$\sqrt{\frac{1}{\nu} - \cos^2\varphi} = \frac{(1 + 6t^2 + t^4)\sin\varphi + 4t(1 + t^2)}{(1 - t^2)^2}.$$

Par suite, d'après l'équation indiquée plus haut, la valeur extrême de x se représente sous la forme:

$$x_1 = -a\left[\frac{(1 + 6t^2 + t^4)\sin\varphi + 4t(1 + t^2)}{2(1 - t^2)^2 \cos\varphi} - \frac{c}{a}\right]\sin\alpha_1.$$

En y portant les valeurs de a et c tirées des équations (1) et (2), cette équation se réduit à la suivante:

$$x_1 = \frac{2 - T^2}{1 - T^2}\left[\frac{T - \sin\varphi}{T^2 - 1} + \frac{2(1 + 2\sin\varphi . t + t^2)t}{(1 - t^2)^2}\right]\sin\alpha_1,$$

l'angle α_1 étant déterminé par l'équation (12).

On trouve ainsi les valeurs extrêmes de la coordonnée $x = \pm x_1$, entre lesquelles le point M ne sort pas de l'espace limité par deux parallèles:

$$y = 0, \quad y = \frac{4(1 + 2\sin\varphi . t + t^2) . t^3}{(2\sin\varphi + 3t + 2\sin\varphi . t^2 + t^3)^2},$$

par conséquent, il décrit la courbe qui s'écarte peu d'une droite, si la quantité t est assez petite.

D'ailleurs la longueur du chemin parcouru par le point M sera déterminée par ses positions extrêmes; nous aurons donc, en désignant cette

longueur par l, d'après l'expression des valeurs extrêmes $x = \pm x_1$ trouvée plus haut:

$$(14) \qquad l = \frac{2(2-T^2)}{1-T^2}\left[\frac{T-\sin\varphi}{T^2-1} + \frac{2(1+2\sin\varphi.t+t^2)t}{(1-t^2)^2}\right]\sin\alpha_1.$$

§ 6. Dans le cas, où le point M doit avoir le mouvement qui s'écarte très peu du mouvement rectiligne, lorsque l'angle α varie dans les limites étroites, la quantité auxiliaire t et l'angle α_1 qui détermine la limite des variations de l'angle α seront petits; par suite, toutes les formules que nous avons obtenues peuvent être développées en séries commodes pour le calcul numérique.

Nous trouvons ainsi, d'après l'équation (3),

$$T = 2\sin\varphi + 3t + \ldots.;$$

en remplaçant T par cette expression dans les équations (1) et (2), nous obtenons les séries suivantes:

$$a = \frac{2\cos 2\varphi.\cos^2\varphi}{\cos 3\varphi} + \frac{6\sin 2\varphi.\cos^2\varphi}{\cos^2 3\varphi}t + \ldots.,$$

$$c = \frac{\operatorname{tg} 3\varphi.\cos 2\varphi.\cos^2\varphi}{\cos 3\varphi} + 3\frac{\cos^3\varphi\,(3\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)}{\cos^3 3\varphi}t + \ldots.$$

En développant l'expression E d'après la formule (11), nous avons

$$E = \pm\left(\frac{1}{2\sin^2\varphi} - \frac{3-2\sin^2\varphi}{2\sin^3\varphi}t + \ldots.\right)t^3.$$

On substitue à T dans les expressions

$$\frac{(1-T^2)^2}{T^2(2-T^2)},\quad \left(\frac{1+2\sin\varphi.t+t^2}{1-2\sin\varphi\,T+T^2}\right)^2 - 1$$

la série qu'on a trouvée plus haut, alors ces expressions se développent en séries:

$$\frac{(4\sin^2\varphi-1)^2}{8\sin^2\varphi.\cos 2\varphi}\left(1 + \frac{3t}{\sin\varphi.\cos 2\varphi.(4\sin^2\varphi-1)} + \ldots.\right),$$

$$-8\sin\varphi.t + 16\,(3\sin^2\varphi - 1)t^2 + \ldots.;$$

par suite, nous obtenons de l'équation (12) pour $1-\cos\alpha_1$ la série suivante:

$$-2\frac{(4\sin^2\varphi-1)^2}{\sin\varphi\cos 2\varphi}\left(t + \frac{48\sin^6\varphi - 52\sin^4\varphi + 18\sin^2\varphi + 1}{\sin\varphi.\cos 2\varphi\,(4\sin^2\varphi-1)}t^2 + \ldots.\right).$$

En exprimant $\sin\alpha_1$ au moyen de $1-\cos\alpha_1$, on trouve

$$\sin\alpha_1 = \sqrt{2(1-\cos\alpha_1) - (1-\cos\alpha_1)^2},$$

ce qui nous donne, en y portant le développement de $1 - \cos\alpha_1$:

$$\sin\alpha_1 = 2\sqrt{-\frac{(4\sin^2\varphi - 1)^2 t}{\sin\varphi.\cos 2\varphi}}\left[1 + \frac{56\sin^6\varphi - 50\sin^4\varphi + 15\sin^2\varphi}{\sin\varphi.\cos 2\varphi\,(4\sin^2\varphi - 1)}t + \ldots\right].$$

En portant cette série pour $\sin\alpha_1$ dans l'équation (14) et observant que les expressions:

$$\frac{2(2-T^2)}{1-T^2},\quad \frac{T-\sin\varphi}{T^2-1} + \frac{2(1+2\sin\varphi.t+t^2)t}{(1-t^2)^2}$$

se développent en séries:

$$\frac{4\cos\varphi.\cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} + \frac{12\cos\varphi.\sin 2\varphi}{\cos^2 3\varphi}t + \ldots,$$

$$\frac{\sin\varphi}{4\sin^2\varphi - 1} + \frac{32\sin^4\varphi - 16\sin^2\varphi - 1}{(4\sin^2\varphi - 1)^2}t + \ldots,$$

on obtient, la réduction faite, pour la longueur de la course du point M dans le cas considéré la série suivante:

$$l = \frac{8\cos\varphi\sqrt{-\sin\varphi.\cos 2\varphi.t}}{\cos 3\varphi}\left[1 - \frac{\cos^3\varphi\,(8\sin^4\varphi - 6\sin^2\varphi - 1)}{\sin\varphi.\cos 2\varphi.\cos 3\varphi}t + \ldots\right].$$

§ 7. Nous avons examiné le cas, où l'angle α reste dans les limites qui ne diffèrent que très peu de zéro; maintenant nous allons considérer le cas, où l'angle α prend toutes les valeurs possibles depuis $-\pi$ jusqu'à $+\pi$. Alors la droite AA_1 fera un tour complet par rapport à la droite CC_1 et le point M décrira la courbe fermée qui sera entièrement comprise entre deux parallèles, plus ou moins rapprochées entre elles selon la valeur plus ou moins petite de t.

En prenant $+\pi$ et $-\pi$ pour les valeurs extrêmes de l'angle α, nous posons dans nos formules

$$\alpha_1 = \pi.$$

Pour cette valeur de α_1 on obtient de l'équation (12)

$$-1 = 1 - \frac{2(1-T^2)^2}{T^2(2-T^2)}\left[\left(\frac{1+2\sin\varphi.t+t^2}{1-2\sin\varphi.T+T^2}\right)^2 - 1\right],$$

d'où il suit

$$\left(\frac{1+2\sin\varphi.t+t^2}{1-2\sin\varphi.T+T^2}\right)^2 = \frac{1}{(T^2-1)^2}.$$

On déduit de cette équation

$$\frac{1-2\sin\varphi.T+T^2}{1+2\sin\varphi\,t+t^2} = \pm(T^2-1).$$

En portant ici la valeur de T d'après l'équation (3), on obtient l'équation suivante:

$$t^4 + 4\sin\varphi . t^3 + 6t^2 + 4\sin\varphi . t + 1 =$$
$$\pm \left\{ [t^3 + 2\sin\varphi . t^2 + 3t + 2\sin\varphi]^2 - (1 - t^2)^2 \right\}.$$

En résolvant cette équation par rapport à sin φ, on trouve

$$\sin\varphi = \frac{-t(t^2+2) \pm \sqrt{2-t^2}}{2(1+t^2)},$$
$$\sin\varphi = \frac{-t(t^2+4) \pm t\sqrt{2t^2-1}}{2(1+t^2)}.$$

La dernière formule ne donnant de valeur réelle à sin φ pour des valeurs assez petites de t, moindres que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, nous nous bornerons à la première formule.

En observant, que dans la formule retenue le signe du radical se change, lorsqu'on remplace t par $-t$ et φ par $-\varphi$, nous ne la prenons qu'avec le signe supérieur.

On a ainsi

$$\sin\varphi = \frac{-t(t^2+2) + \sqrt{2-t^2}}{2(1+t^2)},$$

ensuite d'après l'équation (3) on obtient la valeur correspondante de T, qui se réduit à la forme suivante:

$$T = \frac{t + \sqrt{2-t^2}}{1-t^2}.$$

Or en portant ces valeurs de sin φ et de T dans les équations (1) et (2), on trouve:

$$a = \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{1+t\sqrt{2-t^2}} \cos\varphi;$$
$$c = -\frac{(2-t^2)t}{2(1+t^2)}.$$

La même substitution effectuée dans l'équation (11), où la quantité E détermine la limite de l'écart du point M de la droite, on trouve pour E l'expression qui se réduit à la suivante:

(15) $$E = \pm \frac{t^3}{1+t^2}.$$

Cet écart sera très petit dans le cas, où la valeur de t diffère très peu de zéro; dans ce cas toute la courbe, décrite par le point M, s'écartera très peu de la droite.

Pour trouver la longueur de cette droite, qui peut être remplacée avec la précision, déterminée d'après l'équation (15), par la courbe, décrite par le point M, nous observons que les extrémités de cette droite sont déterminées par le plus grand écart du point M à droite et à gauche de l'axe Oy; quant à la valeur de cet écart, on la trouve en cherchant la plus grande valeur qu'atteint la coordonnée x du point M, lorsque α reçoit toutes les valeurs possibles.

Puisque dans le cas considéré nous avons

$$T = \frac{t + \sqrt{2 - t^2}}{1 - t^2},$$

et par conséquent

$$\frac{T^2(2 - T^2)}{(T^2 - 1)^2} = -\frac{4t\sqrt{2 - t^2}}{(1 + t\sqrt{2 - t^2})^2},$$

l'équation (6), qui détermine la valeur de ν, se réduit à la suivante:

$$\nu = 1 - \frac{2t\sqrt{2 - t^2}}{(1 + t\sqrt{2 - t^2})^2}(1 - \cos\alpha).$$

En portant cette valeur de ν dans l'équation (13), nous obtenons l'expression de x qui se représente ainsi

$$x = -\frac{a}{2}\left[\sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\varphi + \frac{2t\sqrt{2 - t^2}}{(1 + t\sqrt{2 - t^2})^2}(1 - \cos\alpha)}{1 - \frac{2t\sqrt{2 - t^2}}{(1 + t\sqrt{2 - t^2})^2}(1 - \cos\alpha)}} - \frac{2c}{a}\right]\sin\alpha,$$

où les quantités a, c, φ ont les valeurs indiquées plus haut.

En déterminant d'après cette équation la plus grande valeur de la coordonnée x et la doublant, nous trouvons la longueur de la droite, de laquelle la courbe fermée, décrite par le point M, s'écarte très peu, si la valeur de t est très petite.

17.

SUR LES PARALLÉLOGRAMMES

COMPOSÉS

DE TROIS ÉLÉMENTS QUELCONQUES.

(TRADUIT PAR M. A. TIKHOMANDRITZKY.)

О параллелограммахъ,

состоящихъ изъ трехъ какихъ либо элементовъ.

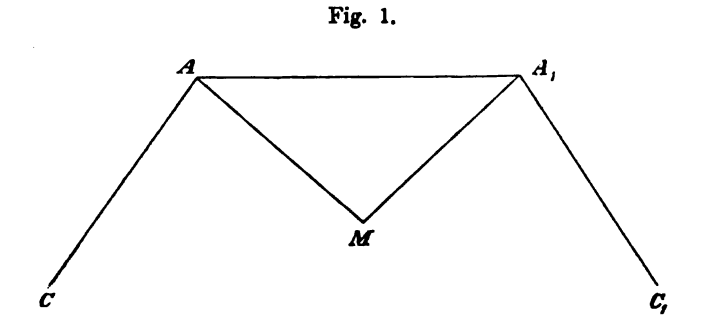
(Приложеніе къ XXXVI тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 8, 1880 г.)

(Lu le 18 (30) décembre 1879.)

Sur les parallélogrammes composés de trois éléments quelconques.

§ 1. Dans le Mémoire sur les parallélogrammes composés de trois éléments et symétriques par rapport à un axe, lu le 5-me décembre 1878, nous avons montré les conditions à remplir pour que de pareils parallélogrammes réalisent le mouvement rectiligne avec la plus grande précision possible. Ces parallélogrammes sont composés de deux droites (fig 1) AC, A_1C_1 qui

Fig. 1.



tournent autour des points immobiles C, C_1, et d'une ligne AA_1 qui joint leurs bouts mobiles; un point M, invariablement lié avec la ligne AA_1, réalise le mouvement désiré.

Dans le cas, où $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M$, ce mécanisme devient symétrique par rapport à un axe perpendiculaire à la droite, passant par les centres C, C_1. C'est ce cas particulier des parallélogrammes les plus simples qui a été l'objet du Mémoire cité. D'après les formules données dans ce Mémoire, on obtient les conditions, très simples, qui sont nécessaires et suffisantes pour que des pareils mécanismes réalisent le mouvement rectiligne avec la plus grande précision possible, lorsque leurs jeux sont infiniment petits. En con-

*) T. II, p. 285—297.

*

sidérant un parallélogramme dans sa position moyenne, lorsque les angles A_1AC, AA_1C_1 sont égaux, ces conditions peuvent être exprimées ainsi:

1) Les angles A_1AC, AA_1C_1 sont égaux à $\frac{A+2n\pi}{3}$, A étant la valeur commune des angles A_1AM, AA_1M, et n un nombre entier quelconque.

2) Le rapport de la longueur des droites tournantes AC, A_1C_1 aux côtés $AM = A_1M$ du triangle AA_1M est égal à

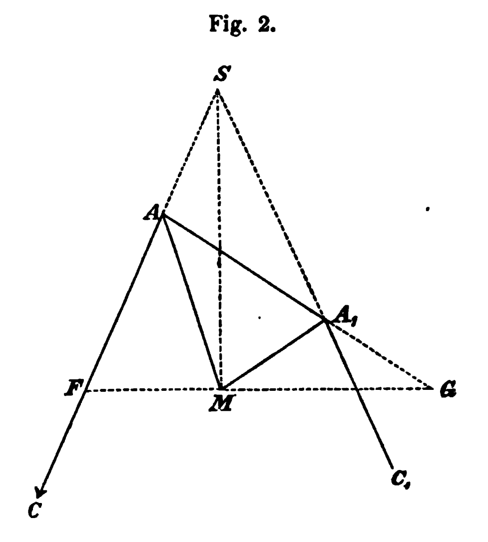
$$\frac{\cos^2 3\varphi}{\cos 2\varphi . \cos^2 \varphi},$$

φ étant la valeur des angles A_1AC, AA_1C_1.

Dans le cas, où ces conditions sont remplies, le point M décrit une courbe qui a le contact du 5-me ordre avec une droite parallèle à celle qui passe par les centres C, C_1, et c'est la limite supérieure d'approximation à la droite des arcs infiniment petits qui peut être obtenue dans le mouvement du mécanisme considéré.

Le cas des mouvements infiniment petits, pour lequel les formules générales, données par nous pour les parallélogrammes symétriques les plus simples, se réduisent aux égalités citées plus haut, est digne d'une attention particulière comme la limite, à laquelle s'approchent de plus en plus ces parallélogrammes, lorsque la longueur de la ligne, décrite par M pendant le jeu, devient de plus en plus petite, et du quel diffèrent peu les cas qui se présentent en pratique, où l'on ne cherche à rendre la plus proche d'une droite qu'une partie peu importante de la trajectoire du point M. Quant au passage du jeu infiniment petit du point M au jeu fini, on peut l'exécuter, comme nous l'avons montré dans le Mémoire intitulé: *Théorie des mecanismes connus sous le nom de parallélogrammes* *), au moyen *des fonctions qui s'écartent le moins de zéro.*

Fig. 2.



§ 2. Nous allons maintenant considérer ces mêmes parallélogrammes dans le cas général quand les droites tournantes AC, A_1C_1 et le triangle AA_1M sont quelconques (fig. 2). Dans ce cas général la limite supérieure d'approximation au mouvement rectiligne reste, comme il sera montré plus loin, le même, c'est à dire, les courbes

*) T. I, p. 111—143.

décrites par le point M ne peuvent avoir avec la droite de contact d'un ordre supérieur au cinquième. Les conditions pour qu'un tel contact ait lieu, dans ce cas général, se ramènent, comme nous le verrons, aux égalités semblables à celles que nous avons obtenues pour les parallélogrammes symétriques, à savoir:

1) Au moment, où le point M arrive sur la droite FG, ayant le contact du 5-me ordre avec la courbe qu'il décrit, les angles A_1AC, AA_1C_1 sont déterminés d'après les angles du triangle AA_1M par les égalités

$$A_1AC = \frac{A_1AM + 2n\pi}{3}, \quad AA_1C_1 = \frac{AA_1M + 2n_1\pi}{3},$$

où n, n_1 sont des entiers quelconques, égaux ou non;

2) les rapports des lignes AC, A_1C_1 aux côtés AM, A_1M du triangle AA_1M, sont déterminés par les égalités:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\left(2\varphi + \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{\cos^2(3\varphi + \gamma)}{\cos^2(\varphi + \gamma)}, \quad \frac{A_1C_1}{A_1M} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\left(2\varphi_1 - \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{\cos^2(3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2(\varphi_1 - \gamma)},$$

où

$$\varphi = A_1AC = \frac{A_1AM + 2n\pi}{3},$$

$$\varphi_1 = AA_1C_1 = \frac{AA_1M + 2n_1\pi}{3},$$

et γ est l'angle entre la ligne AA_1 et la tangente FG au moment, où les angles A_1AC, AA_1C_1 ont ces valeurs.

Quant à la direction de la droite FG tangente à la courbe décrite par le point M, cette droite FG, d'après la propriété connue des courbes décrites dans le plan par des points en mouvement liés invariablement entre eux, doit être perpendiculaire à la droite MS, menée du point M au point de rencontre des droites AC, A_1C_1; ce qui détermine complètement la diréction de cette ligne.

Pour embrasser tous les cas, où le triangle AA_1M, dont les sommets A et A_1 se meuvent sur des cercles, décrit par le sommet M une courbe, ayant avec la droite le contact d'ordre 5, il faut donner aux nombres n et n_1 les valeurs

$$0, \ 1, \ 2;$$

et on aura ainsi, d'après les formules écrites plus haut, neuf systèmes des valeurs pour les angles A_1AC, AA_1C_1. En déterminant pour chacun de ces 9 systèmes des angles A_1AC_1 AA_1C_1 la direction de la tangente FG, nous trouverons ces deux valeurs pour l'angle γ:

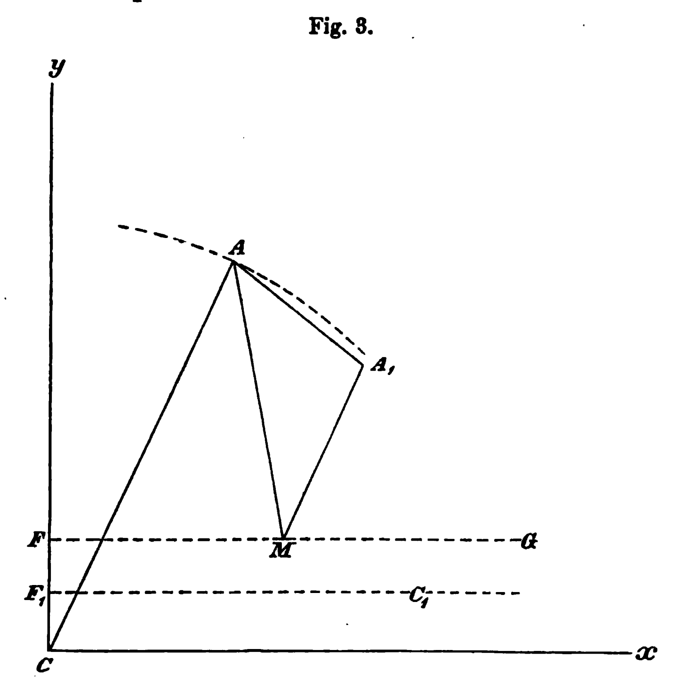
$$\gamma = AGM; \quad \gamma = AGM + \pi,$$

qui donnent pour chaque système des angles A_1AC, AA_1C_1 deux systèmes des

droites AC, A_1C_1. Nous aurons donc ainsi en général 18 solutions du problème qui nous occupe, lorsqu'on considère le triangle AA_1M comme donné.

§ 3. En déterminant l'équation de la courbe décrite par le point M, lorsque les points A et A_1 se meuvent sur des cercles, on remarquera que les conditions, sous lesquelles cette courbe aura avec la droite le contact d'ordre 5, sont représentées par un système de 4 équations de degrés plus ou moins grands. Vu la complication de ces équations, il serait difficile d'attendre qu'elles se réduisent aux égalités si simples, citées plus haut. On les obtient facilement, en remarquant que pendant les déplacements infiniment petits du triangle AA_1M le sommet M se mouvera sur la droite FG avec l'exactitude jusqu'aux infiniment petits du 6-me ordre. Et par cela, avec le même degré de précision, le mouvement consideré du triangle AA_1M pourra être déterminé d'après le mouvement des points M et A: du premier sur une droite, du second sur un cercle, et pendant ce mouvement, avec la même précision du 6-me ordre, la distance du point A_1 au point C_1 doit rester constante. En déterminant les conditions indispensables pour cela, on aura aussi un systéme de 4 équations. Mais ce système d'équations, au moyen des quantités auxilliaires, se ramène facilement à une équation du 4-me degré. La solution de cette equation nous donnera des relations, très simples, entre les quantités diverses de notre question; par là on aura les égalités mentionnées plus haut.

Fig. 3.



§ 4. En abordant (fig. 3) la détermination du mouvement du som-

met A_1 du triangle AA_1M dans le cas, où le sommet M se meut sur la droite FG et le sommet A sur le cercle, décrit du centre C avec le rayon AC, nous prendrons ce centre C pour l'origine des coordonnées, la droite parallèle à FG pour l'axe x, la droite perpendiculaire à FG pour l'axe y.

Nous désignerons par α, β les angles variables formés par AM, AC avec l'axe Ox, et nous poserons

$$AC = r;\ CF = b;\ AA_1 = a,\ AM = m,$$
$$MAA_1 = A;\ MA_1A = A_1,$$
$$C_1F_1 = x_1;\ CF_1 = y_1.$$

En projetant la ligne brisée CAA_1 sur les axes des coordonnées, on trouve pour la détermination des coordonnées du point A_1 pour les diverses valeurs de α et β les égalités

$$x = r\cos\beta + a\cos(A - \alpha);$$
$$y = r\sin\beta + a\sin(A - \alpha).$$

Afin de trouver la relation entre les angles α, β, projetons la ligne brisée CAM sur l'axe y et, en remarquant que cette projection est égale à $CF = b$, nous en déduirons l'égalité:

$$b = r\sin\beta - m\sin\alpha,$$

qui nous donne

(1) $$\sin\beta = \frac{m\sin\alpha + b}{r},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m\sin\alpha + b}{r}\right)^2}.$$

En portant ces valeurs de $\sin\beta$, $\cos\beta$ dans les expressions trouvées plus haut des coordonnées du point A_1, nous aurons

$$x = \sqrt{r^2 - (m\sin\alpha + b)^2} + a\cos(A - \alpha),$$
$$y = m\sin\alpha + a\sin(A - \alpha) + b.$$

En désignant par α_0 la valeur de l'angle variable α tout près de laquelle, selon ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent, les variations de la distance du point A_1 de C_1 restent infiniment petites d'ordre non inférieur au 6-me, et par r_1 la valeur de cette distance pour $\alpha = \alpha_0$, nous remarquons que l'expression de la distance de ces points

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

étant développée en une série procédant suivant les puissances ascendantes de la différence $\sin\alpha - \sin\alpha_0$, nous donne l'égalité:

(2) $$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = r_1 + K(\sin\alpha - \sin\alpha_0)^6 + \ldots.$$

En prenant le quarré de cette egalité et s'arrêtant au 6-me degré de $\sin\alpha - \sin\alpha_0$, nous aurons:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = r_1^2 + 2r_1\, K(\sin\alpha - \sin\alpha_0)^6 + \ldots.$$

En portant ici les valeurs données plus haut des coordonnées du point A_1, on trouve l'égalité:

$$\begin{aligned}&[\sqrt{r^2-(m\sin\alpha+b)^2}+a\cos(A-\alpha)-x_1]^2\\ &+[m\sin\alpha+a\sin(A-\alpha)+b-y_1]^2\\ &=r_1^2+2r_1\,K(\sin\alpha-\sin\alpha_0)^6+\ldots\ldots,\end{aligned}$$

d'où, en ouvrant les crochets et divisant tout par $2rx_1$, on obtient l'équation:

(3) $$\begin{aligned}&\left[1-\frac{a}{x_1}\sin A\sin\alpha-\frac{a\cos A}{x_1}\cos\alpha\right]\sqrt{1-\left(\frac{m\sin\alpha+b}{r}\right)^2}\\ &-\left[\frac{am\sin A}{rx_1}\sin\alpha+\frac{a(b-y_1)\sin A-ax_1\cos A}{rx_1}\right]\cos\alpha\\ &+\frac{am\cos A}{rx_1}\sin^2\alpha-\frac{a(y_1-b)\cos A-ax_1\sin A-my_1}{rx_1}\sin\alpha\\ &+\frac{r_1^2-r^2-x_1^2-y_1(y_1-2b)-a^2}{2rx_1}=-\frac{r_1}{rx_1}K(\sin\alpha-\sin\alpha_0)^6+\ldots.\end{aligned}$$

§ 5. Nous donnerons à cette equation la forme plus commode pour notre but, en posant

$$\sin\alpha=\frac{dz+1}{z+d},$$

où

(4) $$d=\sin\alpha_0.$$

Pour cette expression du $\sin\alpha$, on trouve

$$\sin\alpha-\sin\alpha_0=\frac{dz+1}{z+d}-d=\frac{1-d^2}{z+d}=\frac{1-d^2}{z}-\frac{d(1-d^2)}{z^2}+\ldots.$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{dz+1}{z+d}\right)^2}=\frac{\sqrt{1-d^2}}{z+d}\sqrt{z^2-1},$$

(5) $$\begin{aligned}\sqrt{1-\left(\frac{m\sin\alpha+b}{r}\right)^2}&=\frac{\sqrt{r^2(z+d)^2-[(md+b)z+(m+db)]^2}}{r(z+d)}\\ &=\frac{\sqrt{r^2-(md+b)^2}}{r(z+d)}\sqrt{\left(z+\frac{rd-m-db}{r-md-b}\right)\left(z+\frac{rd+m+db}{r+md+b}\right)}\\ &=\frac{\sqrt{r^2-(md+b)^2}}{r(z+d)}\sqrt{(z-g)^2-h^2},\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\left(s+\frac{rd-m-db}{r-md-b}\right)\left(s+\frac{rd+m+db}{r+md+b}\right)=(s-g-h)\,(s-g+h)=(s-g)^2-h^2.$$

En évaluant d'après ces formules les expressions des différents termes de l'équation (3), après y avoir remplacé $\sin\alpha$ par $\frac{ds+1}{s+d}$, et divisant tout par le coëfficient de

$$s\sqrt{(s-g)^2-h^2},$$

nous remarquons que cette équation prend la forme:

$$(6)\qquad \left(s+\lambda+\mu\sqrt{s^2-1}\right)\sqrt{(s-g)^2-h^2}-(P_0+P_1 s)\sqrt{s^2-1}$$
$$+P_2+P_3 s+P_4 s^2=\frac{L}{s^4}+\ldots.$$

En vertu de cette égalité, d'après laquelle l'expression

$$(P_0+P_1 s)\sqrt{s^2-1}-P_2-P_3 s-P_4 s^2$$

doit donner la valeur de la fonction

$$\left(s+\lambda+\mu\sqrt{s^2-1}\right)\sqrt{(s-g)^2-h^2}$$

avec l'éxactitude jusqu'au terme en $\frac{1}{s^4}$, il est aisé de trouver les valeurs des coëfficients P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 en fonctions de λ, μ, g et h, et une équation entre ces dernières quantités *). Afin de trouver les équations qui déterminent les coëfficients

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,$$

nous développons le premier membre de l'équation (6) suivant les puissances descendantes de s et égalons à zéro les termes en s^2, s^1, s^0, $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}$. Cela nous donne 5 équations linéaires par rapport aux quantités P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, qui les déterminent complètement. En les résolvant, on trouve:

$$P_0=gh^2+h^2\lambda+(h^2-1)g\mu;$$
$$P_1=4h^2g^2+h^4+4h^2g\lambda+(4h^2g^2+(h^2-1)^2)\mu;$$
$$P_2=-\frac{1}{2}(4g^2+h^2-1)h^2-(2h^2-1)g\lambda-\frac{1}{2}\left(4g^2+h^2-3\right)h^2\mu;$$
$$P_3=(h^2+1)g+(h^2-1)\lambda+h^2g\mu;$$
$$P_4=4h^2g^2+h^4-1+4gh^2\lambda+(4g^2+h^2-2)h^2\mu.$$

---

*) On reçoit tout cela immédiatement par le développement en fraction continue, comme nous l'avons montré dans le Mémoire sous le titre: «*Sur les expressions approchées linéaires par rapport au deux polynomes*». T. II, p. 245.

20*

En portant ces valeurs de

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$$

dans la formule

$$(z+\lambda+\mu\sqrt{z^2-1})\sqrt{(z-g)^2-h^2}-(P_0+P_1z)\sqrt{z^2-1}+P_2+P_3z+P_4z^2,$$

et en la développant suivant les puissances descendantes de z, on aura la série

$$-\frac{h^2}{8}\Big[(4g^2+3h^2-1)g+(4g^2+h^2-1)\lambda+(4g^2+3h^2-3)g\mu\Big]\frac{1}{z^3}$$
$$-\frac{h^2}{16}\left[\begin{matrix}8g^4+4(3h^2-1)g^2+h^4-h^2+(8g^2+6h^2-4)g\lambda\\+(8g^4+4(3h^2-2)g^2+(h^2-1)^2)\mu\end{matrix}\right]\frac{1}{z^4}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui nous donne, en la comparant avec l'équation (6), les égalités:

$$(7)\quad (4g^2+3h^2-1)g+(4g^2+h^2-1)\lambda+(4g^2+3h^2-3)g\mu=0;$$
$$-\frac{h^2}{16}\left[\begin{matrix}8g^4+4(3h^2-1)g^2+h^4-h^2+(8g^2+6h^2-4)g\lambda\\+(8g^4+4(3h^2-2)g^2+(h^2-1)^2)\mu\end{matrix}\right]=L.$$

La première ègalité présente l'équation, à laquelle doivent satisfaire les quantités λ, μ, g, h, d; la seconde nous servira, comme nous le verrons plus bas, à déterminer la grandeur de la déviation de la voie rectiligne du sommet M de triangle AA_1M, lorsque les sommets A, A_1 se meuvent sur des cercles.

§ 6. Pour passer des valeurs

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,$$

que nous avons trouvées tout à l'heure, à celles qui entrent dans notre question, nous remarquons que, d'après ce qu'on a montré plus haut, la formule (6) doit se réduire à la formule (3), lorsqu'on y porte la valeur de z tirée de l'équation

$$\sin\alpha=\frac{dz+1}{z+d}.$$

Comme on trouve par cette équation que

$$z=\frac{1-d\sin\alpha}{\sin\alpha-d},$$

$$\frac{1}{z}=\frac{\sin\alpha-d}{1-d\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha-d}{1-d^2}+\frac{d(\sin\alpha-d)^2}{(1-d^2)^2}+\ldots,$$

$$\sqrt{z^2-1}=\frac{\sqrt{(1-d\sin\alpha)^2-(\sin\alpha-d)^2}}{\sin\alpha-d}=\frac{\sqrt{1-d^2}}{\sin\alpha-d}\cos\alpha,$$

$$\sqrt{(z-g)^2-h^2}=\frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{h^2-(g+d)^2}{h(1-d^2)}\sin\alpha+\frac{g+(g^2-h^2+gd+1)d}{h(1-d^2)}\right)^2}}{\sin\alpha-d},$$

nous remarquons, en comparant la dernière égalité avec l'égalité (5), que

(8)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{m}{r} &= \frac{h^2-(g+d)^2}{h(1-d^2)}, \\ \frac{b}{r} &= \frac{g+(g^2-h^2+gd+1)d}{h(1-d^2)}, \end{aligned}\right.$$

$$\sqrt{(s-g)^2-h^2} = \frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{m\sin\alpha+b}{r}\right)^2}}{\sin\alpha-d}.$$

En vertu de ces égalités la formule (6), après y avoir porté

$$\frac{1-d\sin\alpha}{\sin\alpha-d}$$

au lieu de s, se réduit à celle-là:

$$\frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}} \frac{(\lambda-d)\sin\alpha+1-d\lambda+\sqrt{1-d^2}\,\mu\cos\alpha}{(\sin\alpha-d)^2}\sqrt{1-\left(\frac{m\sin\alpha+b}{r}\right)^2}$$
$$-\frac{P_1-P_0d+(P_0-P_1d)\sin\alpha}{(\sin\alpha-d)^2}\sqrt{1-d^2}\cos\alpha$$
$$+\frac{(P_2-P_3d+P_4d^2)\sin^2\alpha-(2P_2d-P_3(1+d^2)+2P_4d)\sin\alpha}{(\sin\alpha-d)^2}$$
$$+\frac{P_2d^2-P_3d+P_4}{(\sin\alpha-d)^2} = \frac{L(\sin\alpha-d)^4}{(1-d^2)^4}+\cdots.$$

En divisant cette équation par

$$\frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}} \frac{1-d\lambda}{(\sin\alpha-d)^2},$$

et la comparant après cela membre à membre avec la formule (3), on trouve les égalités:

(9)
$$-\frac{a}{x_1}\sin A = \frac{\lambda-d}{1-d\lambda};$$

$$-\frac{a}{x_1}\cos A = \frac{\mu\sqrt{1-d^2}}{1-d\lambda};$$

$$\frac{am\sin A}{rx_1} = \frac{P_0-P_1d}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h\sqrt{1-d^2}};$$

$$\frac{a(b-y_1)\sin A-ax_1\cos A}{rx_1} = \frac{P_1-P_0d}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h\sqrt{1-d^2}};$$

$$\frac{am\cos A}{rx_1} = \frac{P_2-P_3d+P_4d^2}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h\sqrt{1-d^2}};$$

$$\frac{a(y_1-b)\cos A-ax_1\sin A-my_1}{rx_1} = \frac{2P_2d-P_3(1+d^2)+2P_4d}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h(1-d^2)};$$

$$\frac{r_1^2-r^2-x_1^2-y_1(y_1-2b)-a^2}{2rx_1} = \frac{P_2d^2-P_3d+P_4}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h(1-d^2)}$$

(10)
$$\frac{r_1K}{rx_1} = -\frac{L\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{(1-d^2)^5(1-d\lambda)h}.$$

En divisant la première de ces équations par la 2-me, et la troisième par la 5-me et la 1-ère, on trouve les égalites:

$$(11)\qquad \operatorname{tang} A = \frac{\lambda - d}{\mu\sqrt{1-d^2}},$$

$$\operatorname{tang} \acute{A} = \frac{P_0 - P_1 d}{P_2 - P_3 d + P_4 d^2},$$

$$\frac{m}{r} = -\frac{P_0 - P_1 d}{\lambda - d}\cdot\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h\sqrt{1-d^2}}.$$

En éliminant tang A entre les deux premières égalités et en portant la valeur de $\frac{m}{r}$ d'après (8) dans la troisième, on obtient les deux équations:

$$(12)\qquad \frac{\lambda - d}{\mu\sqrt{1-d^2}} = \frac{P_0 - P_1 d}{P_2 - P_3 d + P_4 d^2},$$

$$(13)\qquad (\lambda - d)\sqrt{\frac{h^2-(g+d)^2}{1-d^2}} = P_1 d - P_0,$$

qui relient entre elles cinq quantités λ, μ, g, h, d. Ces deux équations, combinées avec l'équation (7), permettent de déterminer trois de ces quantités d'après les deux autres.

Comme les expressions de

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$$

sont des fonctions linéaires des quantités λ, μ, l'équation (13), ainsi que l'équation (7), seront du premier degré par rapport à ces quantités. En déterminant d'après ces équations les quantités λ, μ et en les portant dans l'équation (12), nous aurons une équation qui ne contiendra que trois quantités g, h, d.

§ 7. L'égalité (13), après y avoir porté les expressions de P_0, P_1, nous donne l'équation:

$$gh^2 - h^2(4g^2+h^2)d - d\sqrt{\frac{h^2-(g+d)^2}{1-d^2}} + \left[h^2 - 4gdh^2 + \sqrt{\frac{h^2-(g+d)^2}{1-d^2}}\right]\lambda$$
$$+ \left[(h^2-1)g - \left((h^2-1)^2 + 4g^2h^2\right)d\right]\mu = 0.$$

En résolvant par rapport à $\lambda - d$ et μ cette équation conjointement avec l'équation (7), on trouve

$$(14)\qquad \lambda - d = \frac{N}{D},\quad \mu = \frac{N_1}{D},$$

où

$$N = (8g^2 - 2(h^2-1)^2)gd + (4g^2+h^2-1)g^2$$
$$- [4(h^2+1)g^2 - (h^2-1)^2](h^2-1)d^2,$$

$$N_1 = \left[-h^4(4g^2 - h^2 + 1) + (4g^2 + h^2 - 1)\sqrt{\frac{h^2-(g+d)^2}{1-d^2}} \right] d$$
$$+ \left[2h^4 + (4g^2 + 3h^2 - 1)\sqrt{\frac{h^2-(g+d)^2}{1-d^2}} \right] g,$$
$$D = [4(h^2+1)g^2 - (h^2-1)^2](h^2-1)d$$
$$- \left[4g^2 + (2h^2+1)(h^2-1) + (4g^2 + 3h^2 - 3)\sqrt{\frac{h^2-(g+d)^2}{1-d^2}} \right] g.$$

En portant ces valeurs de $\lambda - d$ et μ dans l'équation (12) et en posant

$$(15) \qquad \frac{g+d}{h} = c, \quad g = ch - d,$$

on trouve qu'elle se réduit à la forme:

$$[(3c - 4c^3)\sqrt{1-d^2} + (1 - 4c^2)d\sqrt{1-c^2}]h^4$$
$$+ 8ch^3\sqrt{1-c^2} - 6(d\sqrt{1-c^2} - c\sqrt{1-d^2})h^2 - 8dh\sqrt{1-d^2}$$
$$-(1-4d^2)c\sqrt{1-d^2} - (3d - 4d^3)\sqrt{1-c^2} = 0.$$

On simplifie beaucoup cette équation en y portant les valeurs de $d = \sin\alpha_0$ et de c, qui, comme il est aisé de le voir, est égal à $\sin\beta_0$, où β_0 est la valeur de l'angle variable β qui correspond à $\alpha = \alpha_0$. En effet, par la formule (1), en y posant

$$\alpha = \alpha_0, \ \beta = \beta_0, \ \sin\alpha_0 = d,$$

on aura

$$\sin\beta_0 = \frac{md+b}{r},$$

ce qui donne, après y avoir porté les valeurs de $\frac{m}{r}, \frac{b}{r}$ déterminées par les formules (8):

$$\sin\beta_0 = \frac{g+d}{h} = c.$$

En évaluant d'après les égalités

$$d = \sin\alpha_0, \quad c = \sin\beta_0$$

les valeurs des coëfficients des puissances diverses de h dans l'équation considérée, on trouve

$$(3c - 4c^3)\sqrt{1-d^2} + (1-4c^2)\sqrt{1-c^2}\,d =$$
$$\sin 3\beta_0 \cos\alpha_0 + \cos 3\beta_0 \sin\alpha_0 = \sin(\alpha_0 + 3\beta_0),$$
$$8c\sqrt{1-c^2} = 4\sin 2\beta_0, \quad 8d\sqrt{1-d^2} = 4\sin 2\alpha_0,$$
$$6(d\sqrt{1-c^2} - c\sqrt{1-d^2}) = 6(\sin\alpha_0\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\sin\beta_0) = 6\sin(\alpha_0 - \beta_0),$$
$$(1-4d^2)c\sqrt{1-d^2} + (3d-4d^3)\sqrt{1-c^2} = \sin(3\alpha_0 + \beta_0),$$

en vertu de quoi l'équation se réduit à celle qui suit:

$$h^4 \sin(\alpha_0+3\beta_0)+4h^3 \sin 2\beta_0-6h^2 \sin(\alpha_0-\beta_0)-4h \sin 2\alpha_0-\sin(3\alpha_0+\beta_0)=0.$$

En résolvant cette équation par rapport à h, on trouve qu'elle se décompose en ces deux équations du second degré:

$$h^2 \sin(\alpha_0+3\beta_0)+2h[\sin 2\beta_0-\sin(\alpha_0+\beta_0)] = \sin(\alpha_0-\beta_0)+\sin 2(\alpha_0+\beta_0);$$

$$h^2 \sin(\alpha_0+3\beta_0)+2h[\sin 2\beta_0+\sin(\alpha_0+\beta_0)] = \sin(\alpha_0-\beta_0)-\sin 2(\alpha_0+\beta_0),$$

qui, après avoir été divisées par

$$2\cos\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}, \quad 2\sin\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}$$

se réduisent à celles-là:

$$h^2 \sin\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}+2h\sin\frac{\beta_0-\alpha_0}{2} = \sin\frac{3\alpha_0+\beta_0}{2},$$

$$h^2 \cos\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}+2h\cos\frac{\beta_0-\alpha_0}{2} = -\cos\frac{3\alpha_0+\beta_0}{2}.$$

Et en résolvant ces équations du second degré, on trouve ces quatre valeurs de h:

$$h=\frac{\sin\frac{3\alpha_0+\beta_0}{4}}{\sin\frac{\alpha_0+3\beta_0}{4}}; \quad h=-\frac{\sin\frac{3\alpha_0+\beta_0-\pi}{4}}{\sin\frac{\alpha_0+3\beta_0-3\pi}{4}};$$

$$h=\frac{\sin\frac{3\alpha_0+\beta_0-2\pi}{4}}{\sin\frac{\alpha_0+3\beta_0-6\pi}{4}}; \quad h=-\frac{\sin\frac{3\alpha_0+\beta_0-3\pi}{4}}{\sin\frac{\alpha_0+3\beta_0-9\pi}{4}}.$$

En comparant entre elles ces quatre valeurs de h, nous remarquons qu'elles se déduisent les unes des autres, en diminuant l'angle β_0 de π et en changeant les signes $+$ en $-$, et $-$ en $+$. Mais cela correspond, comme on le voit par la figure (fig. 3), où

$$ACx=\beta_0, \quad AC=r, \quad AM=m,$$

et où par (8)

$$\frac{m}{r}=h\frac{1-\left(\frac{g+d}{h}\right)^2}{1-d^2},$$

au changement de direction de la ligne AC de π conjointement avec le changement de la direction qu'on prend pour positive dans la détermination de la longueur de la ligne AC. En vertu de cela les formules qu'on reçoit en admettant pour à quatre valeurs mentionnées différeront entre elles

seulement en ce, qu'au lieu de β_0 elles contiendront ou $\beta_0 - \pi$, ou $\beta_0 - 2\pi$, ou $\beta_0 - 3\pi$. D'où l'on voit qu'on obtient tous les cas possibles, si dans les formules déduites en prenant

$$h = \frac{\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin\frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}} \tag{16}$$

on met $\beta_0 - k\pi$ au lieu de β_0, en désignant par k un nombre entier et en déterminant en même temps la valeur de h par l'équation:

$$h = (-1)^k \frac{\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin\frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}.$$

§ 8. En se bornant d'abord, d'après ce qui a été dit plus haut, au cas, où

$$h = \frac{\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin\frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}},$$

et en portant cette valeur de h dans les formules du paragraphe précédent qui déterminent $\lambda - d$ et μ et d'après lesquelles on a

$$\lambda - d = \frac{N}{D}, \quad \mu = \frac{N_1}{D},$$

et en posant pour abréger

$$\frac{\sin^3(\alpha_0 + \beta_0).\sin\frac{3}{2}(\alpha_0 - \beta_0).\sin\frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}.\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}.\sin^6\frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}.\cos\alpha_0} = F,$$

on trouve

$$N = \sin\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}.\sin\frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}\cos\alpha_0.F,$$

$$N_1 = \cos\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}.\sin\frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}F,$$

$$D = \left[\sin^2\frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).\sin\frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}.\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}\right]F.$$

D'où l'on obtient les valeurs suivantes pour $\lambda - d$ et μ:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda - d &= \frac{\sin\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}.\sin\frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}\cos\alpha_0}{\sin^2\frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0)\sin\frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}, \\ \mu &= \frac{\cos\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}\sin\frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}}{\sin^2\frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).\sin\frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}} \end{aligned}\right. \tag{17}$$

En portant ces valeurs de $\lambda - d$ et de μ dans la formule (11), où d'après notre notation $\sqrt{1-d^2} = \cos\alpha_0$, on trouve

$$\text{tang}\, A = \text{tang}\, \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).$$

Cette égalité est trouvée en prenant

$$h = \frac{\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin\frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}.$$

Pour passer au cas général, où

$$h = (-1)^k \frac{\sin\frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin\frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}, \tag{18}$$

nous changeons, d'après la remarque du paragraphe précédent, dans cette égalité β_0 en $\beta_0 - k\pi$, ce qui donne

$$\text{tang}\, A = \text{tang}\, \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0 - k\pi).$$

On voit par cette formule que la dìfférence des angles A et $\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0 - k\pi)$ doit être égale à un multiple de π, ce qui suppose l'égalité:

$$A = \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0 - k\pi) + (n-1)\pi,$$

n étant, ainsi que k, un nombre entier.

Mais on voit par la figure (fig. 3), où d'après notre notation

$$A_1AM = A,\ AMF = \alpha_0,\ ACx = \beta_0,$$

que l'on a

$$CAM = \pi - AMF - ACx = \pi - \alpha_0 - \beta_0,$$

$$CAA_1 = CAM + A_1AM = \pi - \alpha_0 - \beta_0 + A.$$

En déterminant par la dernière égalité la valeur de la somme $\alpha_0 + \beta_0$ et en la portant dans l'expression de l'angle A trouvée plus haut, nous obtenons entre les angles CAA_1 et A la rèlation:

$$A = 3CAA_1 - (2n - 3k + 1)\pi. \tag{19}$$

Cette égalité nous montre que l'angle A du triangle AA_1M et le triple d'angle CAA_1, qui détermine l'inclinaison de la droite tournante AC

à la droite AA_1, lorsque $\alpha = \alpha_0$, ne peuvent différer entre eux que par un multiple de π. Pour faire nos formules plus uniformes, nous nous bornerons à l'hypothèse que la différence des angles $3CAA_1 - A$ contient le nombre π un nombre pair de fois.

On peut se borner à cette supposition, en augmentant de 180° l'angle CAA_1 ou, ce qui est la même chose, en changeant la direction de la ligne AC en direction opposée. Dans cette supposition le nombre k doit être impair, comme on le voit par l'égalité ci-dessus.

En posant

$$k = 2p + 1, \; CAA_1 = \varphi,$$

nous avons

$$A = 3\varphi - 2\,(n - 3p - 1)\,\pi,$$

et la valeur de h sera déterminée d'après (18) par l'ègalité

$$h = -\frac{\sin\dfrac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p+1)\,\pi}{4}}{\sin\dfrac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p+1)\pi}{4}},$$

qu'on pourra représenter ainsi

$$h = \frac{\cos\dfrac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p-1)\,\pi}{4}}{\cos\dfrac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p-1)\pi}{4}}.$$

En observant que d'après (8) on a

$$\frac{m}{r} = h\,\frac{1 - \left(\dfrac{g+d}{h}\right)^2}{1 - d^2},$$

où, comme on l'a vu,

$$\frac{g+d}{h} = \sin\beta_0, \; d = \sin\alpha_0,$$

on trouve que r et m seront liés par l'équation

$$\frac{m}{r} = \frac{\cos\dfrac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p-1)\,\pi}{4}}{\cos\dfrac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p-1)\pi}{4}} \cdot \frac{\cos^2\beta_0}{\cos^2\alpha_0}.$$

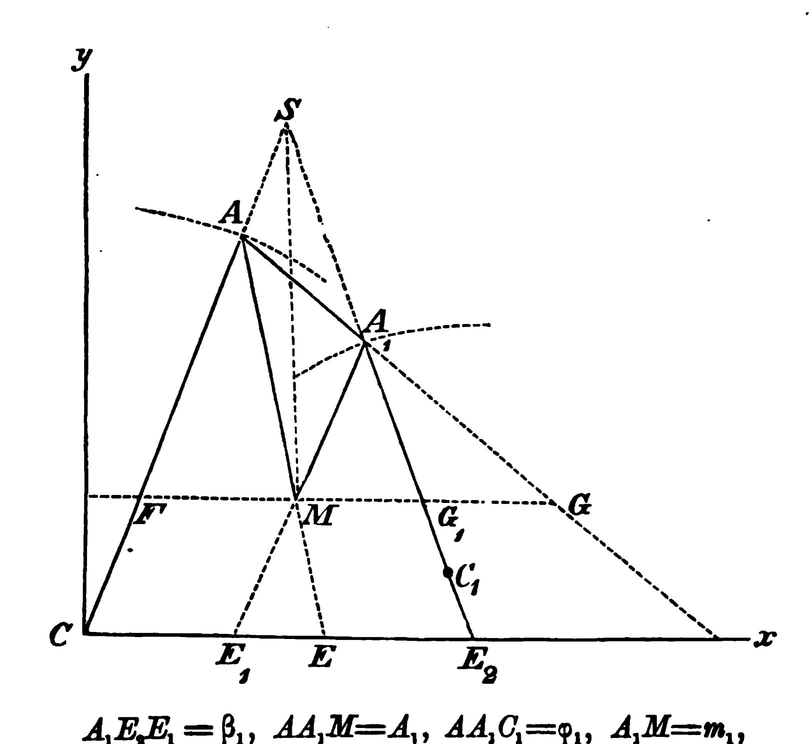
Les formules que nous avons déduites pour les angles $A = A_1AM$, $\varphi = A_1AC$ et les lignes $r = AC$, $m = AM$ ont été obtenues, en supposant que pendant le mouvement infiniment petit du triangle AA_1M le sommet M glisse sur la droite FG et le sommet A sur le cercle C, la distance du sommet A_1 au point C_1 reste égale à $r_1 = A_1C_1$ aux grandeurs du 6-me ordre près.

D'après la remarque faite au § 3, cela doit avoir lieu en général,

lorsque pendant le mouvement des sommets A, A_1 sur les cercles, décrits des centres C, C_1, le sommet M se meut, aux grandeurs de 6-me ordre près, sur la droite FG, ou, ce qui est la même chose, décrit un arc, ayant le contact d'ordre 5 avec cette droite. Dans ce cas le sommet A_1 se trouve dans les mêmes conditions que A; par conséquent les angles et les lignes adjacents à ce sommet doivent aussi satisfaire aux équations que nous avons déduites pour les angles et les lignes adjacents au sommet A.

Par cette raison en posant (fig. 4)

Fig. 4.



$$A_1E_2E_1 = \beta_1, \quad AA_1M = A_1, \quad AA_1C_1 = \varphi_1, \quad A_1M = m_1,$$

et en changeant dans les formules trouvées plus haut

$$\alpha_0, \beta_0, A, \varphi, r, m, n, p$$

en

$$\alpha_1, \beta_1, A_1, \varphi_1, r_1, m_1, n_1, p_1,$$

nous aurons ces égalités:

$$A_1 = 3\varphi_1 - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi;$$

$$\frac{m_1}{r_1} = \frac{\cos\frac{3\alpha_1 + \beta_1 - (2p_1 - 1)\pi}{4}}{\cos\frac{\alpha_1 + 3\beta_1 - 3(2p_1 - 1)\pi}{4}} \cdot \frac{\cos^2\beta_1}{\cos^2\alpha_1},$$

§ 9. Les égalités que nous avons déduites relativement aux angles du triangle AA_1M les déterminent complètement d'après les angles $\varphi = A_1AC$, $\varphi_1 = AA_1C_1$, malgré les entiers inconnus n, p, n_1, p_1 qui y figurent, parceque ces nombres y entrent multipliés par 2π. Par suite, lorsque les angles φ, φ_1 et le côté $AA_1 = a$ du triangle AA_1M sont donnés, nous le déterminerons complètement. En connaissant ce triangle et sa position par rapport aux droites AC, A_1C_1, déterminée par les angles donnés $\varphi = A_1AC$, $\varphi_1 = AA_1C_1$, il sera aisé de trouver la direction de la ligne FG.

Dans le mouvement considéré du triangle AA_1M les droites CA, C_1A_1 étant normales aux arcs décrits par les sommets A, A_1, la droite MS, menée par le point M et le point d'intersection des droites AC, A_1C_1, doit être perpendiculaire à la droite FG sur laquelle se meut le sommet M. Après avoir déterminé ainsi la direction de la droite FG et en remarquant que dans notre système des coordonnées l'axe des x est parallèle à cette ligne, il est aisé d'obtenir les angles

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \alpha_1,\ \beta_1$$

que font les droites AM, AC, A_1M, A_1C_1 avec l'axe des x dans la position du triangle, où son sommet M se trouve sur la ligne FG. En désignant par γ l'angle que fait alors la droite AA_1 avec FG, nous déduirons des triangles AGF, AGM, A_1GM, A_1GG_1 les égalités:

$$\begin{aligned} AMF &= MAG + AGM = A + \gamma, \\ AFM &= \pi - FAG - AGM = \pi - \varphi - \gamma, \\ A_1MG &= AA_1M - AGM = A_1 - \gamma, \\ A_1G_1M &= \pi - C_1A_1A + AGM = \pi - \varphi_1 + \gamma. \end{aligned}$$

D'où, d'après l'égalité des angles

$$\begin{aligned} &AMF = AEC = \alpha_0,\ AFM = ACE = \beta_0 \\ &A_1MG = A_1E_1x = \alpha_1,\ A_1E_2C = A_1G_1M = \beta_1, \end{aligned}$$

il suit

$$\alpha_0 = A + \gamma,\ \beta_0 = \pi - \varphi - \gamma;\ \alpha_1 = A_1 - \gamma;\ \beta_1 = \pi - \varphi_1 + \gamma,$$

ce qui nous donne, après y avoir porté les valeurs trouvées plus haut des angles A, A_1:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = 3\varphi + \gamma - 2(n - 3p - 1)\pi;\ \beta_0 = \pi - \varphi - \gamma; \\ &\alpha_1 = 3\varphi_1 - \gamma - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi;\ \beta_1 = \pi - \varphi_1 + \gamma. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs de α_0, β_0, α_1, β_1 dans les formules (§ 8) qui déterminent les rapports $\frac{m}{r}$, $\frac{m}{r}$, on trouve

$$\frac{r}{m}=\frac{\cos\frac{\gamma+n\pi}{2}}{\cos\left(2\varphi+\frac{\gamma-(3n-8p)\pi}{4}\right)}\frac{\cos^2(3\varphi+\gamma)}{\cos^2(\varphi+\gamma)},$$

$$\frac{r_1}{m_1}=\frac{\cos\frac{\gamma-n_1\pi}{2}}{\cos\left(2\varphi_1-\frac{\gamma+(3n_1-8p_1)\pi}{2}\right)}\frac{\cos^2(3\varphi_1-\gamma)}{\cos^2(\varphi_1-\gamma)}.$$

et comme on a

$$\cos\frac{\gamma-n_1\pi}{2}=\cos\frac{\gamma+n_1\pi}{2}\cdot\cos n_1\pi,$$

$$\cos\left(2\varphi+\frac{\gamma-(3n-8p)\pi}{2}\right)=\cos\left(2\varphi+\frac{\gamma+n\pi}{2}\right),$$

$$\cos\left(2\varphi_1-\frac{\gamma+(3n_1-8p_1)\pi}{2}\right)=\cos\left(2\varphi_1-\frac{\gamma+n_1\pi}{2}\right)\cos n_1\pi,$$

ces formules se réduisent aux suivantes:

$$(20)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{r}{m}&=\frac{\cos\frac{\gamma+n\pi}{2}}{\cos\left(2\varphi+\frac{\gamma+n\pi}{2}\right)}\cdot\frac{\cos^2(3\varphi+\gamma)}{\cos^2(\varphi+\gamma)},\\ \frac{r_1}{m_1}&=\frac{\cos\frac{\gamma+n_1\pi}{2}}{\cos\left(2\varphi_1-\frac{\gamma+n_1\pi}{2}\right)}\cdot\frac{\cos^2(3\varphi_1-\gamma)}{\cos^2(\varphi_1-\gamma)}.\end{aligned}\right.$$

§ 10. Afin de déterminer l'angle γ qui entre dans ces formules, nous remarquons que d'après la propriété connue des lignes droites menées d'un point aux sommets d'un triangle, ce qui a lieu par rapport aux droites SA, SM, SA_1 (fig. 4), on doit avoir l'égalité

$$\frac{\sin AMS}{\sin A_1MS}=\frac{\sin MAS}{\sin A_1AS}\cdot\frac{\sin AA_1S}{\sin MA_1S},$$

où, comme on le voit par la figure,

$$AMS=FMS-FMA=\frac{\pi}{2}-\alpha_0;$$

$$A_1MS=GMS-A_1MG=\frac{\pi}{2}-\alpha_1;$$

$$MAS=\pi-CAA_1+A_1AM=\pi-\varphi+A;$$

$$A_1AS=\pi-CAA_1=\pi-\varphi;$$

$$AA_1S = \pi - C_1A_1A = \pi - \varphi_1,$$
$$MA_1S = \pi - C_1A_1A + AA_1M = \pi - \varphi_1 + A_1;$$

en vertu de quoi cette égalité nous donne

$$\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1} = \frac{\sin(A-\varphi)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin\varphi_1}{\sin(A_1-\varphi_1)}.$$

En portant ici les valeurs trouvées des angles A, A_1, nous aurons

$$\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin\varphi_1}{\sin 2\varphi_1},$$

ce qu'on réduit, en remplaçant $\sin 2\varphi$, $\sin 2\varphi_1$, par $2\sin\varphi\cos\varphi$, $2\sin\varphi_1\cos\varphi_1$, à cette formule très simple:

$$\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1}. \tag{21}$$

En remarquant que, d'après ce qui a été dit plus haut (§ 9), on a

$$\alpha_0 = 3\varphi + \gamma - 2(n - 3p - 1)\pi,$$
$$\alpha_1 = 3\varphi_1 - \gamma - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi,$$

nous en déduirons l'équation

$$\frac{\cos(3\varphi+\gamma)}{\cos(3\varphi_1-\gamma)} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1},$$

qui détermine l'angle γ d'après les angles φ et φ_1. On donnera à cette équation une forme plus commode pour l'évaluation de l'angle γ, en la présentant ainsi:

$$\frac{\cos(3\varphi+\gamma) - \cos(3\varphi_1-\gamma)}{\cos(3\varphi+\gamma) + \cos(3\varphi_1-\gamma)} = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi_1}{\cos\varphi + \cos\varphi_1},$$

ce qu'on ramène à l'égalité:

$$\frac{\operatorname{tang}\left[\frac{3}{2}(\varphi-\varphi_1)+\gamma\right]}{\operatorname{cotang}\frac{3}{2}(\varphi+\varphi_1)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\operatorname{cotang}\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}. \tag{22}$$

§ 11. En déterminant l'angle γ par l'équation (22), on trouve pour lui entre les limites 0 et 2π deux valeurs, dont la différence est égale à π. Il n'est pas difficile de montrer qu'en donnant dans nos formules à l'angle γ ces deux valeurs et en prenant n, n_1 égaux à zéro, on aura toutes les so-

lutions de notre problème. Pour cela nous montrerons en premier lieu que ces deux nombres ne peuvent différer entre eux par un nombre impair.

On peut l'apercevoir d'après l'expression de la grandeur

$$\frac{x_1}{a},$$

qu'on tire de ces formules. Comme, dans notre système des coordonnées, l'origine se trouve au point C et l'axe des x est parallèle à la droite FG, la grandeur x_1, qui représente l'abscisse du point C_1, sera égale à la projection de la distance entre les points C, C_1 sur la droite FG. Cette projection, ainsi que la ligne $a = AA_1$, ont dans notre question le même rapport au sommet A du triangle AA_1M qu'au sommet A_1; donc la formule qui détermine $\frac{x_1}{a}$ ne doit pas changer de valeur lorsqu'on y change

$$\varphi,\ \alpha_0,\ n,\ \gamma$$

en

$$\varphi_1,\ \alpha_1,\ n_1,\ -\gamma,$$

qui ont la même signification par rapport aux sommets A, A_1 du triangle AA_1M; et cela suppose, comme nous le verrons, que $n - n_1$ est un nombre pair.

En effet, par la formule (9) on trouve

$$\frac{x_1}{a \sin A} = -\frac{1 - d\lambda}{\lambda - d} = d - \frac{1 - d^2}{\lambda - d}.$$

Comme d'après notre notation

$$d = \sin \alpha_0,\ 1 - d^2 = \cos^2 \alpha_0,$$

et d'après (17), en supposant

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}},$$

on a

$$\lambda - d = \frac{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cos \alpha_0}{\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}},$$

la valeur de

$$\frac{x_1}{a \sin A}$$

sera représentée par la formule

$$\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0 . \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0)}{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0)} - \frac{\cos \alpha_0 . \sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}},$$

où les deux premiers termes pris ensemble donnent

$$\frac{\cos\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}}{\sin\frac{3}{2}(\alpha_0+\beta_0)},$$

et le dernier, en y remplaçant les expressions

$$\sin^2\frac{\alpha_0+3\beta_0}{4},\ \sin\frac{\alpha_0-\beta_0}{4}\sin\frac{\beta_0+3\alpha_0}{4}$$

par leurs équivalents

$$\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}-\cos\alpha_0\right),$$

se ramène à

$$\frac{\left(1-\cos\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}\right)\cos\alpha_0}{\sin\frac{3}{2}(\alpha_0+\beta_0)\left[\cos\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}-\cos\alpha_0\right]}.$$

En vertu de cela cette formule nous donne:

$$\frac{x_1\sin\frac{3}{2}(\alpha_0+\beta_0)}{a\sin A}=\cos\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}-\frac{\left(1-\cos\frac{\alpha_0+3\beta_0}{2}\right)\cos\alpha_0}{\cos\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}-\cos\alpha_0}.$$

Nous avons déduit cela, en supposant

$$h=\frac{\sin\frac{3\alpha_0+\beta_0}{4}}{\sin\frac{\alpha_0+3\beta_0}{4}}.$$

Pour passer au cas général, où

$$h=(-1)^k\frac{\sin\frac{3\alpha_0+\beta_0-k\pi}{4}}{\sin\frac{\alpha_0+3\beta_0-3k\pi}{4}},$$

on doit, d'après ce qui a été dit au § 7, mettre ici $\beta_0-k\pi$ au lieu de β_0.

On obtient ainsi la formule

$$\frac{x_1\sin\frac{3}{2}(\alpha_0+\beta_0-k\pi)}{a\sin A}=\cos\frac{\alpha_0+3\beta_0-3k\pi}{2}-\frac{\left(1-\cos\frac{\alpha_0+3\beta_0-3k\pi}{2}\right)\cos\alpha_0}{\cos\frac{\alpha_0+\beta_0-k\pi}{2}-\cos\alpha_0}.$$

Après avoir trouvé d'après les expressions de k, A, α_0, β_0, données dans les §§ 8, 9, les égalités

$$\sin\frac{3}{2}(\alpha_0+\beta_0-k\pi)=\sin(3\varphi-3n\pi+3\pi)=-(-1)^n\sin 3\varphi,$$

$$\cos\frac{(\alpha_0+3\beta_0-3k\pi)}{2}=\cos(\gamma+n\pi-\pi)=-(-1)^n\cos\gamma,$$

$$\sin A=\sin(3\varphi-2(n-3p-1)\pi)=\sin 3\varphi,$$

$$\cos\frac{\alpha_0+\beta_0-k\pi}{2}=\cos(\varphi-n\pi+\pi)=-(-1)^n\cos\varphi,$$

nous déduirons de la formule précédente

$$\frac{x_1}{a}=\cos\gamma-\frac{(-1)^n+\cos\gamma}{1+(-1)^n\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha_0}}.$$

En changeant ici α_0, φ, γ, n en α_1, φ_1, $-\gamma$, n_1, nous trouverons, d'après ce qui a été dit plus haut, pour la même grandeur $\frac{x_1}{a}$ encore une autre formule:

$$\frac{x_1}{a}=\cos\gamma-\frac{(-1)^{n_1}+\cos\gamma}{1+(-1)^{n_1}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\alpha_1}}.$$

En comparant entre elles ces deux expressions de $\frac{x_1}{a}$, où d'après (21)

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha_0}=\frac{\cos\varphi_1}{\cos\alpha_1},$$

nous remarquons, qu'elles deviennent identiques seulement lorsque

$$(-1)^n=(-1)^{n_1},$$

ce qui suppose que la différence $n-n_1$ est un nombre pair.

Après s'être persuadé que dans nos formules les nombres n et n_1 ne peuvent se différer que par un nombre pair, et en observant que d'après la composition des formules

$$\frac{r}{m}=\frac{\cos\frac{\gamma+n\pi}{2}}{\cos\left(2\varphi+\frac{\gamma+n\pi}{2}\right)}\cdot\frac{\cos^2(3\varphi+\gamma)}{\cos^2(\varphi+\gamma)},$$

$$\frac{r_1}{m_1}=\frac{\cos\frac{\gamma+n_1\pi}{2}}{\cos\left(2\varphi_1-\frac{\gamma+n_1\pi}{2}\right)}\cdot\frac{\cos^2(3\varphi_1-\gamma)}{\cos^2(\varphi_1-\gamma)},$$

les nombres n et n_1 peuvent y être faits >-1 et <2, nous concluons que par rapport à ces nombres ne sont possibles que deux hypothèses: ou

ils sont tous les deux égaux à 0, ou tous les deux égaux à 1. Mais ces deux cas seront compris dans un seul système des formules:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{r}{m} = \dfrac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\left(2\varphi + \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \dfrac{\cos^2(3\varphi + \gamma)}{\cos^2(\varphi + \gamma)}, \\[2ex] \dfrac{r_1}{m_1} = \dfrac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\left(2\varphi_1 - \frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \dfrac{\cos^2(3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2(\varphi_1 - \gamma)}, \end{cases}$$

où l'angle γ peut avoir deux valeurs différents entre elles de π, qu'on tire de l'équation (22).

Ainsi d'après les angles φ, φ_1 et l'angle γ, déterminé par l'équation (22), on trouve la grandeur des rapports

$$\frac{r}{m}, \quad \frac{r_1}{m_1};$$

d'où, d'après les longueurs $m = AM$, $m_1 = A_1M$ des côtés du triangle AA_1M, on trouve les longueurs des lignes $r = AC$, $r_1 = A_1C_1$.

Dans le cas, où le triangle AA_1M sera donné, nous trouverons les angles φ, φ_1, qui entrent dans nos formules, en remarquant que, d'après ce qui a été dit au § 8 par rapport à la détermination des angles A et A_1 du triangle AA_1M, on trouvera les mêmes angles A, A_1, en prenant pour φ, φ_1 ces valeurs diverses:

$$\varphi = \frac{A}{3}, \quad \varphi = \frac{A + 2\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{A + 4\pi}{3},$$

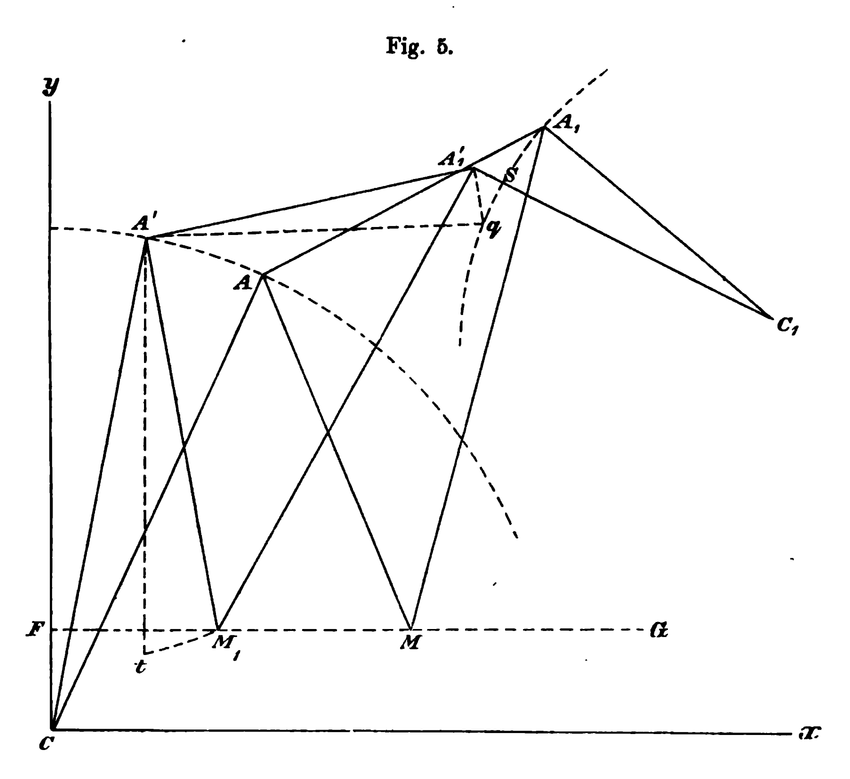
$$\varphi_1 = \frac{A_1}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{A_1 + 2\pi}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{A_1 + 4\pi}{3}.$$

En combinant entre elles ces valeurs des angles φ, φ_1, nous trouverons 9 systèmes divers des grandeurs φ, φ_1. En déterminant, pour chacun de ces systèmes des angles φ, φ_1, l'angle γ par l'équation (22), on trouvera pour lui deux valeurs; en vertu de quoi le nombre de solutions de notre problème dans le cas, où l'on suppose le triangle AA_1M donné, sera en général égal à 18.

§ 12. Nous allons maintenant nous occuper de la détermination de la grandeur des écarts du sommet M du triangle AA_1M de la ligne droite, quand les sommets A, A_1 se meuvent sur des cercles déterminés plus haut, en ne considérant que les positions du triangle qui sont infiniment proches de celle où le sommet M se trouve sur la tangente, ayant le contact d'ordre 5 avec sa trajectoire, et dans tous les développements nous nous bornerons aux premiers termes.

Nous commencerons de nouveau par la supposition, que le sommet M se meut justement sur la droite FG, et le sommet A_1 décrit une courbe très proche de l'arc de cercle C_1 (fig. 5).

Fig. 5.



Soit $A'A'_1M_1$ une position quelconque du triangle AA_1M dans ce mouvement, infiniment approchée de celle, où le sommet A_1 se trouve sur le cercle C_1, et où, par notre notation,

$$CAA_1 = \varphi;\ \ C_1A_1A = \varphi_1;$$

$$\alpha = AMF = \alpha_0;\ \ \beta = ACx = \beta_0.$$

Alors le point A'_1 ne se trouvera plus sur le cercle C_1, et sa distance du centre C_1 différera du rayon $r_1 = A_1C_1$ du cercle par la grandeur A'_1S, pour la détermination de laquelle on reçoit d'après (2) une telle formule:

$$A'_1S = K(\sin\alpha - \sin\alpha_0)^6 + \dots.$$

Pour passer au cas, où le sommet A_1 se meut justement sur le cercle C_1, et le sommet M sur la droite FG approximativement, nous supposerons, que le triangle $A'A'_1M_1$ tourne autour du point A' jusqu'au moment, où son sommet A'_1 arrive sur la circonférence C_1. En supposant que le sommet A'_1 arrive au point q de la circonférence C_1, et le sommet M_1, qui se trouvait sur

la droite FG, arrive au point t, nous observons, que les lignes infiniment petites A'_1S, A'_1q, M_1t seront liées entre elles par les égalités:

$$A'_1S = A'_1q \cdot \cos qA'_1S; \quad \frac{M_1t}{A'_1q} = \frac{A'M_1}{A'A'_1}.$$

Or comme on a

$$A'M_1 = AM = m, \quad A'A'_1 = AA_1 = a,$$
$$qA'_1S = A'A'_1C_1 - A'A'_1q = A'A'_1C_1 - \frac{\pi}{2},$$

et que l'angle $A'A'_1C_1$ diffère infiniment peu de l'angle $AA_1C_1 = \varphi_1$, ces égalités nous donnent

$$A'_1S = A'_1q \cdot \sin\varphi_1, \quad \frac{M_1t}{A'_1q} = \frac{m}{a};$$

d'où, en éliminant A'_1q, on tire:

$$M_1t = \frac{m}{a}\frac{A'_1S}{\sin\varphi_1},$$

ce qui, après y avoir porté la valeur de A'_1S donnée plus haut, se ramène à ce qui suit

$$M_1t = K\frac{m}{a}\frac{(\sin\alpha - \sin\alpha_0)^6}{\sin\varphi_1} + \dots.$$

D'un autre côté, en déterminant la distance du point t de la droite FG, on trouve qu'elle est égale à

$$M_1t . \sin FM_1t,$$

et comme l'angle FM_1t est égal à $\frac{\pi}{2} - FM_1A'$, et l'angle F_1M_1A' diffère infiniment peu de l'angle $FMA = \alpha_0$, cette expression se réduit à celle-là:

$$M_1t . \cos\alpha_0,$$

ce qui, après y avoir porté la valeur M_1t trouvée plus haut, nous donne pour la détermination de la distance du point t de la droite FG la formule suivante:

$$K\frac{m}{a}\frac{\cos\alpha_0}{\sin\varphi_1}(\sin\alpha - \sin\alpha_0)^6 + \dots.$$

D'où l'on voit que dans le mouvement considéré du triangle AA_1M, l'ordonnée y du point M, lorsque α diffère infiniment peu de α_0, aura la valeur:

$$y = CF - K\frac{m}{a}\frac{\cos\alpha_0}{\sin\varphi_1}(\sin\alpha - \sin\alpha_0)^6 + \dots.$$

En remplaçant ici la différence

$$\sin\alpha - \sin\alpha_0$$

par

$$(\alpha - \alpha_0) \cos \alpha_0 + \ldots,$$

on trouve

$$y = CF - K \frac{m}{a} \frac{\cos^7 \alpha_0}{\sin \varphi_1} (\alpha - \alpha_0)^6 + \ldots.$$

Cette formule nous montre, comment l'ordonnée y du point M varie avec la variation de l'angle α. Pour trouver la relation entre les variations de x, y du point M, nous allons maintenant déduire la formule qui donne la valeur de x du point M pour les valeurs de α très proches de α_0.

Pour cela nous remarquons que la grandeur x est égale à la projection de la ligne brisée CAM sur l'axe de x; par conséquent

$$x = AC.\cos ACx + AM.\cos AMF.$$

En portant ici les valeurs

$$AC = r;\ ACx = \beta;\ AM = m;\ AMF = \alpha,$$

on trouve

$$x = r \cos \beta + m \cos \alpha.$$

En différentiant cette valeur de x par rapport à α, et en remarquant que d'après (1)

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{m}{r} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta},$$

on trouve

$$\frac{dx}{d\alpha} = -r \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha} - m \sin \alpha = -m \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta}.$$

En vertu de cela nous concluons qu'au voisinage du point

$$x = MF,\ y = FC,$$

où $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, l'abscisse x aura la valeur:

$$x = FM - m \frac{\sin (\alpha_0 + \beta_0)}{\cos \beta_0} (\alpha - \alpha_0) + \ldots.$$

En déterminant de cette équation la valeur de la différence $\alpha - \alpha_0$ et en la portant dans l'expression de l'ordonnée y trouvée plus haut, on aura la relation suivante entre x et y:

$$y = CF - \frac{\cos^7 \alpha_0 \cos^6 \beta_0 K}{am^5 \sin \varphi_1 \sin^6 (\alpha_0 + \beta_0)} (x - FM)^6 + \ldots,$$

que nous représenterons ainsi:

$$y = y_0 + K_0 (x - x_0)^6 + \ldots,$$

en posant

$$x_0 = FM,\ y_0 = CF,$$

$$K_0 = -\frac{\cos^7 \alpha_0 \cos^6 \beta_0 K}{am^5 . \sin \varphi_1 \sin^6 (\alpha_0 + \beta_0)}.$$

Cela nous donne l'équation de la courbe décrite par le sommet M du triangle AA_1M au voisinage du point $x = x_0$, $y = y_0$, où elle a le contact d'ordre 5 avec la droite.

§ 13. Pour déterminer la valeur du coéfficient K_0 qui entre dans cette équation, nous observons que d'après (10), où

$$1 - d^2 = \cos^2 \alpha_0, \quad \frac{\sqrt{h^2 - (d+g)^2}}{h} = \cos \beta_0,$$

les coéfficients K et L sont liés par la relation:

$$K = -\frac{rx_1 \cos \beta_0 L}{r_1 \cos^{10} \alpha_0 (1 - d\lambda)},$$

en vertu de quoi l'expression de K_0, donnée plus haut, se réduit à celle-là:

$$K_0 = \frac{rx_1 \cos^7 \beta_0 L}{am^6 r_1 \cos^3 \alpha_0 \sin \varphi_1 \sin^6 (\alpha_0 + \beta_0)(1 - d\lambda)}.$$

En portant ici la valeur de x_1 d'après (9) et les valeurs des angles A, α_0, β_0 d'après les formules du § 9, on obtient

$$K_0 = \frac{r \cos^7 (\varphi + \gamma) \sin 3\varphi}{m^6 r_1 \cos^3 (3\varphi + \gamma) \sin^6 2\varphi \sin \varphi_1} \frac{L}{\lambda - d}.$$

En passant à la détermination du rapport

$$\frac{L}{\lambda - d},$$

qui entre dans cette expression du coéfficient K_0, nous évaluons la grandeur L d'aprés la formule du § 5, en y portant les valeurs de λ, μ, trouvées dans le § 7, et en prenant

$$h = (-1)^k \frac{\sin \dfrac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \dfrac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}.$$

En divisant la valeur de L ainsi obtenue par la grandeur $\lambda - d$ pour

la même valeur de h, on trouve, toutes réductions faites, pour la détermination du rapport de L à $\lambda - d$ une telle formule:

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{1}{32} \frac{\sin^2 \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4} \sin^3 (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi)}{\cos \alpha_0 \sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi) \sin^4 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4} \sin \frac{\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{2}}.$$

En portant ici la valeur de $k = 2p + 1$ et les valeurs des angles A, α_0, β_0, données dans le § 9, nous aurons:

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{1}{32} \frac{\cos^2 \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2}\right) \sin^3 2\varphi}{\cos (3\varphi + \gamma) \sin 3\varphi \cos^4 \frac{\gamma + n\pi}{2} \sin \varphi}.$$

En observant, d'après l'équation (20), que

$$\frac{\cos^2 \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2}\right)}{\cos^2 \frac{\gamma + n\pi}{2}} = \frac{m^2}{r^2} \frac{\cos^4 (3\varphi + \gamma)}{\cos^4 (\varphi + \gamma)},$$

on déduit de cette formule

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{m^2 \cos^3 (3\varphi + \gamma) \sin^3 2\varphi}{32 r^2 \cos^4 (\varphi + \gamma) \sin 3\varphi . \sin \varphi \cos^2 \frac{\gamma}{2}},$$

où d'après le § 11 nous avons mis γ au lieu de $\gamma + n\pi$; en vertu de quoi l'expression trouvée plus haut du coéfficient K_0 nous donne

$$K_0 = \frac{1}{32 r r_1 \sin \varphi . \sin \varphi_1 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos (\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi}\right)^3.$$

§ 14. D'après cette formule il n'est pas difficile de montrer que pour les valeurs finies de r, r_1, m, m_1, le coéfficient K_0 dans l'équation

$$y = y_0 + K_0 (x - x_0)^6 + \dots.$$

ne peut devenir égal à zéro, et par conséquent la courbe décrite par le sommet M du triangle AA_1M dans la question considérée ne peut avoir avec la ligne droite de contact d'ordre plus élevé que le 5-me.

Afin de le montrer, nous observons que le coéfficient K_0 ne doit changer de valeur lorsque dans son expression on remplace les grandeurs rélatives à l'angle A

$$\varphi, \; m, \; r, \; r_1, \; \gamma$$

par celles-ci

$$\varphi_1, \; m_1, \; r_1, \; r, \; -\gamma.$$

qui ont la même rélation à l'angle A_1.

Nous aurons ainsi une nouvelle expression du K_0

$$K_0 = \frac{1}{32 r_1 r \sin\varphi_1 \sin\varphi \cos^2\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos(\varphi_1 - \gamma)}{m_1 \sin 2\varphi_1}\right)^3.$$

On voit par ces deux expressions du coéfficient K_0 que pour des valeurs finies de r, r_1, m, m_1 il ne peut s'annuler que lorsqu'on satisfait aux équations

(24) $$\cos(\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(\varphi_1 - \gamma) = 0,$$

d'où il suit que

$$\varphi + \gamma = \frac{2q+1}{2}\pi, \quad \varphi_1 - \gamma = \frac{2q'+1}{2}\pi,$$

où q, q' sont des nombres entiers quelconques. De ces égalités on trouve par l'addition et la soustraction

(25) $$\begin{cases} \varphi + \varphi_1 = (q + q' + 1)\pi, \\ \varphi - \varphi_1 + 2\gamma = (q - q')\pi. \end{cases}$$

Mais on voit par (23) que les égalités (24), pour des valeurs finies de r, m, r_1, m_1, supposent ou l'égalité

$$\cos\frac{\gamma}{2} = 0,$$

ou les deux égalités

$$\cos(3\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(3\varphi_1 - \gamma) = 0.$$

Dans le premier cas on trouve que

$$\gamma = (2q'' + 1)\pi,$$

q'' étant un entier. En portant cette valeur de γ dans l'équation (25), on en tire

$$\varphi = \left(q - 2q'' - \frac{1}{2}\right)\pi; \quad \varphi_1 = \left(q' + 2q'' + \frac{3}{2}\right)\pi.$$

Et en déterminant les angles du triangle AA_1M qui correspondent à ces valeurs de φ, φ_1, on trouve, d'après le § 8, que chacun des angles A, A_1 doit contenir un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, ce qui est impossible.

En passant à l'hypothèse

$$\cos(3\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(3\varphi_1 - \gamma) = 0,$$

nous observons que ces égalités conjointement avec les égalités (24) supposent

$$\varphi = \frac{q}{2}\pi, \quad \varphi_1 = \frac{q'}{2}\pi,$$

q, q' étant des nombres entiers. Si q, q' seront tous les deux impaires, les angles A, A_1 deviennent de nouveau impossibles. Si l'un d'eux est un nombre impair et l'autre pair, on ne satisfait pas à la première des équations (25). Enfin, si tous les deux nombres q, q' seront pairs, l'angle γ d'après (24) devra avoir la valeur

$$\gamma = \frac{2q_0 + 1}{2}\pi,$$

q_0 étant un nombre entier.

Mais pour de telles valeurs de φ, φ_1, γ dans l'équation (22), écrite sous la forme

$$\frac{\operatorname{cotang} \frac{3}{2}(\varphi + \varphi_1)}{\operatorname{cotang} \frac{\varphi + \varphi_1}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\left[\frac{3}{2}(\varphi - \varphi_1) + \gamma\right]}{\operatorname{tang} \frac{\varphi - \varphi_1}{2}},$$

le premier membre deviendra $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, selon que la somme $\varphi + \varphi_1$ se réduira à π répété un nombre pair ou un nombre impair de fois, tandis-que le second se réduira à $\frac{0}{\infty}$ ou à $\frac{\infty}{0}$, selon que la différence $\varphi - \varphi_1$ se réduira à π pris un nombre impair ou un nombre pair de fois. En déterminant la valeur du premier membre pour les valeurs de φ, φ_1 très proches de $\frac{q}{2}\pi$, $\frac{q'}{2}\pi$, en supposant q, q' être des nombres pairs, on trouve que pour ces valeurs sa limite est ou $\frac{3}{1}$, ou $\frac{1}{3}$. D'où l'on voit que pour de telles valeurs de φ, φ_1, γ on ne peut pas satisfaire à l'équation (22), et par conséquent la dernière supposition est aussi impossible.

§ 15. D'après l'équation

$$y = y_0 + K_0 (x - x_0)^6 + \ldots.$$

on trouve qu'entre les limites $x = x_0 - \frac{l}{2}$ et $x = x_0 + \frac{l}{2}$ l'éloignement du sommet M du triangle AA_1M de la ligne droite ne surpassera pas

$$\frac{K_0}{2^6} l^6,$$

en négligeant les puissances supérieures de l et supposant en général la grandeur l être petite. En portant ici la valeur de K_0 que nous avons trouvée, on aura

$$\frac{1}{2048 r r_1 \sin\varphi \sin\varphi_1 \cos^2\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{\cos(\varphi+\gamma)}{m\sin 2\varphi}\right)^3 l^6$$

pour la limite des écarts du sommet M du triangle AA_1M de la voie rectiligne, la longueur du jeu étant égale à l.

Ces déviations peuvent être faites beaucoup plus petites d'après ce que nous avons montré dans le Mémoire sous le titre: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.* Pour cela, après avoir déterminé, comme on l'a montré plus haut, les longueurs des lignes AC, A_1C_1 et les places des centres de rotation C, C_1, il faut chercher quels changements doit-on apporter aux uns et aux autres, afin que la courbe décrite par le sommet M du triangle AA_1M rencontre la droite aux points, dont les abscisses aient de telles valeurs:

$$x_0 - \frac{l}{2}\cos 15^0,\ x_0 - \frac{l}{2}\cos 45^0,\ x_0 - \frac{l}{2}\cos 75^0,$$

$$x_0 + \frac{l}{2}\cos 15^0,\ x_0 + \frac{l}{2}\cos 45^0,\ x_0 + \frac{l}{2}\cos 75^0.$$

Lorsque cette condition sera remplie, les écarts de la voie rectiligne du sommet M du triangle AA_1M sur toute la longueur l du jeu, resteront, comme le démontre l'Analyse, entre les limites:

$$-\frac{1}{65536 r r_1 \sin\varphi \sin\varphi_1 \cos^2\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{\cos(\varphi+\gamma)}{m\sin 2\varphi}\right)^3 l^6,$$

$$+\frac{1}{65536 r r_1 \sin\varphi \sin\varphi_1 \cos^2\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{\cos(\varphi+\gamma)}{m\sin 2\varphi}\right)^3 l^6.$$

18.

SUR LES FONCTIONS QUI S'ÉCARTENT PEU DE ZÉRO POUR CERTAINES VALEURS DE LA VARIABLE.

(TRADUIT PAR C. A. POSSÉ.)

О функціяхъ мало удаляющихся отъ нуля при нѣкоторыхъ величинахъ перемѣнной.

(Приложеніе къ XL тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 8, 1881 г.)

(Lu le 23 décembre 1880.)

Sur les fonctions qui s'écartent peu de zéro pour certaines valeurs de la variable.

§ 1. Si une fonction entière $F(x)$ s'écarte peu de zéro, entre les limites $x = -h$, $x = +h$, elle ne peut atteindre en déhors de ces limites une valeur considérable pour x peu différent de $-h$ ou de $+h$ que dans le cas où le degré de cette fonction est assez grand. Nous allons montrer maintenant de quelle manière, d'après le degré de $F(x)$ et la limite supérieure de son écart de zéro pour les valeurs de x entre $-h$ et $+h$, on pourra trouver la limite supérieure de sa valeur pour $x = H$ en déhors des limites $-h$ et $+h$. Or, comme toutes les valeurs de la fonction $F(x)$, tant entre les limites $x = -h$ et $x = +h$, que pour $x = H$, peuvent être modifiées dans un rapport voulu à l'aide de l'introduction d'un facteur constant, nous allons nous borner, pour simplifier l'exposition, à la supposition que la fonction $F(x)$ ait une valeur donnée M pour $x = H$ et nous allons chercher ensuite parmi toutes les fonctions entières, satisfaisant à la condition

$$F(H) = M$$

et étant d'un degré donné n, celle qui entre $x = -h$ et $x = +h$ s'écarte le moins possible de zéro. En désignant par L le plus grand écart de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$ d'une telle fonction et remarquant que pour toute autre fonction du même degré et ayant la valeur M pour $x = H$ le plus grand écart de zéro entre $x = -h$ et $x = +h$ surpassera L, nous devons conclure que le rapport

$$\frac{M}{L},$$

correspondant à la fonction considérée, représentera la limite supérieure du rapport de la valeur d'une fonction entière de degré n pour $x = H$ au plus grand écart de zéro de la même fonction entre $x = -h$ et $x = +h$.

§ 2. Passant à la détermination de la fonction $F(x)$ sous les conditions mentionnées, remarquons qu'étant de degré n et se réduisant à M pour $x = H$, elle doit avoir la forme

$$(1) \quad F(x) = (p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n)(x - H) + M,$$

$p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ désignant des constantes. Ces constantes dans la fonction considérée se déterminent d'après la condition que cette fonction entre $x = -h$ et $x = +h$ ne surpasse pas les limites $-L$ et $+L$, entre lesquelles ne peut rester aucune autre fonction de la même forme pour les mêmes valeurs de la variable. Pour déterminer les valeurs des constantes $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$ d'après cette condition nous allons nous appuyer sur le premier *théorème* de nôtre Mémoire sous le titre: «*Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*» *). Ce théorème est applicable à la détermination des coefficients de la fonction $F(x)$, cette fonction ainsi que ses dérivées restant continues et finies entre $x = -h$ et $x = +h$.

En vertu de ce théorème et désignant par

$$x_1, \; x_2, \ldots \; x_\mu$$

les diverses valeurs de la variable x, pour lesquelles la fonction $F(x)$ entre $x = -h$ et $x = +h$ atteint ses valeurs limites $-L$ et $+L$, nous concluons que le système de n équations

$$\frac{dF(x_1)}{dp_1}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_1}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_1}\lambda_\mu = 0,$$
$$\frac{dF(x_1)}{dp_2}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2}\lambda_\mu = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dF(x_1)}{dp_n}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_n}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n}\lambda_\mu = 0$$

aux μ inconnues

$$\lambda_1, \; \lambda_2, \ldots \; \lambda_\mu$$

doit avoir une solution où les valeurs des μ inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\mu$ ne sont pas toutes égales à zéro.

*) T. I, p. 273—378.

En déterminant d'après (1) les valeurs des dérivées

$$\frac{dF(x_1)}{dp_1}, \frac{dF(x_2)}{dp_1}, \dots \frac{dF(x_\mu)}{dp_1},$$
$$\frac{dF(x_1)}{dp_2}, \frac{dF(x_2)}{dp_2}, \dots \frac{dF(x_\mu)}{dp_2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dF(x_1)}{dp_n}, \frac{dF(x_2)}{dp_n}, \dots \frac{dF(x_\mu)}{dp_n},$$

et les portant dans les équations précédentes, nous trouvons que celles-ci se réduisent au suivantes:

$$(2) \begin{cases} (x_1-H)x_1^{n-1}.\lambda_1 + (x_2-H)x_2^{n-1}.\lambda_2 + \dots + (x_\mu-H)x_\mu^{n-1}.\lambda_\mu = 0, \\ (x_1-H)x_1^{n-2}.\lambda_1 + (x_2-H)x_2^{n-2}.\lambda_2 + \dots + (x_\mu-H)x_\mu^{n-2}.\lambda_\mu = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x_1-H)\lambda_1 + (x_2-H)\lambda_2 + \dots + (x_\mu-H)\lambda_\mu = 0. \end{cases}$$

§ 3. La quantité H étant en déhors des limites $x = -h$, $x = +h$, entre lesquelles se trouvent toutes les μ quantités

$$x_1, x_2, \dots x_\mu,$$

aucune des différences

$$x_1 - H, x_2 - H, \dots, x_\mu - H$$

ne peut se réduire à zéro. Cela posé, nous allons montrer que le nombre μ des inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mu$ dans le système d'équations trouvé ci-dessus doit surpasser le nombre n de ces équations, pour qu'on puisse leur satisfaire par les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mu$ différentes de zéro, comme cela doit nécessairement avoir lieu, d'après le théorème mentionné, pour la fonction $F(x)$ que nous considérons.

En effet, si μ ne surpasse pas n, le produit

$$(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_\mu)$$

se réduit à un polynôme de degré inférieur à n, qui peut être représenté par

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \dots + K.$$

En désignant ce polynôme par $\varphi(x)$, nous remarquons, d'après sa décomposition en facteurs, que

$$\varphi(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots(x_1 - x_\mu);$$
$$\varphi(x_2) = 0, \ \varphi(x_3) = 0, \ \ldots\ldots\ldots \varphi(x_\mu) = 0.$$

Remontant aux équations (2), les multipliant respectivement par

$$A, \ B, \ldots\ldots K$$

et prenant leur somme, nous obtenons l'équation ci-dessous:

$$(x_1 - H)\varphi(x_1)\lambda_1 + (x_2 - H)\varphi(x_2)\lambda_2 + \ldots\ldots + (x_\mu - H)\varphi(x_\mu)\lambda_\mu = 0.$$

En y portant les valeurs trouvées plus haut des fonctions

$$\varphi(x_1), \ \varphi(x_2), \ldots\ldots \varphi(x_\mu),$$

nous remarquons que cette équation se réduit à

$$(x_1 - H)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots(x_1 - x_\mu)\lambda_1 = 0.$$

d'où il suit

$$\lambda_1 = 0,$$

parceque la différence $x_1 - H$, d'après ce qu'on a vu, est différente de zéro et les quantités $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ sont différentes entre elles.

On démontrera d'une manière analogue que pour $\mu \leqq n$ les équations (2) donneront

$$\lambda_2 = 0, \ldots\ldots, \lambda_\mu = 0.$$

On voit d'après cela que le nombre μ, qui indique combien de fois la fonction considérée entre $x = -h$ et $x = +h$ atteint les valeurs limites $-L$ et $+L$ sans les franchir, doit être plus grand que n; donc l'équation

$$(3) \qquad F^2(x) - L^2 = 0$$

doit avoir au moins $n + 1$ racines entre $x = -h$ et $x = +h$. Parmi ces $n + 1$ racines il y en aura au moins $n - 1$ différentes de $-h$ et de $+h$; ces $n - 1$ racines ne peuvent être racines simples, car, x passant par une racine simple de l'équation (3), $F^2(x)$ franchit la quantité L^2, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En remarquant d'autre part que les racines multiples de l'équation (3) vérifient l'équation

$$F'(x) = 0,$$

de degré $n-1$ d'après (1), nous concluons que l'équation (3) ne peut avoir plus de $n-1$ racines multiples. En les désignant par

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots .\ x_{n-1},$$

nous arrivons à la conclusion, d'après ce qu'on a dit plus haut, que le premier membre de l'équation (3) est divisible par le produit

$$(x-x_1)^2\ (x-x_2)^2\ (x-x_3)^2 \ldots . (x-x_{n-1})^2.$$

D'ailleurs, il est facile de voir qu'il est aussi divisible par le produit

$$(x-h)\ (x+h).$$

En effet, l'équation (3) ne peut avoir, comme on a vu tout-à-l'heure, plus de $n-1$ racines multiples; or, entre $x = -h$ et $x = +h$, d'après ce qui precéde, se trouvent au moins $n+1$ racines, donc deux de ces racines doivent être simples. Mais, comme on a remarqué, les racines simples de l'équation (3) ne peuvent être que

$$x = -h,\ x = +h,$$

ce qui entraîne la divisibilité de son premier membre par le produit

$$(x-h)\ (x+h).$$

C'est ainsi qu'on s'assure que la différence

$$F^2(x) - L^2$$

est divisible par

$$(x-x_1)^2\ (x-x_2)^2\ (x-x_3)^2 \ldots . (x-x_{n-1})^2$$

et par

$$(x-h)\ (x+h) = x^2 - h^2,$$

cela veut dire, par leur produit

$$(x-x_1)^2\ (x-x_2)^2\ (x-x_3)^2 \ldots . (x-x_{n-1})^2\ (x^2-h^2).$$

Remarquant encore que d'après (1) ce produit est du même degré que la différence

$$F^2(x) - L^2,$$

nous en concluons que cette divisibilité entraîne l'égalité

$$F^2(x) - L^2 = C(x - x_1)^2 \ (x - x_2)^2 \dots \ (x - x_{n-1})^2 \ (x^2 - h^2),$$

C désignant une constante. Cette égalité nous donne l'équation

$$(4) \qquad F^2(x) - L^2 = (x^2 - h^2) \ \Phi^2(x),$$

$\Phi(x)$ étant une fonction entière, définie par la formule

$$(5) \qquad \Phi(x) = \pm \sqrt{C} \ (x - x_1) \ (x - x_2) \dots (x - x_{n-1}),$$

où le signe du radical $\pm \sqrt{C}$ se détermine de la sorte que le terme du plus haut degré de $\Phi(x)$ ait le même signe que le terme analogue de $F(x)$.

§ 4. En abordant la détermination de la fonction $F(x)$ d'après l'équation (4), remarquons qu'elle peut être écrite sous la forme

$$F^2(x) - (x^2 - h^2) \ \Phi^2(x) = L^2,$$

d'où l'on déduit, en décomposant la différence

$$F^2(x) - (x^2 - h^2) \ \Phi^2(x)$$

en facteurs

$$\left(F(x) - \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2}\right) \ \left(F(x) + \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2}\right),$$

l'égalité

$$F(x) - \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{L^2}{F(x) + \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2}},$$

ce qui nous donne après la division par $\Phi(x)$ l'équation

$$(6) \qquad \frac{F(x)}{\Phi(x)} - \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{L^2}{\Phi(x) \left[F(x) + \Phi(x) \sqrt{x^2 - h^2}\right]},$$

A l'aide de cette équation, comme nous avons montré dans le Mémoire mentionné ci-dessus, l'expression de la fonction cherchée $F(x)$ peut être obtenue par le développement de $\sqrt{x^2 - h^2}$ en fraction continue. Nous allons montrer maintenant comment cette fonction peut être trouvée sans le secours

des fractions continues. Remarquons dans ce but qu'en désignant par P, Q les fonctions entières représentées par les égalités

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2},\\ Q &= \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n-(x-\sqrt{x^2-h^2})}{2\sqrt{x^2-h^2}}, \end{aligned}\right.$$

on trouve

$$P-Q\sqrt{x^2-h^2}=(x-\sqrt{x^2-h^2})^n.$$

Or, remarquant que le produit

$$(x+\sqrt{x^2-h^2})\ (x-\sqrt{x^2-h^2})$$

est égal à h^2, nous aurons

$$x-\sqrt{x^2-h^2}=\frac{h^2}{x+\sqrt{x^2-h^2}};$$

en vertu de cela, l'égalité précédente donne

$$P-Q\sqrt{x^2-h^2}=\frac{h^{2n}}{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n},$$

d'où l'on obtient, en divisant par Q,

$$\frac{P}{Q}-\sqrt{x^2-h^2}=\frac{h^{2n}}{Q\,[x+\sqrt{x^2-h^2}]^n}.$$

En soustrayant cette égalité de (6), on aura

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)}-\frac{P}{Q}=\frac{L^2}{\Phi(x)\,[F(x)+\Phi(x)\sqrt{x^2-h^2}]}-\frac{h^{2n}}{Q\,(x+\sqrt{x^2-h^2})^n},$$

ce qui nous donne, en multipliant par $\Phi(x).Q$, l'équation

$$F(x).Q-\Phi(x).P=\frac{L^2Q}{F(x)+\Phi(x)\sqrt{x^2-h^2}}-\frac{h^{2n}\,\Phi(x)}{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n}.$$

En considérant le second membre de cette équation, nous remarquons que les deux termes qui y entrent représentent des expressions de degrés négatifs, les fonctions L^2Q, $h^{2n}\,\Phi(x)$ aux numérateurs étant de dégré $n-1$, d'après (5) et (7), tandis que les fonctions $F(x)+\Phi(x)\sqrt{x^2-h^2}$, $(x+\sqrt{x^2-h^2})^n$ aux dénominateurs sont de degré n, d'après (1) et (5). Par conséquent notre équation, dont le premier membre représente une fonction

entière, ne peut être satisfaite que dans le cas où l'un et l'autre de ses membres se réduisent à zéro, c'est à dire, lorsque

$$F(x)\,Q - \Phi(x)\,P = 0.$$

On trouve de là

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = \frac{P}{Q},$$

et remarquant que d'après (4), (5) et (7), la fonction $F(x)$ n'a pas de facteur commun avec $\Phi(x)$, non plus que P avec Q, nous concluons que $F(x)$ ne peut différer de P que par un facteur constant; donc

$$F(x) = C_1 P,$$

C_1 désignant une constante. Cette valeur de $F(x)$, en y portant l'expression de P, tirée de (7), nous donne

$$F(x) = C_1 \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2}.$$

§ 5. Pour déterminer la constante C_1, remarquons que d'après le § 1 la fonction $F(x)$, pour $x = H$, est égale à M. En faisant dans l'expression trouvée de $F(x)$

$$x = H,$$

nous aurons

$$F(H) = C_1 \frac{(H + \sqrt{H^2 - h^2})^n + (H - \sqrt{H^2 - h^2})^n}{2},$$

ce qui, étant égale à M, nous donne l'équation suivante pour l'évaluation de C_1:

$$C_1 \frac{(H + \sqrt{H^2 - h^2})^n + (H - \sqrt{H^2 - h^2})^n}{2} = M,$$

d'où l'on tire

$$C_1 = \frac{2M}{(H + \sqrt{H^2 - h^2})^n + (H - \sqrt{H^2 - h^2})^n}.$$

En portant cette valeur de C_1 dans l'expression de $F(x)$, on obtient

$$F(x) = M \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{(H + \sqrt{H^2 - h^2})^n + (H - \sqrt{H^2 - h^2})^n}.$$

Ainsi s'exprime la fonction entière de degré n, qui, étant égale à M pour $x = H$, s'écarte le moins possible de zéro dans l'intervalle de $x = -h$

à $x = +h$, ne comprenant pas la valeur $x = H$. Pour trouver L, la limite de ces écarts, remarquons que l'équation (4) nous donne pour $x = h$

$$F^2(h) = L^2,$$

d'où

$$L = F(h).$$

En posant $x = h$ dans l'expression trouvée de $F(x)$ nous aurons

$$F(h) = \frac{2Mh^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n};$$

en vertu de cela l'égalité précédente nous donne

$$L = \frac{2Mh^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n},$$

d'où l'on tire l'expression suivante du rapport $\frac{M}{L}$:

$$\frac{M}{L} = \frac{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n}{2h^n},$$

qui, d'après le § 1, représente la limite supérieure du rapport de la valeur d'une fonction entière de degré n pour $x = H$ au plus grand écart de zéro de la même fonction entre $x = -h$ et $x = +h$, en supposant que H est extérieur à l'intervalle entre $x = -h$ et $x = +h$.

En représentant l'expression trouvée sous la forme

$$(8) \qquad \frac{M}{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{H}{h} + \sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n + \left(\frac{H}{h} - \sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n\right]$$

et mettant au lieu de

$$\frac{H}{h} - \sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}$$

l'expression équivalente

$$\left(\frac{H}{h} + \sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^{-1},$$

nous trouvons

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{H}{h} + \sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n + \left(\frac{H}{h} + \sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^{-n}\right].$$

Cette égalité donne pour la valeur de

$$\left(\frac{H}{h} + \sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n - \frac{M}{L},$$

l'expression

$$\left(\frac{H}{h}+\sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n-\frac{M}{L}=\pm\sqrt{\frac{M^2}{L^2}-1}.$$

Pour savoir lequel des deux signes $\pm$ doit être pris dans cette formule, supposons qu'on ne donne que des valeurs positives aux quantités h et H: dans ce cas on aura

$$\left(\frac{H}{h}+\sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n>\left(\frac{H}{h}-\sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n,$$

par conséquent d'après (8)

$$\left(\frac{H}{h}+\sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n>\frac{M}{L}.$$

Cette inégalité nous montre que l'égalité obtenue ne peut être satisfaite qu'avec le signe supérieur du radical $\sqrt{\frac{M^2}{L^2}-1}$, et qu'on doit avoir par conséquent

$$\left(\frac{H}{h}+\sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n-\frac{M}{L}=\sqrt{\frac{M^2}{L^2}-1};$$

d'où il suit

$$\left(\frac{H}{h}+\sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)^n=\frac{M}{L}+\sqrt{\frac{M^2}{L^2}-1}.$$

Or, en déterminant d'après cette égalité le nombre n, nous trouvons

$$n=\frac{\log\left(\frac{M}{L}+\sqrt{\frac{M^2}{L^2}-1}\right)}{\log\left(\frac{H}{h}+\sqrt{\frac{H^2}{h^2}-1}\right)},$$

ce qui donne la limite inférieure du degré d'une fonction entière dont le plus grand écart de zéro entre $x=-h$ et $x=+h$ est égal à L et qui prend la valeur M pour $x=H$ non compris entre $x=-h$ et $x=+h$. Toutes les quantités h, H, L, M sont supposées positives.

§ 6. Nous allons nous occuper maintenant de la même question par rapport à la fonction trigonométrique de la forme

$$(9)\qquad \begin{cases} A_0+A_1\cos\varphi+A_2\cos 2\varphi+\ldots+A_n\cos n\varphi \\ \quad +B_1\sin\varphi+B_2\sin 2\varphi+\ldots+B_n\sin n\varphi, \end{cases}$$

que nous désignerons pour abréger par

$$f(\varphi).$$

Nous supposerons connue la valeur de cette fonction pour une certaine valeur

$$\varphi=\varphi_1,$$

et nous désignerons, comme ci-dessus, cette valeur par M; nous allons chercher ensuite parmi toutes les fonctions de la forme (9) qui satisfont à l'équation

$$f(\varphi_1)=M$$

celle, qui s'écarte le moins possible de zéro entre deux limites données $\varphi=-\varphi_0$, $\varphi=+\varphi_0$, la valeur φ_1 n'y étant pas comprise.

Pour réduire la fonction $f(\varphi)$ à une forme algébrique, introduisons une variable x en posant

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}=x.$$

En tirant de là

$$\sin\varphi=\frac{2x}{x^2+1},\quad \cos\varphi=\frac{1-x^2}{x^2+1},$$

nous remarquons que la formule (9), après la substitution des valeurs des sinus et cosinus des angles multiples de φ, se réduira à la forme

$$\frac{C_0x^{2n}+C_1x^{2n-1}+\ldots.+C_{2n}}{(x^2+1)^n},$$

$C_0, C_1, \ldots. C_{2n}$ désignant des constantes.

En posant

(10) $$C_0x^{2n}+C_1x^{2n-1}+\ldots.+C_{2n}=F(x),$$

nous pouvons écrire l'expression de $f(\varphi)$ sous la forme

(11) $$f(\varphi)=\frac{F(x)}{(x^2+1)^n}.$$

Or, en posant

(12) $$\operatorname{tang}\frac{\varphi_0}{2}=h;\quad \operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}=H,$$

nous remarquons que d'après (11) l'égalité

$$f(\varphi_1)=M,$$

à laquelle doit satisfaire la fonction cherchée, se réduit à la suivante:

$$\frac{F(H)}{(H^2+1)^n}=M.$$

D'où il suit

$$(13)\qquad F(H)=(H^2+1)^n M,$$

ce qui entraîne la réductibilité de la fonction $F(x)$ à la forme

$$(p_1x^{2n-1}+p_2x^{2n-2}+\ldots\ldots+p_{2n})\,(x-H)+(H^2+1)^n M,$$

où

$$p_1,\ p_2,\ldots\ldots p_{2n}$$

désignent des quantités constantes qui doivent être déterminées par la condition que la fonction

$$f(\varphi)=\frac{F(x)}{(x^2+1)^n}=\frac{(p_1x^{2n-1}+p_2x^{2n-2}+\ldots\ldots+p_{2n})\,(x-H)+(H^2+1)^n M}{(x^2+1)^n}$$

entre $x=-h$ et $x=+h$ s'écarte le moins possible de zéro.

En désignant par L le plus grand écart de zéro entre $x=-h$ et $x=+h$ de la fonction cherchée et appliquant le théorème déjà cité, nous arrivons, à l'aide des raisonnements exposés aux §§ 2, 3, à l'équation suivante à l'égard de la fonction $F(x)$

$$F^2(x)-L^2(x^2+1)^{2n}=C(x^2-h^2)\,(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2\ldots\ldots(x-x_{2n-1})^2,$$

$x_1,\ x_2,\ldots\ldots\ x_{2n-1}$ désignant des quantités réelles inégales.

Cette équation se réduit à la forme

$$(14)\qquad F^2(x)-L^2(x^2+1)^{2n}=\Phi^2(x)\,(x^2-h^2).$$

en posant

$$(15)\qquad \Phi(x)=\pm\sqrt{C}\,(x-x_1)\,(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{2n-1}),$$

où le radical doit être pris avec celui des deux signes $\pm$ pour lequel le rapport

$$\frac{F(\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}\sqrt{1+h^2}.\Phi(\sqrt{-1})}$$

se réduit à une quantité positive.

§ 7. Passant à la résolution de l'équation (14) nous remarquons que pour

$$x=\sqrt{-1}$$

elle donne

$$F^2(\sqrt{-1})=-(1+h^2)\,\Phi^2(\sqrt{-1});$$

d'où il résulte, après l'extraction de la racine,

$$F(\sqrt{-1})=\pm\Phi(\sqrt{-1})\,\sqrt{1+h^2}.\sqrt{-1},$$

où, d'après ce qu'on vient de dire sur le choix du signe dans la formule (15), l'on doit retenir le signe supérieur, ce qui donne

(16) $$F(\sqrt{-1}) = \Phi(\sqrt{-1})\sqrt{h^2+1}\,.\sqrt{-1}.$$

En posant

$$x = -\sqrt{-1},$$

dans cette équation, nous trouvons

$$F^2(-\sqrt{-1}) = \Phi^2(-\sqrt{-1})\,(-1-h^2),$$

d'où l'on tire, en extrayant la racine, les deux valeurs suivantes de $F(-\sqrt{-1})$:

$$F(-\sqrt{-1}) = +\sqrt{1+h^2}\,.\,\Phi(-\sqrt{-1})\,.\sqrt{-1};$$
$$F(-\sqrt{-1}) = -\sqrt{1+h^2}\,.\,\Phi(-\sqrt{-1})\,.\sqrt{-1}.$$

A ces deux valeurs de $F(-\sqrt{-1})$ correspondent, comme nous le verrons, deux solutions différentes de l'équation (14) dont la recherche va nous occuper maintenant.

En nous arrêtant au cas de

(17) $$F(-\sqrt{-1}) = \sqrt{1+h^2}\,.\,\Phi(-\sqrt{-1})\,.\sqrt{-1},$$

désignons par P et Q les fonctions entières, déterminées par les égalités:

(18) $$\left\{\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-x^2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-x^2}\right)^{2n}\right],\\ Q &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-h^2}}\left(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-x^2}\right)^{2n}-\left(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-x^2}\right)^{2n}\Big]. \end{aligned}\right.$$

En déterminant à l'aide de ces égalités les expressions de la somme $P+Q\sqrt{x^2-h^2}$ et de la différence $P-Q\sqrt{x^2-h^2}$, nous obtenons:

$$P+Q\sqrt{x^2-h^2} = \left(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-x^2}\right)^{2n},$$
$$P-Q\sqrt{x^2-h^2} = \left(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-x^2}\right)^{2n},$$

Ces expressions étant multipliées l'une par l'autre donnent

$$P^2-Q^2(x^2-h^2) = \left[\left(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-x^2}\right)\left(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-x^2}\right)\right]^{2n} = (x^2+1)^{2n}.$$

Il en résulte que

(19) $$P^2 = Q^2(x^2-h^2)+(x^2+1)^{2n}.$$

En multipliant cette valeur de P^2 par celle de $F^2(x)$ qui d'après (14) est égale à la somme

$$\Phi^2(x)(x^2-h^2)+L^2(x^2+1)^{2n},$$

nous trouvons

$$P^2.F^2(x)=Q^2.\Phi^2(x)(x^2-h^2)^2+L^2(x^2+1)^{4n}+(x^2-h^2)(x^2+1)^{2n}[L^2Q^2+\Phi^2(x)],$$

ce qui donne

$$P^2.F^2(x)-Q^2.\Phi^2(x)(x^2-h^2)^2=L^2(x^2+1)^{4n}+(x^2-h^2)(x^2+1)^{2n}[L^2Q^2+\Phi^2(x)],$$

d'où l'on déduit, en décomposant le premier membre en facteurs:

$$[PF(x)+Q\Phi(x)(x^2-h^2)]\,[PF(x)-Q\Phi(x)(x^2-h^2)]=$$
$$(x^2+1)^{2n}\left[L^2(x^2+1)^{2n}+(x^2-h^2)\left(L^2Q^2+\Phi^2(x)\right)\right].$$

Or, comme il est aisé de montrer, le premier facteur du premier membre

$$PF(x)+Q\Phi(x)(x^2-h^2)$$

ne se réduit pas à zéro pour $x=\pm\sqrt{-1}$, racines de l'équation $x^2+1=0$.

En effet, en vertu de (16), (17), (18), pour $x=\pm\sqrt{-1}$, on trouve

$$F(\pm\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,\sqrt{1+h^2}\,\Phi(\pm\sqrt{-1}),$$
$$P=2^{2n-1}(h^2+1)^n;\quad Q=\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{-1}}(h^2+1)^{n-\frac{1}{2}};$$

d'après cela pour ces valeurs de x l'éxpression

$$PF(x)+Q\Phi(x)(x^2-h^2)$$

se réduit à

$$\sqrt{-1}\,.\,2^{2n}(1+h^2)^{n+\frac{1}{2}}\,\Phi(\pm\sqrt{-1});$$

Or, cette expression ne peut être égale à zéro, la fonction $\Phi(x)$, d'après (15), n'étant égale à zéro que pour les valeurs réelles $x=x_1, x_2, \ldots . x_{2n-1}$.

Après avoir montré ainsi que le premier facteur du premier membre de l'équation obtenue ne se réduit pas à zéro pour les racines de l'équation $x^2+1=0$ et n'a, par conséquent, pas de diviseur commun avec $(x^2+1)^{2n}$, nous pouvons conclure, en vertu de la même équation, dont le second membre est divisible par $(x^2+1)^{2n}$, que

$$P.F(x)-Q.\Phi(x)(x^2-h^2),$$

le second facteur du premier membre, est divisible par $(x^2+1)^{2n}$.

D'ailleurs, en représentant les équations (14), (19) sous les formes

$$\left(F(x)-\Phi(x)\sqrt{x^2-h^2}\right)\left(F(x)+\Phi(x)\sqrt{x^2-h^2}\right)=L^2(x^2+1)^{2n},$$
$$\left(P+Q\sqrt{x^2-h^2}\right)\left(P-Q\sqrt{x^2-h^2}\right)=(x^2+1)^{2n}$$

et en les multipliant l'une par l'autre, nous trouverons

$$\left[P.F(x)-Q\Phi(x)(x^2-h^2)+(QF(x)-P.\Phi(x))\sqrt{x^2-h^2}\right]$$
$$\left[P.F(x)-Q\Phi(x)(x^2-h^2)-(QF(x)-P.\Phi(x))\sqrt{x^2-h^2}\right]$$
$$=L^2(x^2+1)^{4n},$$

ce qui se réduit à l'égalité suivante:

$$\left[P.F(x)-Q.\Phi(x)(x^2-h^2)\right]^2-\left[QF(x)-P\Phi(x)\right]^2(x^2-h^2)$$
$$=L^2(x^2+1)^{4n}.$$

Or, d'après ce qu'on à démontré ci-dessus, l'expression

$$PF(x)-Q\Phi(x)(x^2-h^2)$$

est divisible par $(x^2+1)^{2n}$, on en conclut la divisibilité du terme

$$\left[QF(x)-P\Phi(x)\right]^2(x^2-h^2),$$

par $(x^2+1)^{4n}$. Remarquant encore que x^2-h^2 n'a pas de diviseur commun avec $(x^2+1)^{2n}$, on en tire que

$$\left[QF(x)-P\Phi(x)\right]^2$$

est divisible par $(x^2+1)^{4n}$, et par suite que

$$QF(x)-P\Phi(x)$$

est divisible par $(x^2+1)^{2n}$, ce qui ne peut avoir lieu que pour

$$QF(x)-P\Phi(x)=0,$$

car, d'après (10), (15), (18), les fonctions $F(x)$, P sont de degré $2n$, et $\Phi(x)$, Q de degré $2n-1$, donc

$$QF(x)-P\Phi(x)$$

ne peut être de degré supérieur à $4n-1$.

L'égalité obtenue entraîne comme conséquence que

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)}=\frac{P}{Q}.$$

Or, d'après (15), la fonction $\Phi(x)$ ayant tous ses facteurs linéaires différents de $x+\sqrt{-1}$ et $x-\sqrt{-1}$, dont le produit est x^2+1, les fonctions $F(x)$ et $\Phi(x)$, en vertu de l'équation (14), n'ont pas des diviseurs communs. Cela posé, la fraction

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)}$$

ne peut être égale à la fraction

$$\frac{P}{Q},$$

dont les termes d'après (10), (15), (18) sont respectivement du même degré que ceux de la première, que pour

$$F(x)=C'P;\quad \Phi(x)=C'Q,$$

C' désignant une constante.

En portant dans l'égalité

$$F(x)=C'P$$

l'expression de P tirée de (18) nous trouvons que

$$F(x)=\frac{1}{2}C'\left[\left(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-x^2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-x}\right)^{22n}\right].$$

C'est ainsi que s'exprime la fonction $F(x)$ qui satisfait à l'équation (14) dans le cas où

$$F\left(-\sqrt{-1}\right)=\sqrt{1+h^2}\,\Phi\left(-\sqrt{-1}\right)\sqrt{-1}.$$

Quant au cas, où cette égalité est satisfaite avec le signe —, l'expression de la fonction $F(x)$ qui satisfait à (14) s'obtiendra, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, en prenant pour P et Q les fonctions:

$$P=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{h^2+1}\,x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{h^2+1}\,x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{2n}\right],$$
$$Q=\frac{1}{2\sqrt{x^2-h^2}}\left[\left(\sqrt{h^2+1}\,x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{2n}-\left(\sqrt{h^2+1}\,x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{2n}\right].$$

Ainsi s'obtient la seconde solution de l'équation (14), où

$$F(x)=\frac{1}{2}C''\left[\left(\sqrt{h^2+1}\,x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{h^2+1}\,x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{2n}\right].$$

§ 8. Des deux solutions trouvées on doit choisir celle qui donne la plus grande limite du rapport

$$\frac{M}{L}.$$

Dans ce but nous allons chercher la valeur de ce rapport en prenant d'abord pour $F(x)$ la première solution et ensuite la seconde.

En comparant entre elles les deux valeurs du rapport $\frac{M}{L}$, ainsi obtenues, et supposant toujours $H > h$, il ne sera pas difficile d'en distinguer celle qui donne la solution de notre problème.

En retenant la première valeur de $F(x)$ et en y faisant

$$x = H,$$

nous trouvons

$$F(H) = \frac{C'}{2}\left[\left(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-H^2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-H^2}\right)^{2n}\right],$$

ce qui étant porté dans l'équation (13) nous donne

$$\frac{C'}{2}\left[\left(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-H^2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-H^2}\right)^{2n}\right]=(H^2+1)^n M,$$

d'où l'on tire la valeur suivante de C':

$$C' = \frac{2(H^2+1)^n M}{(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-H^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-H^2})^{2n}}.$$

En portant cette valeur de C' dans la première expression de $F(x)$, on l'obtient sous la forme:

$$F(x) = \frac{(H^2+1)^n\left[(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-x^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-x^2})^{2n}\right]}{(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-H^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-H^2})^{2n}} M;$$

d'où il suit, en faisant $x = h$,

$$F(h) = \frac{2(H^2+1)^n (h^2+1)^n M}{(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-H^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-H^2})^{2n}}.$$

Or, d'après l'équation (14) en faisant $x = h$, on a

$$F^2(h) - L^2(h^2+1)^{2n} = 0,$$

d'où l'on tire pour la valeur de L:

$$L = \pm \frac{F(h)}{(h^2+1)^n},$$

ce qui se réduit après la substitution de la valeur trouvée de $F(h)$ à

$$L = \pm \frac{2(H^2+1)^n M}{(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-H^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-H^2})^{2n}}.$$

En tirant de là le rapport

$$\frac{M}{L},$$

on obtient

$$\frac{M}{L} = \pm \frac{(\sqrt{h^2+1}+\sqrt{h^2-H^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}-\sqrt{h^2-H^2})^{2n}}{2(H^2+1)^n}$$

$$= \pm \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{h^2-H^2}{H^2+1}}\right)^{2n}+\left(\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}-\sqrt{\frac{h^2-H^2}{H^2+1}}\right)^{2n}\right],$$

ce qui peut être représenté, comme il est aisé de voir, sous la forme:

$$\frac{M}{L} = \pm \cos\left(2n.\text{arc}.\cos\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}\right).$$

§ 9. Passant à la seconde valeur de $F(x)$, représentée par la formule

$$F(x) = \frac{1}{2}C''\left[(\sqrt{h^2+1}\;x+\sqrt{x^2-h^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}\;x-\sqrt{x^2-h^2})^{2n}\right],$$

on obtient pour $x = H$

$$F(H) = \frac{1}{2}C''\left[(\sqrt{h^2+1}\,H+\sqrt{H^2-h^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}\,H-\sqrt{H^2-h^2})^{2n}\right],$$

ce qui étant porté dans l'équation (13) donne l'équation suivante pour l'évaluation de C'':

$$\frac{1}{2}C''\left[(\sqrt{h^2+1}\;H+\sqrt{H^2-h^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}\;H-\sqrt{H^2-h^2})^{2n}\right] = (H^2+1)^n M.$$

En tirant de là la valeur de C'' et en la portant dans l'expression considérée de $F(x)$, on trouve

$$F(x) = \frac{(\sqrt{h^2+1}\;x+\sqrt{x^2-h^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}\;x-\sqrt{x^2-h^2})^{2n}}{(\sqrt{h^2+1}\;H+\sqrt{H^2-h^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}\;H-\sqrt{H^2-h^2})^{2n}}(H^2+1)^n M,$$

ce qui donne pour $x = h$

$$F(h) = \frac{2h^{2n}(h^2+1)^n(H^2+1)^n M}{(\sqrt{h^2+1}\,H+\sqrt{H^2-h^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}\,H-\sqrt{H^2-h^2})^{2n}}.$$

Or, en faisant

$$x = h,$$

dans l'équation (14), on obtient

$$F^2(h) - L^2(h^2+1)^{2n} = 0;$$

d'où il suit

$$L = \pm\frac{F(h)}{(h^2+1)^n},$$

ce qui se réduit après la substitution de la valeur trouvée de $F(h)$ à

$$L = \pm\frac{2h^{2n}(H^2+1)^n M}{(\sqrt{h^2+1}\,H+\sqrt{H^2-h^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}\,H-\sqrt{H^2-h^2})^{2n}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{M}{L}=\pm\frac{(\sqrt{h^2+1}\,H+\sqrt{H^2-h^2})^{2n}+(\sqrt{h^2+1}\,H-\sqrt{H^2-h^2})^{2n}}{2h^{2n}(H^2+1)^n}$$

$$=\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{2n}+\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}-\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{2n}\right].$$

Or, comme le produit

$$\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)\cdot\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}-\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)$$

se réduit à l'unité et par conséquent

$$\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}-\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}=\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{-1},$$

la valeur ci-dessus de $\frac{M}{L}$ peut être représentée sous la forme

$$\frac{M}{L}=\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{2n}+\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{-2n}\right].$$

En considérant l'expression comprise entre les parenthèses [ ], nous remarquons que la plus petite valeur qu'elle acquiert pour

$$\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}=1,$$

est 2. Il en suit que la valeur numérique du rapport

$$\frac{M}{L},$$

trouvé ci-dessus ne sera jamais moindre que 1; ce qui donne la limite supérieure de ce rapport, car la valeur de ce rapport obtenue antérieurement

$$\pm\cos\left(2n.\operatorname{arc.cos}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}\right)$$

est toujours comprise entre $+1$ et -1.

On voit d'après cela que la limite supérieure du rapport

$$\frac{M}{L}$$

pour la fonction considérée sera donnée par la formule

$$\frac{M}{L}=\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{2n}+\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}}+\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{-2n}\right],$$

où des deux signes $\pm$ nous ne retiendrons que $+$, en prenant pour L et M les valeurs numériques du plus grand écart de zéro de cette fonction entre $x = -h$ et $x = +h$ et de sa valeur pour $x = H$.

Dans cette supposition nous aurons toujours

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}} + \sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{2n} + \left(\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}} + \sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}}\right)^{-2n}\right].$$

En portant ici d'après (12) les valeurs

$$h = \operatorname{tang}\frac{\varphi_0}{2},\quad H = \operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}$$

et remarquant que

$$\frac{H}{h}\sqrt{\frac{h^2+1}{H^2+1}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_0}{2}}\sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_0}{2}+1}{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_1}{2}+1}} = \frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}},$$

$$\sqrt{\frac{H^2-h^2}{(H^2+1)h^2}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{tang}^2\frac{\varphi_0}{2}}{\left(\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_1}{2}+1\right)\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_0}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2 - 1},$$

nous trouvons

$$\frac{M}{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} + \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2 - 1}\right)^{2n} + \left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} + \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2 - 1}\right)^{-2n}\right].$$

Cela donne pour une fonction de la forme

$$A_0 + A_1\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi + \ldots + A_n\cos n\varphi$$
$$+ B_1\sin\varphi + B_2\sin 2\varphi + \ldots + B_n\sin n\varphi$$

la limite supérieure du rapport de sa valeur pour $\varphi = \varphi_1$ à son plus grand écart de zéro entre $\varphi = -\varphi_0$ et $\varphi = \varphi_0$ ne comprenant pas la valeur $\varphi = \varphi_1$.

§ 10. En déterminant à l'aide de l'égalité obtenue la valeur de la différence

$$\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} + \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2 - 1}\right)^{2n} - \frac{M}{L},$$

nous la trouverons égale à

$$\pm\sqrt{\frac{M^2}{L^2} - 1}.$$

Il est facile de montrer que pour des valeurs positives de $\sin\frac{\varphi_1}{2}$, $\sin\frac{\varphi_0}{2}$ (comme nous le supposons toujours), c'est le signe $+$ qu'il faut prendre dans l'expression ci-dessus.

En effet, en portant dans l'expression

$$\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}+\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1}\right)^{2n}-\frac{M}{L}$$

la valeur de $\frac{M}{L}$ tirée de la dernière égalité du § précédent, nous trouverons qu'elle se réduit à la suivante

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}+\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1}\right)^{2n}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}+\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1}\right)^{-2n},$$

où pour

$$\sin\frac{\varphi_1}{2}>0,\quad \sin\frac{\varphi_0}{2}>0$$

le second terme est moindre que le premier, parceque celui-là se réduit à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}-\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1}\right)^{2n}$$

après le remplacement de l'expression

$$\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}+\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1}\right)^{-1}$$

par

$$\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}-\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1},$$

qui lui est équivalente.

Ayant ainsi démontré qu'en représentant la différence

$$\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}+\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1}\right)^{2n}-\frac{M}{L}$$

par la formule

$$\pm\sqrt{\frac{M^2}{L^2}-1}$$

il y faut retenir le signe $+$, nous en concluons que

$$\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}+\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1}\right)^{2n}=\frac{M}{L}+\sqrt{\frac{M^2}{L^2}-1}.$$

Or, en résolvant cette équation par rapport à n, nous trouvons

$$n=\frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{M}{L}+\sqrt{\frac{M^2}{L^2}-1}\right)}{\log\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}+\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2-1}\right)},$$

ce qui nous donne la limite inférieure du nombre n, pour lequel la fonction

$$A_0+A_1\cos\varphi+A_2\cos 2\varphi+\ldots\ldots+A_n\cos n\varphi$$
$$+B_1\sin\varphi+B_2\sin 2\varphi+\ldots\ldots+B_n\sin n\varphi,$$

dont le plus grand écart de zéro entre $\varphi=-\varphi_0$, $\varphi=+\varphi_0$ ne surpasse pas L est égale à $\pm M$ pour $\varphi=\varphi_1$. Les quantités L, M, φ_1, φ_0 sont supposées positives, M supérieur à L et $\varphi=\varphi_1$ non compris entre $\varphi=-\varphi_0$ et $\varphi=+\varphi_0$.

19.

SUR LES PLUS SIMPLES PARALLÉLOGRAMMES QUI FOURNISSENT UN MOUVEMENT RECTILIGNE AUX TERMES DU QUATRIÈME ORDRE PRÈS.

(TRADUIT PAR A. M. LJAPOUNOF.)

О простѣйшихъ параллелограммахъ, доставляющихъ прямолинейное движеніе съ точностью до четвертой степени.

(Приложеніе къ XL-му тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 1, 1882 г.)

(Lu le 24 novembre 1881.)

Sur les plus simples parallélogrammes qui fournissent un mouvement rectiligne aux termes du quatrième ordre près.

§ 1. Dans un Mémoire *Sur les parallélogrammes* composés de trois éléments quelconques, lu le 18 décembre 1879 *), nous avons montré comment, par la considération du mouvement d'un triangle dont un sommet se déplace sur un cercle et un autre sur une droite, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que tout triangle donné, dont deux sommets se meuvent sur des cercles, décrive, par le troisième sommet, une courbe ayant un contact du cinquième ordre avec une droite.

On obtient ainsi une solution complète de la question sur la recherche des plus simples parallélogrammes qui fournissent un mouvement rectiligne, pour des déplacements infiniment petits, jusqu'au degré de précision le plus élevé possible.

Or les formules que nous avons développées dans ce Mémoire peuvent servir encore, ainsi que nous allons le montrer maintenant, à déterminer tous les parallélogrammes les plus simples qui fournissent un mouvement rectiligne avec une précision d'un degré moins élevée; c'est-à-dire, tels que le contact, avec une droite, de la courbe qu'ils décrivent n'est que du quatrième ordre. Nous y parvenons en considérant les conditions pour qu'un triangle, dont un sommet se meut sur un cercle et un autre sur une droite, décrive, par son troisième sommet, une courbe ayant un contact du quatrième ordre avec un certain cercle.

§ 2. En retenant les notations du Mémoire cité, nous supposons que le sommet A du triangle AA_1M (fig. 1) se meuve sur un cercle, dont le centre se trouve au point C que nous prenons pour origine des coordonnées, et que le sommet M se déplace sur une droite FG parallèle à l'axe des x.

*) T. II, pag. 301—331.

Soit C_1 le centre du cercle ayant un contact du quatrième ordre avec la courbe que décrit le sommet A_1. Le rayon de ce cercle sera désigné par r_1.

Fig. 1.

En désignant par α_1 la valeur de l'angle variable $\alpha = AMF$ correspondant à la position du sommet A_1 sur le cercle C_1, au point de contact avec la courbe que décrit ce sommet, nous remarquons que le contact ne peut s'élever jusqu'au quatrième ordre que si la distance A_1C_1, α étant voisin de α_1, se développe suivant les puissances de $\sin\alpha - \sin\alpha_1$ en une série de la forme

$$A_1C_1 = r_1 + K_0 (\sin\alpha - \sin\alpha_1)^5 + \ldots.$$

Or, en désignant par x, y les coordonnées variables du point A_1 et par x_1, y_1 les coordonnées du centre fixe C_1, nous avons

$$A_1C_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Passant par suite à la détermination des coordonnées x, y, posons

$$AA_1 = a;\ AC = r,\ CF = b,\ AM = m,\ MAA_1 = A,\ ACx = \beta.$$

Alors, en projetant la ligne brisée CAA_1 sur les axes des coordonnées, on aura

$$x = r\cos\beta + a\cos(A - \alpha),$$

$$y = r\sin\beta + a\sin(A - \alpha);$$

et en projetant la ligne brisée CAM sur l'axe des y, on obtiendra cette relation entre les angles variables $\beta = ACx$ et $\alpha = AMF$:

$$CF = b = r \sin\beta - m \sin\alpha.$$

En tirant de cette relation les valeurs de $\sin\beta$ et $\cos\beta$, on trouve

$$\sin\beta = \frac{m \sin\alpha + b}{r},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin\alpha + b}{r}\right)^2},$$

ce qui, étant substitué dans les expressions des coordonnées, nous donne

$$x = \sqrt{r^2 - (m \sin\alpha + b)^2} + a \cos(A - \alpha);$$

$$y = m \sin\alpha + a \sin(A - \alpha) + b.$$

Substituons ces valeurs de x, y dans l'expression du carré de la distance A_1C_1:

$$A_1C_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Nous aurons:

$$A_1C_1^2 = [\sqrt{r^2 - (m \sin\alpha + b)^2} + a \cos(A - \alpha) - x_1]^2$$
$$+ [m \sin\alpha + a \sin(A - \alpha) + b - y_1]^2;$$

et de là, en éloignant les parenthèses, il vient

$$(1)\quad A_1C_1^2 = 2[a \sin A \sin\alpha + a \cos A \cos\alpha - x_1] \sqrt{r^2 - (m \sin\alpha + b)^2}$$
$$+ 2[am \sin A \sin\alpha + a(b - y_1) \sin A - ax_1 \cos A] \cos\alpha$$
$$+ 2[a(y_1 - b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1] \sin\alpha$$
$$- 2am \cos A \sin^2\alpha + r^2 + x_1^2 + y_1(y_1 - 2b) + a^2.$$

Telle sera l'expression du carré de la distance du sommet A_1 au point C_1, quelle que soit la courbe que décrit le sommet A_1; et nous avons vu que, dans le cas où cette courbe a, au point correspondant à $\alpha = \alpha_1$, un contact du quatrième ordre avec le cercle ayant C_1 pour centre et r_1 pour rayon, cette expression sera développable en une série de la forme

$$r_1^2 + 2r_1K_0(\sin\alpha - \sin\alpha_1)^5 + \ldots,$$

Nous aurons donc, dans le cas considéré, cette égalité:

$$(2)\quad \begin{aligned} &2\,[a \sin A \sin \alpha + a \cos A \cos \alpha - x_1]\sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + r^2 + x_1^2 \\ &+ 2\,[am \sin A \sin \alpha + a(b - y_1)\sin A - a x_1 \cos A]\cos \alpha + y_1(y_1 - 2b) \\ &- 2am \cos A \sin^2 \alpha + 2\,[a(y_1 - b)\cos A - a x_1 \sin A - m y_1]\sin \alpha + a^2 \\ &\qquad = r_1^2 + 2 r_1 K_0 (\sin \alpha - \sin \alpha_1)^5 + \ldots . \end{aligned}$$

§ 3. Pour présenter cette égalité sous une forme plus maniable, nous introduirons, au lieu de α, une variable z liée avec α par l'équation

$$(3)\qquad \sin \alpha = \frac{dz + 1}{z + d},$$

où

$$d = \sin \alpha_1.$$

On voit que, si l'on tire de cette équation les expressions de $\cos \alpha$ et $\sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2}$ et qu'on les porte dans l'égalité (2), celle-ci, en chassant le dénominateur, se réduira à la forme

$$(4)\quad \begin{aligned} &(z + \lambda + \mu \sqrt{z^2 - 1})\sqrt{(z - g)^2 - h^2} - (P_0 + P_1 z)\sqrt{z^2 - 1} + P_2 + P_3 z + P_4 z^2 \\ &\qquad = \frac{L_0}{z^3} + \ldots , \end{aligned}$$

où λ, μ, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 sont des constantes que l'on pourra facilement exprimer par les constantes A, a, m, r, r_1, b, x_1, y_1 qui figurent dans l'égalité (2).

Il est facile aussi d'obtenir les équations qui permettent de déterminer les anciennes constantes

$$A,\ a,\ m,\ b,\ r,\ r_1,\ x_1,\ y_1$$

par les nouvelles

$$\lambda,\ \mu,\ P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,$$

en observant que l'égalité (4), si l'on y substitue la valeur de z résultant de (3), doit se réduire à une égalité identique avec (2).

Comme on tire de (3)

$$z = \frac{1 - d \sin \alpha}{\sin \alpha - d},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{z} = \frac{\sin \alpha - d}{1 - d \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha - d}{1 - d^2} + \frac{d(\sin \alpha - d)^2}{(1 - d^2)^2} + \ldots ,$$

$$\sqrt{z^2 - 1} = \frac{\sqrt{(1 - d \sin \alpha)^2 - (\sin \alpha - d)^2}}{\sin \alpha - d} = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{\sin \alpha - d}\cos \alpha,$$

$$\sqrt{(z - g)^2 - h^2} = \frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)}\sin \alpha + \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)\,d}{h(1 - d^2)}\right)^2}}{\sin \alpha - d},$$

l'égalité (4) se réduit à

$$\frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}\frac{(\lambda-d)\sin\alpha}{(\sin\alpha-d)^2}\sqrt{1-\left(\frac{h^2-(g+d)^2}{h(1-d^2)}\sin\alpha+\frac{g+(g^2-h^2+gd+1)d}{h(1-d^2)}\right)^2}$$
$$+\frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}\frac{\sqrt{1-d^2}.\mu\cos\alpha}{(\sin\alpha-d)^2}\sqrt{1-\left(\frac{h^2-(g+d)^2}{h(1-d^2)}\sin\alpha+\frac{g+(g^2-h^2+gd+1)d}{h(1-d^2)}\right)^2}$$
$$+\frac{h(1-d^2)}{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}\frac{1-d\lambda}{(\sin\alpha-d)^2}\sqrt{1-\left(\frac{h^2-(g+d)^2}{h(1-d^2)}\sin\alpha+\frac{g+(g^2-h^2+gd+1)d}{h(1-d^2)}\right)^2}$$
$$+\frac{(P_2-P_3d+P_4d^2)\sin^2\alpha-(2P_2d-P_3(1+d^2)+2P_4d)\sin\alpha}{(\sin\alpha-d)^2}+\frac{P_2d^2-P_3d+P_4}{(\sin\alpha-d)^2}$$
$$-\frac{P_1-P_0d+(P_0-P_1d)\sin\alpha}{(\sin\alpha-d)^2}\sqrt{1-d^2}.\cos\alpha$$
$$=\frac{L_0(\sin\alpha-d)^8}{(1-d^2)^8}+\ldots.$$

En rapprochant cette égalité de (2), on voit que, pour les rendre identiques, on doit poser

(5) $$\frac{m}{r}=\frac{h^2-(g+d)^2}{h(1-d^2)};$$

(6) $$\frac{b}{r}=\frac{g+(g^2-h^2+gd+1)d}{h(1-d^2)};$$

(7) $$-\frac{a}{x_1}\sin A=\frac{\lambda-d}{1-d\lambda};$$

(8) $$-\frac{a}{x_1}\cos A=\frac{\mu\sqrt{1-d^2}}{1-d\lambda};$$

(9) $$\frac{am\sin A}{rx_1}=\frac{P_0-P_1d}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h\sqrt{1-d^2}};$$

(10) $$\frac{a(b-y_1)\sin A-ax_1\cos A}{rx_1}=\frac{P_1-P_0d}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h\sqrt{1-d^2}};$$

(11) $$\frac{am\cos A}{rx_1}=\frac{P_2-P_3d+P_4d^2}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h(1-d^2)};$$

(12) $$\frac{a(y_1-b)\cos A-ax_1\sin A-my_1}{rx_1}=\frac{2P_2d-P_3(1+d^2)+2P_4d}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h(1-d^2)};$$

(13) $$\frac{r_1^2-r^2-x_1^2-y_1(y_1-2b)-a^2}{2rx_1}=\frac{P_2d^2-P_3d+P_4}{1-d\lambda}\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h(1-d^2)}.$$

§ 4. En partant des formules que nous venons d'obtenir, il est facile de montrer que la détermination, au moyen des quantités

$$d,\ m,\ r,\ b$$

des valeurs de

$$A,\ a,\ r_1,\ x_1,\ y_1,$$

qui donnent la solution du problème, dépend d'un système d'équations dont l'une est du second degré et les autres du premier degré.

A cet effet nous allons d'abord déterminer les quantités auxiliaires

$$g,\ h,\ P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \lambda,\ \mu,$$

qui figurent dans nos formules.

En abordant ce problème, nous remarquons que les quantités g, h s'obtiennent immédiatement par les équations (5), (6), d'où il résulte

$$g = \frac{(1-d^2)\,m\,(md+b)}{r^2-(md+b)^2} - d;$$

$$h = \frac{(1-d^2)\,mr}{r^2-(md+b)^2};$$

Substituant ces valeurs de g et h dans la formule (4), on en déduira aisément les expressions des quantités

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$$

au moyen de λ et μ.

En effet, d'après cette formule, la différence entre le polynôme

$$P_2 + P_3 z + P_4 z^2$$

et l'expression

$$(P_0+P_1 z)\sqrt{z^2-1} - \left(z+\lambda+\mu\sqrt{z^2-1}\right)\sqrt{(z-g)^2-h^2}$$

ne doit renfermer que les puissances négatives de z, d'où il résulte que

$$P_2,\ P_3,\ P_4$$

sont les coefficients de z^0, z, z^2 dans les développement de cette expression suivant les puissances descendantes de z.

En vertu de cela, il vient

$$P_4 = P_1 - 1 - \mu;$$

$$P_3 = P_0 - \lambda + g(1+\mu);$$

$$P_2 = -\frac{1}{2}P_1 + \lambda g + \frac{(1+\mu)h^2}{2} + \frac{\mu}{2}.$$

Quant aux quantités

$$P_0,\ P_1,$$

on les déterminera, d'après (4), par la condition que le développement de l'expression

$$\left(z+\lambda+\mu\sqrt{z^2-1}\right)\sqrt{(z-g)^2-h^2} - (P_0+P_1 z)\sqrt{z^2-1},$$

ne contienne pas de termes en $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$. Cela nous donne deux équations, d'où l'on tire ces valeurs pour P_0, P_1:

$$P_0 = gh^2 + h^2\lambda + (h^2 - 1)g\mu;$$
$$P_1 = 4h^2g^2 + h^4 + 4h^2g\lambda + \left(4h^2g^2 + (h^2 - 1)^2\right)\mu.$$

En les portant dans les égalités précédentes, on trouve ces valeurs pour P_2, P_3, P_4:

$$P_2 = -\frac{1}{2}(4g^2 + h^2 - 1)h^2 - (2h^2 - 1)g\lambda - \frac{1}{2}(4g^2 + h^2 - 3)h^2\mu;$$
$$P_3 = (h^2 + 1)g + (h^2 - 1)\lambda + h^2g\mu;$$
$$P_4 = 4h^2g^2 + h^4 - 1 + 4gh^2\lambda + (4g^2 + h^2 - 2)h^2\mu.$$

Pour déterminer les quantités auxiliaires

$$\lambda, \mu$$

nous remarquons que les équations (7) et (9), (8) et (11), en les divisant l'une par l'autre, conduisent à ces deux équations

$$-\frac{m}{r} = \frac{P_0 - P_1 d}{\lambda - d} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h\sqrt{1 - d^2}},$$
$$-\frac{m}{r} = \frac{P_2 - P_3 d + P_4 d^2}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h(1 - d^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qui ne contiennent plus les quantités cherchées A, a, r_1, x_1, y_1, et qui, en portant la valeur $\frac{m}{r}$ donnée par (5), se réduisent à

$$(\lambda - d)\sqrt{h^2 - (g + d)^2} = (P_1 d - P_0)\sqrt{1 - d^2};$$
$$\mu\sqrt{1 - d^2}\sqrt{h^2 - (g + d)^2} = -P_2 + P_3 d - P_4 d^2.$$

Il est facile de voir que ces équations, si l'on y substitue les valeurs de h, g, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 que nous venons de trouver, se réduiront aux équations du premier degré en λ et μ. En résolvant ces équations par rapport à λ, μ et en portant les valeurs ainsi obtenues dans les expressions de P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, nous obtiendrons toutes les quantités auxiliaires, dont les quantités cherchées

$$A, a, r_1, x_1, y_1$$

dépendent d'après les équations (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13).

C'est la détermination de ces inconnues que nous allons aborder maintenant.

§ 5. Pour déterminer l'angle A, nous remarquons que les équations (7), (8), si l'on divise l'une par l'autre, donneront

$$\operatorname{tang} A = \frac{\lambda - d}{\mu\sqrt{1 - d^2}}.$$

Ainsi la tangente de l'angle A se trouve déterminée complètement. Quant aux deux angles qui ont cette tangente et diffèrent l'un de l'autre de 180°, nous prendrons pour A celui qui est compris entre 0 et 180°, en choisissant conformément à cela le sens suivant lequel la ligne $a = AA_1$, à l'intérieur de l'angle A_1AM, sera comptée positive.

Passant à la détermination des quantités a, x_1, y_1, nous remarquons que les mêmes équations (7), (8), si on les élève au carré et ajoute, donnent

$$\frac{a^2}{x_1{}^2} = \frac{(\lambda - d)^2 + (1 - d^2)\mu^2}{(1 - d\lambda)^2},$$

d'où il vient

$$\frac{a}{x_1} = \pm \frac{\sqrt{(\lambda - d)^2 + (1 - d^2)\mu^2}}{1 - d\lambda}.$$

Des deux signes on devra prendre ici celui qui correspond à la supposition que nous avons faite à l'égard de l'angle A. Comme cet angle est supposé être compris entre 0 et 180°, son sinus sera positif, et cela, d'après (7), ne peut avoir lieu que si le rapport

$$\frac{a}{x_1}$$

a un signe opposé à celui de

$$\frac{\lambda - d}{1 - d\lambda}.$$

On déterminera ainsi la valeur absolue et le signe du rapport

$$\frac{a}{x_1}.$$

Pour abréger, nous désignerons la valeur de ce rapport par f, de sorte que nous aurons

(14) $$\frac{a}{x_1} = f.$$

En posant encore, pour abréger,

$$\frac{r(P_1-P_0d)}{1-d\lambda}\,\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h\sqrt{1-d^2}}=N_1,$$

$$\frac{r[2P_2d-P_3(1+d^2)+2P_4d]}{1-d\lambda}\,\frac{\sqrt{h^2-(g+d)^2}}{h(1-d^2)}=N_2,$$

nous présenterons les équations (10), (12) sous la forme

$$\frac{a(b-y_1)\sin A-ax_1\cos A}{x_1}=N_1;$$

$$\frac{a(y_1-b)\cos A-ax_1\sin A-my_1}{x_1}=N_2.$$

De là, en posant d'après (14) $a=fx_1$, nous obtenons ces deux équations

(15) $$f(b-y_1)\sin A-fx_1\cos A=N_1;$$

(16) $$f(y_1-b)\cos A-fx_1\sin A-\frac{my_1}{x_1}=N_2.$$

qui serviront à déterminer x_1 et y_1.

En résolvant ces équations, on tire de la première d'entre elles

(17) $$y_1=b-\operatorname{cotang}A.x_1-\frac{N_1}{f\sin A};$$

et en portant cette valeur de y_1 dans la deuxième équation, on obtient une équation du second degré que voici:

$$x_1^2+\frac{(N_1-m)\cos A+N_2\sin A}{f}\,x_1+\frac{(fb\sin A-N_1)\,m}{f^2}=0.$$

Si l'on tire de cette équation la valeur de x_1 et qu'on la porte dans les formules (14), (17), on obtiendra les valeurs de x_1, y_1, qui représenteront la solution de notre problème, en considérant comme données les quantités r, m, b et $d=\sin\alpha_1$.

A chacune des racines de cette équation il correspondra une solution à part, et si cette équation n'admet pas de racines réelles, on conclura que, pour les valeurs considérées de d, r, m, b, le problème est impossible.

§ 6. Sans nous arrêter aux calculs que demande, d'après ce que nous venons de montrer, la solution de notre problème, nous allons examiner la relation qui existe entre ses deux solutions lorsqu'elles sont possibles. Cette relation donne, comme nous verrons, des changements que l'on peut faire dans la composition des parallélogrammes les plus simples sans altérer le degré de précision, avec laquelle ils réalisent un mouvement rectiligne.

Soient x_1', x_1'' les deux valeurs de x_1 tirées de l'équation ci-dessus et

$$y_1',\ y_1''$$
$$a',\ a''$$

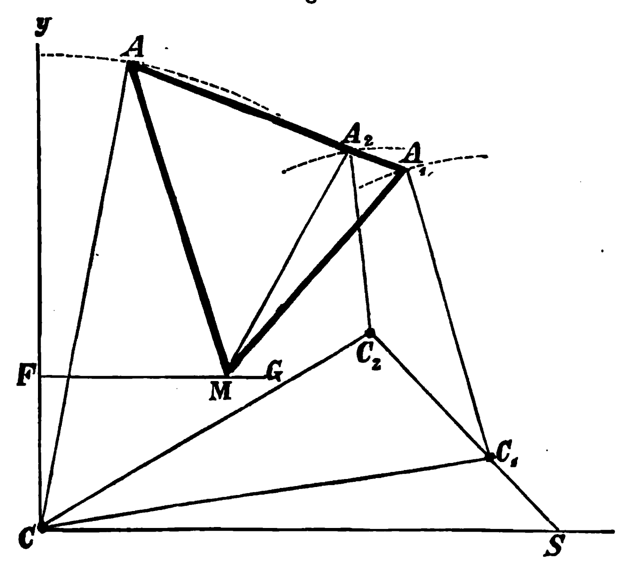
les valeurs correspondantes de y_1, a, les égalités

$$x_1 = x_1', \ y_1 = y_1', \ a = a'$$

appartenant à la solution représentée (fig. 2) par le point A_1 et le centre C_1 et celles-ci

$$x_1 = x_1'', \ y_1 = y_1'', \ a = a''$$

Fig. 2.



à la solution représentée par le point A_2 et le centre C_2.

Cela posé, nous aurons

$$a' = AA_1, \ a'' = AA_2,$$

et les équations (14), (15), (16) seront vérifiées par ces deux systèmes de valeurs:

$$x_1 = x_1', \ y_1 = y_1', \ a = a',$$
$$x_1 = x_1'', \ y_1 = y_1'', \ a = a'',$$

ce qui suppose les égalités suivantes:

(18) $$\frac{a'}{x_1'} = f; \ \frac{a''}{x_1''} = f;$$
$$f(b - y_1') \sin A - f x_1' \cos A = N_1;$$
$$f(b - y_1'') \sin A - f x_1'' \cos A = N_1;$$
$$f(y_1' - b) \cos A - f x_1' \sin A - \frac{m y_1'}{x_1'} = N_2;$$
$$f(y_1'' - b) \cos A - f x_1'' \sin A - \frac{m y_1''}{x_1''} = N_2;$$

Il vient de là

$$\frac{a'}{x_1'} = \frac{a''}{x_1''};$$

$$f(b - y_1')\sin A - fx_1'\cos A = f(b - y_1'')\sin A - fx_1''\cos A;$$

$$f(y_1' - b)\cos A - fx_1'\sin A - \frac{my_1'}{x_1'}$$
$$= f(y_1'' - b)\cos A - fx_1''\sin A - \frac{my_1''}{x_1''}.$$

et les deux dernières égalités se réduisent à

$$y_1'\sin A + x_1'\cos A = y_1''\sin A + x_1''\cos A,$$
$$y_1'\cos A - x_1'\sin A - \frac{m}{f}\frac{y_1'}{x_1'} = y_1''\cos A - x_1''\sin A - \frac{m}{f}\frac{y_1''}{x_1''},$$

ou bien, ce qui revient au même, à

$$\frac{y_1'' - y_1'}{x_1' - x_1''} = \operatorname{cotang} A;$$
$$(y_1' - y_1'')\cos A - (x_1' - x_1'')\sin A = \frac{m}{f}\left(\frac{y_1'}{x_1'} - \frac{y_1''}{x_1''}\right).$$

Comme d'après la première de ces égalités on trouve

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1' - x_1'' &= x_1'\frac{\dfrac{y_1''}{x_1''} - \dfrac{y_1'}{x_1'}}{1 + \dfrac{y_1''}{x_1''}\operatorname{tang} A}\operatorname{tang} A, \\ y_1' - y_1'' &= -x_1'\frac{\dfrac{y_1''}{x_1''} - \dfrac{y_1'}{x_1'}}{1 + \dfrac{y_1''}{x_1''}\operatorname{tang} A}, \end{aligned}\right.$$

on aura, en portant ces valeurs de $x_1' - x_1''$, $y_1' - y_1''$ dans la deuxième,

$$\left[fx_1' - m\left(1 + \frac{y_1''}{x_1''}\operatorname{tang} A\right)\cos A\right]\left(\frac{y_1''}{x_1''} - \frac{y_1'}{x_1'}\right) = 0,$$

et cette équation se décompose en deux, à savoir

$$\frac{y_1''}{x_1''} - \frac{y_1'}{x_1'} = 0,$$
$$fx_1' - m\left(1 + \frac{y_1''}{x_1''}\operatorname{tang} A\right)\cos A = 0.$$

Or, en vertu de (19), la première de ces équations suppose les égalités $x_1'' = x_1'$, $y_1'' = y_1'$. Donc, les deux solutions étant distinctes, les valeurs de

x_1', y_1', x_1'', y_1'' doivent vérifier la deuxième équation, laquelle, en remplaçant, d'après (18), f par $\frac{a'}{x_1'}$, se réduit à

$$a' - m\cos A - m\frac{y_1''}{x_1''}\sin A = 0.$$

Il vient de là

$$\frac{y_1''}{x_1''} = \frac{a' - m\cos A}{m\sin A},$$

et les mêmes raisonnements, en changeant seulement x_1', y_1', a' en x_1'', y_1'', a'' et inversement, donneront

$$\frac{y_1'}{x_1'} = \frac{a'' - m\cos A}{m\sin A}.$$

Nous remarquons maintenant que les rapports

$$\frac{y_1'}{x_1'},\ \frac{y_1''}{x_1''},\ \frac{y_1''-y_1'}{x_1'-x_1''}$$

représentent les tangentes des angles que font avec l'axe des x les droites CC_1, CC_2, C_2C_1 menées par les centres

$$C,\ C_1$$
$$C,\ C_2$$
$$C_2,\ C_1,$$

et que les rapports

$$\frac{a'' - m\cos A}{m\sin A},\ \frac{a' - m\cos A}{m\sin A},$$

où, d'après nos notations,

$$a'' = AA_2,\ a' = AA_1,\ m = AM,$$

représentent les cotangentes des angles AA_2M et AA_1M.

Donc les équations que nous avons trouvées expriment l'égalité entre les angles que font les droites CC_1, CC_2, C_2C_1 avec l'axe des x, ou bien avec la droite FG, qui lui est parallèle, et les compléments des angles que les droites AM, A_1M, A_2M font avec la ligne AA_1.

En vertu de cela, si l'on connaît un des deux points A_1, A_2 et le centre C_1 ou C_2 qui lui correspond, on trouvera facilement un autre avec le centre correspondant; car, d'après ce que nous avons montré, par chacun des points A_1, A_2, avec le centre correspondant, le triangle CC_1C_2 est complètement déterminé, et ce triangle donne l'inclinaison des lignes A_1M, A_2M à la ligne AA_1.

§ 7. Le passage que nous venons de signaler d'un des deux points A_1, A_2 à un autre, ces points décrivant, dans le mouvement considéré du triangle, des arcs infiniment petits, peu différents des arcs de cercle, peut être utile dans tous les cas, où l'on veut qu'un point du triangle décrive une courbe ayant avec un cercle plusieurs points communs, plus ou moins voisins l'un de l'autre.

En effet, il est facile de montrer que, les points A_1, A_2 et les centres C_1, C_2 étant tels qu'on ait

$$C_2SC = \frac{\pi}{2} - MAA_1,$$
$$C_2Cx = \frac{\pi}{2} - MA_1A,$$
$$C_1Cx = \frac{\pi}{2} - MA_2A,$$

la différence

$$AA_2 . A_1C_1^2 - AA_1 . A_2C_2^2,$$

pendant le mouvement considéré du triangle, ne changera point de valeur. Par suite, toutes les fois que l'une des deux distances A_1C_1, A_2C_2 reprend sa valeur primitive quelconque, l'autre sera dans le même cas.

Donc les points A_1, A_2 reviendront simultanément sur des cercles tracés des centres C_1, C_2 par certains rayons.

Pour montrer que la différence

$$AA_2 . A_1C_1^2 - AA_1 . A_2C_2^2$$

dans les suppositions admises, reste invariable, posons, comme auparavant,

$$MAA_1 = A,$$

et, en outre,

$$MA_1A = A_1,$$
$$MA_2A = A_2.$$

Les égalités précédentes se présenteront alors ainsi:

$$C_2SC = \frac{\pi}{2} - A;\ C_2Cx = \frac{\pi}{2} - A_1;\ C_1Cx = \frac{\pi}{2} - A_2.$$

En calculant d'après ces valeurs des angles C_2SC, C_2Cx, C_1Cx les angles du triangle C_1CC_2, nous obtenons

$$C_1CC_2 = C_2Cx - C_1Cx = A_2 - A_1;$$
$$CC_1C_2 = C_1Cx + C_2SC = \pi - A - A_2;$$
$$CC_2C_1 = \pi - C_2Cx - C_2SC = A + A_1.$$

Posant, pour abréger,

$$C_1C_2 = l,$$

on déduit de ces valeurs des angles les expressions suivantes pour les côtés CC_1, CC_2 du triangle:

$$CC_1 = \frac{\sin(A+A_1)}{\sin(A_2-A_1)}l; \quad CC_2 = \frac{\sin(A+A_2)}{\sin(A_2-A_1)}l.$$

Puis, par ces expressions, on trouve pour les coordonnées x_1', y_1', x_1'', y_1'' des centres C_1, C_2:

$$x_1' = CC_1 \cos C_1Cx = \frac{\sin(A+A_1)}{\sin(A_2-A_1)}\cos C_1Cx.l,$$

$$y_1' = CC_1 \sin C_1Cx = \frac{\sin(A+A_1)}{\sin(A_2-A_1)}\sin C_1Cx.l,$$

$$x_1'' = CC_2.\cos C_2Cx = \frac{\sin(A+A_2)}{\sin(A_2-A_1)}\cos C_2Cx.l,$$

$$y_1'' = CC_2.\sin C_2Cx = \frac{\sin(A+A_2)}{\sin(A_2-A_1)}\sin C_2Cx.l,$$

ce qui, en portant les valeurs ci-dessus des angles C_1Cx, C_2Cx, nous donne

$$x_1' = \frac{\sin(A+A_1)}{\sin(A_2-A_1)}\sin A_2.l; \quad y_1' = \frac{\sin(A+A_1)}{\sin(A_2-A_1)}\cos A_2.l;$$

$$x_1'' = \frac{\sin(A+A_2)}{\sin(A_2-A_1)}\sin A_1.l; \quad y_1'' = \frac{\sin(A+A_2)}{\sin(A_2-A_1)}\cos A_1.l.$$

D'autre part, en exprimant les côtés AA_1, AA_2 des triangles AA_1M, AA_2M par le côté $AM = m$, on trouve

$$AA_1 = \frac{\sin AMA_1}{\sin MA_1A}m; \quad AA_2 = \frac{\sin AMA_2}{\sin MA_2A}m,$$

ce qui, en portant les valeurs des angles $MA_1A = A_1$, $MA_2A = A_2$, $AMA_1 = \pi - A - A_1$, $AMA_2 = \pi - A - A_2$, se réduit à

$$AA_1 = \frac{\sin(A+A_1)}{\sin A_1}m; \quad AA_2 = \frac{\sin(A+A_2)}{\sin A_2}m.$$

Passant à la détermination des carrés des distances A_1C_1, A_2C_2, nous remarquons qu'on les obtiendra par la formule (1), en y prenant pour x_1, y_1 les valeurs que nous venons de trouver pour les coordonnées des centres C_1, C_2 et pour a les expressions ci-dessus de AA_1, AA_2.

En multipliant les valeurs de $A_1C_1^2$, $A_2C_2^2$ ainsi obtenues par ces expressions et en faisant la différence des produits, nous obtenons pour

$$AA_2.A_1C_1^2 - AA_1.A_2C_2^2$$

l'expression

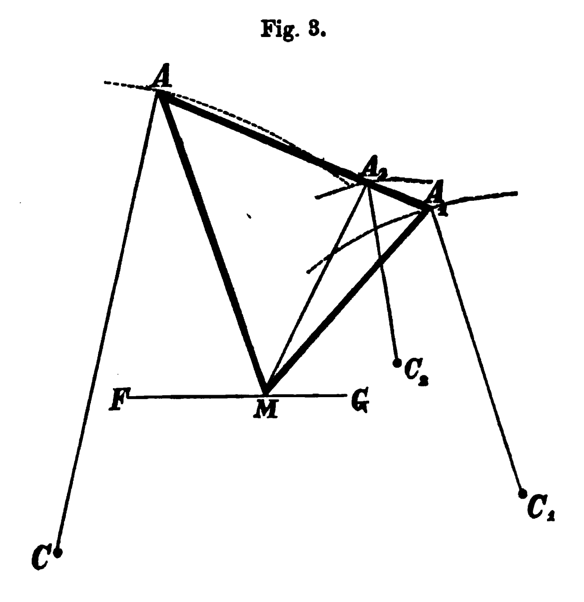
$$-\frac{\sin A \sin(A_2-A_1)}{\sin A_1 . \sin A_2} mr^2 - \frac{\sin(A+A_1)\sin(A+A_2)\sin(A+A_1+A_2)}{\sin A_1 \sin A_2 . \sin(A_2-A_1)} ml^2$$
$$+2\frac{\sin(A+A_1)\sin(A+A_2)}{\sin A_1 . \sin A_2} blm - \frac{\sin(A+A_1)\sin(A+A_2)\sin(A_1-A_2)\sin A}{\sin^2 A_1 . \sin^2 A_2} m^3,$$

qui ne renferme pas l'angle variable α et qui conservera, par suite, sa valeur pendant le mouvement considéré du triangle.

§ 8. D'après ce que nous avons montré relativement aux points qui dans le mouvement considéré du triangle reviennent simultanément sur les circonférences de certains cercles, on peut trouver en tout parallélogramme composé d'un triangle et de deux rayons un point qui décrive approximativement un arc de cercle, et cela avec le même degré de précision que celui, avec lequel le parallélogramme réalise un mouvement rectiligne.

En effet, soit donné (fig. 3) un parallélogramme composé du triangle

Fig. 3.



AA_1M et des rayons AC, A_1C_1 susceptibles de tourner autour des centres C, C_1. Soient ensuite: FG la droite, avec laquelle la courbe que décrit le sommet M doit avoir plusieurs points communs, et A_2, C_2 le point du triangle AA_1M et le centre qui lui correspond, déterminés, comme il a été montré, dans la supposition que le sommet M du triangle AA_1M se déplace sur la droite FG et le sommet A sur le cercle C.

Parmi les positions que prend le triangle AA_1M dans le mouvement du parallélogramme, celles pour lesquelles le sommet M se trouve sur la droite FG peuvent, évidemment, être considérées comme provenant du

mouvement, pendant lequel le sommet M se trouve toujours sur cette droite. Or nous avons vu que dans un pareil mouvement les points A_1, A_2 reviennent simultanément sur des circonférences tracées des centres C_1, C_2.

Donc, toutes les fois que le point M du parallélogramme viendra sur la droite FG, le point A_2 se trouvera sur une circonférence tracée du centre C_2 par un certain rayon; et, par conséquent, la courbe que décrit le point A_2 aura autant d'éléments communs avec un cercle que la courbe tracée par le sommet M en a avec la droite FG.

Comme dans le mouvement, où les sommets A, A_1 du triangle AA_1M se déplacent sur les cercles C, C_1, le sommet M et le point A_2 reviendront simultanément, le premier sur la droite FG, le second sur le cercle C_2, les positions du triangle AA_1M, dans le mouvement considéré actuellement, pour lesquelles le sommet M se trouve sur la droite FG, seront aussi les mêmes que dans le mouvement où le point A_2 est assujetti à se deplacer sur le cercle C_2 et un des points A, A_1 sur le cercle C ou C_1.

On voit de là que dans les mouvements des triangles AA_2M, A_2A_1M, considérés à part, les sommets

$$A,\ A_2,$$
$$A_2,\ A_1$$

se déplaçant sur les cercles

$$C,\ C_2$$
$$C_2,\ C_1,$$

le sommet M décrira une courbe dont les points d'intersection avec la droite FG seront les mêmes que pour la courbe qu'on obtiendrait, si les sommets A, A_1 du triangle AA_1M se déplaçaient sur les cercles C, C_1.

Cela nous montre que si l'on remplace, dans le parallélogramme donné, le triangle AA_1M par le triangle AA_2M, ou bien A_2A_1M, en remplaçant, conformément à cela, le rayon mobile A_1C_1 ou AC par le rayon A_2C_2, ni le nombre des points d'intersection avec la droite FG de la courbe que décrit le point M, ni la position de ces points ne seront pas changés.

20.

SUR LE RAPPORT
DE DEUX INTÉGRALES
ÉTENDUES AUX MÊMES VALEURS DE LA VARIABLE.

(TRADUIT PAR C. A. POSSÉ.)

Объ отношенiи двухъ интеграловъ,

распространенныхъ на однѣ и тѣ же величины перемѣнной.

(Приложенiе къ XLIV тому Записокъ Императорской Академiи Наукъ, № 2, 1883 г.)

(Lu le 23 décembre 1882.)

Sur le rapport de deux intégrales étendues aux mêmes valeurs de la variable.

§ 1. Le rapport de deux intégrales

$$\frac{\int Yu\,dx}{\int Yv\,dx},$$

étendues aux mêmes valeurs de la variable x et renfermant sous leurs signes des différentielles ayant un facteur commun Y éprouve des variations plus ou moins grandes, quand on change la valeur de ce facteur.

Nous allons montrer maintenant comment se déterminent les limites que ces variations ne peuvent dépasser, lorsque le facteur commun Y conserve la forme d'un polynôme de degré non supérieur à n. Nous supposerons en même temps que le polynôme Y et la fonction v conservent leurs signes dans les limites de l'intégration, ce qui est la condition nécessaire pour que le rapport

$$\frac{\int Yu\,dx}{\int Yv\,dx}$$

ne puisse prendre toutes le valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour simplifier nos formules nous supposerons encore que les intégrales

$$\int Yu\,dx, \quad \int Yv\,dx$$

sont réduites de la sorte que leurs limites soient $x = -1$ et $x = +1$ et que le signe conservé par le polynôme Y et la fonction v dans les limites d'intégration soit le signe $+$.

§ 2. En abordant la détermination des valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yudx}{\int_{-1}^{+1} Yvdx},$$

dans les conditions posées ci-dessus nous allons démontrer que la plus grande et la plus petite valeur de ce rapport correspondent aux valeurs du polynôme Y qui satisfont à l'équation suivante:

$$Y = (1+x)^{\rho}(1-x)^{\rho_0} Z^2,$$

où $\rho = 0$ ou 1; $\rho_0 = 0$ ou 1, Z étant un polynôme entier d'un certain degré.

Pour le démontrer, soit

$$Y = Y_0$$

la valeur du polynôme Y pour laquelle le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yudx}{\int_{-1}^{+1} Yvdx}$$

atteint sa limite supérieure ou inférieure dans les conditions posées.

Le polynôme Y_0 ne changeant pas de signe dans l'intervalle de $x = -1$ à $x = +1$, toutes les racines de l'équation

$$Y_0 = 0$$

contenues entre -1 et $+1$ doivent être racines multiples et leurs degrés de multiplicité doivent être pairs.

Désignant ces racines par

$$x_1,\ x_2, \ldots . x_i,$$

et leurs degrés de multiplicité par

$$2\mu_1,\ 2\mu_2, \ldots . 2\mu_i$$

et supposant que

$$\nu,\ \nu_0$$

désignent les nombres des racines de l'équation

$$Y_0 = 0$$

égales à

$$-1,\ +1,$$

nous remarquons que le produit

$$(x-x_1)^{2\mu_1}(x-x_2)^{2\mu_2}\dots(x-x_i)^{2\mu_i}(1+x)^{\nu}(1-x)^{\nu_0}$$

représente un polynôme de degré non supérieur à celui de Y_0, que ce polynôme, comme le polynôme Y_0 lui-même, conserve le signe $+$ dans l'intervalle de $x=-1$ à $x=+1$ et que son rapport à Y_0 reste fini pour les valeurs de x entre $x=-1$ et $x=+1$.

D'après cela, U étant déterminé par l'égalité

$$(1)\qquad U=(x-x_1)^{2\mu_1}(x-x_2)^{2\mu_2}\dots(x-x_i)^{2\mu_i}(1+x)^{\nu}(1-x)^{\nu_0},$$

et α étant un infiniment petit, l'expression

$$Y_0\pm\alpha U$$

représentera un polynôme du même degré que Y_0 qui conserve comme celui-ci le signe $+$ entre $x=-1$ et $x=+1$.

Par conséquent la valeur du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yudx}{\int_{-1}^{+1} Yvdx}$$

pour

$$Y=Y_0$$

ne pourra être ni la plus grande, ni la plus petite dans nos suppositions, si le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1}(Y_0\pm\alpha U)udx}{\int_{-1}^{+1}(Y_0\pm\alpha U)vdx}$$

avec l'un des deux signes $\pm$ de α est supérieur à

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Y_0udx}{\int_{-1}^{+1} Y_0vdx}$$

et avec l'autre—inférieur à cette quantité.

Or pour que cela soit impossible pour α infiniment petit, la dérivée par rapport à α de l'expression

$$\frac{\int_{-1}^{+1}(Y_0 \pm \alpha U)\, u dx}{\int_{-1}^{+1}(Y_0 \pm \alpha U)\, v dx}$$

pour $\alpha = 0$ doit être nulle, comme on le sait, ce qui nous donne l'équation suivante:

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Y_0 v dx \cdot \int_{-1}^{+1} U u dx - \int_{-1}^{+1} Y_0 u dx \cdot \int_{-1}^{+1} U v dx}{\left[\int_{-1}^{+1} Y_0 v dx\right]^2} = 0.$$

Les polynômes Y_0, U et la fonction v restant, d'après ce qui précède, positives entre $x = -1$ et $x = +1$, les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} Y_0 v dx, \quad \int_{-1}^{+1} U v dx$$

ont des valeurs différentes de zéro, et dans ce cas il résulte de l'égalité précédente l'équation que voici:

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Y_0 u dx}{\int_{-1}^{+1} Y_0 v dx} = \frac{\int_{-1}^{+1} U u dx}{\int_{-1}^{+1} U v dx}.$$

D'où l'on voit que la plus grande et la plus petite des valeurs du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Y u dx}{\int_{-1}^{+1} Y v dx}$$

correspondent à

$$Y = U,$$

U étant déterminé d'après (1) par la formule

$$U = (x - x_1)^{2\mu_1}(x - x_2)^{2\mu_2} \ldots (x - x_l)^{2\mu_l}(1 + x)^{\nu}(1 - x)^{\nu_0}$$

Désignant par σ, σ_0 les quotients et par ρ, ρ_0 les restes des divisions de ν, ν_0 par 2, nous trouvons

$$\nu = 2\sigma + \rho; \ \nu_0 = 2\sigma_0 + \rho_0,$$

où $\rho = 0$ ou 1, $\rho_0 = 0$ ou 1. En vertu de cela l'expression $Y = U$ indiquée ci-dessus qui donne les valeurs limites du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yu dx}{\int_{-1}^{+1} Yv dx},$$

se réduit à la forme

$$Y = Z^2 (1 + x)^\rho (1 - x)^{\rho_0},$$

où

$$Z = (x - x_1)^{\mu_1} (x - x_2)^{\mu_2} \dots (x - x_i)^{\mu_i} (1 + x)^\sigma (1 - x)^{\sigma_0}.$$

On voit d'après cela que les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yu dx}{\int_{-1}^{+1} Yv dx}$$

dans le cas où le polynôme Y de degré non supérieur à n conserve le signe $+$ entre $x = -1$ et $x = +1$, sont égales aux valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 (1 + x)^\rho (1 - x)^{\rho_0} u dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 (1 + x)^\rho (1 - x)^{\rho_0} v dx}$$

où $\rho = 0$ ou 1, $\rho_0 = 0$ ou 1 et Z un polynôme pour lequel le degré de l'expression

$$Z^2 (1 + x)^\rho (1 - x)^{\rho_0}$$

ne surpasse pas n.

Posant pour abréger

$$(1 + x)^\rho (1 - x)^{\rho_0} u = \theta_0(x),$$

$$(1 + x)^\rho (1 - x)^{\rho_0} v = \theta(x),$$

nous allons nous occuper maintenant de la recherche du polynôme Z de degré donné pour lequel le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx}$$

atteint sa plus grande ou plus petite valeur.

§ 3. Remarquant que le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx}$$

ne change pas de valeur, lorsqu'on multiplie le polynôme Z par un facteur constant quelconque, nous concluons d'une part que le polynôme cherché contient un facteur constant arbitraire et d'autre part que par un choix convenable de ce facteur ou pourra assujetir le polynôme Z à satisfaire l'équation

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx = 1.$$

D'ailleurs cette équation ayant lieu, le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx}$$

se réduit à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx,$$

donc, le polynôme cherché Z pour une certaine valeur du facteur constant représentera la solution du problême suivant des *maxima et minima relatifs:*

«Parmi tous les polynômes d'un degré donné et satisfaisant à l'équation

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx = 1$$

trouver ceux qui donnent à l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx$$

la plus grande ou la plus petite valeur».

Multipliant par des constantes arbitraires les polynômes qui représentent les solutions de ce problème, nous obtiendrons les expressions générales des polynômes pour lesquels le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx}$$

atteint ses valeurs extrêmes. Quant au polynôme Z qui fournit la plus grande ou la plus petite valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx,$$

sous la condition

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx = 1,$$

sa recherche présente un cas particulier du problème dont il était question dans nôtre Mémoire, sous le titre: *Sur les maxima et minima des sommes, composées des valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées* *).

Appliquant aux intégrales

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx, \quad \int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx$$

ce que nous avons donné en général à l'égard des sommes et changeant le signe du facteur auxiliaire λ, nous trouvons que le polynôme Z de degré $m-1$, qui procure le maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx$$

sous la condition

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx = 1,$$

*) Voir, T. II, pag. 3—40.

se détermine par l'égalité suivante:

Le produit $Z\int_{-1}^{+1}\frac{\theta_0(z)-\lambda\theta(z)}{x-z}dz$ *aux termes en* x^{-m} *près inclusivement est égal à une fonction entière.*

Cette égalité n'étant pas altérée par l'introduction d'un facteur constant quelconque dans le polynôme Z, l'expression générale de Z qui satisfait à cette égalité renfermera un facteur constant arbitraire.

La valeur de ce facteur se trouve à l'aide de l'égalité

$$\int_{-1}^{+1} Z^2\theta(x)\,dx = 1$$

dans la solution du problême des *maxima et minima relatifs* indiqué plus haut; en passant de cette expression du polynôme Z à son expression générale qui donne les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2\theta_0(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2\theta(x)\,dx},$$

on devra introduire de nouveau d'après les remarques précédentes un facteur constant arbitraire dans l'expression du polynôme Z.

§ 4. Désignant par V la fonction entière qu'on obtient en développant l'expression

$$Z\int_{-1}^{+1}\frac{\theta_0(z)-\lambda\theta(z)}{x-z}dz$$

suivant les puissances descendantes de x et par B_1, B_2.... les coefficients des puisances négatives de x nous aurons, d'après ce qu'on a vu à l'égard du polynôme cherché Z, l'égalité suivante

$$Z\int_{-1}^{+1}\frac{\theta_0(z)-\lambda\theta(z)}{x-z}dz = V+\frac{B_1}{x^{m+1}}+\frac{B_2}{x^{m+2}}+\ldots.;$$

d'où l'on trouve en divisant par Z,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\theta_0(z)-\lambda\theta(z)}{x-z}dz = \frac{V}{Z}+\frac{B_1}{Zx^{m+1}}+\frac{B_2}{Zx^{m+2}}+\ldots.$$

On voit d'après cette égalité que la fraction

$$\frac{V}{Z}$$

représente la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\theta_0(s) - \lambda\theta(s)}{x - s} ds$$

exacte jusqu'au terme dont le degré est égal à celui de $\frac{1}{Zx^m}$ inclusivement, ce qui n'est possible, comme on le sait, que dans le cas où dans la série des fractions réduites de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\theta_0(s) - \lambda\theta(s)}{x - s} ds,$$

qu'on obtient en la développant en fraction continue, se trouve une fraction égale à

$$\frac{V}{Z},$$

et la fraction réduite suivante ait un dénominateur de degré supérieur à m, ce qui suppose l'absence de la fraction réduite au dénominateur de degré m, car le polynôme cherché Z est de degré $m - 1$.

Cela posé, il est facile de déduire dans chaque cas particulier l'équation à laquelle doit satisfaire la quantité auxiliaire λ et de trouver l'expression des divers polynômes Z pour les différentes valeurs de λ qui satisfont à cette équation. Quant au choix parmi ces valeurs de λ de celles qui donnent la solution de nôtre problême, il ne présente pas de difficulté; car, comme on va le voir tout de suite, λ est la valeur du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\, dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\, dx}.$$

Pour nous en convaincre, remarquons que, d'après ce qui précède, dans la série de réduites obtenues par le développement de l'expression

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\theta_0(s) - \lambda\theta(s)}{x - s} ds$$

en fraction continue, la fraction $\frac{V}{Z}$ est suivie par une fraction ayant un dénominateur de degré supérieur à celui de Zx.

Or dans ce cas, comme il est connu, aura lieu l'égalité suivante

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 (\theta_0(x) - \lambda\theta(x))\, dx = 0,$$

d'où il résulte

$$\lambda = \frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\, dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\, dx}.$$

On voit d'après cela, que dans la résolution de nôtre problême, exigeant que le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\, dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\, dx}$$

soit le plus grand ou le plus petit possible, il faut adopter pour λ la plus grande ou la plus petite de ses valeurs pour lesquelles dans la suite des fractions réduites de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\theta_0(z) - \lambda\theta(z)}{x - z}\, dz,$$

il en manque celle dont le dénominateur est de degré m.

§ 5. L'équation, qui détermine les valeurs de λ, et l'expression du polynôme correspondant Z s'obtiennent facilement au moyen du développement de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\theta_0(z) - \lambda\theta(z)}{x - z}\, dz$$

en fraction continue. Ayant trouvé la réduite de ce développement au dénominateur de degré m, faisons d'abord disparaître dans les termes de cette fraction les diviseurs contenant la quantité λ (ce qu'on peut faire toujours en multipliant le numérateur et le dénominateur par une certaine fonction de λ). Le dénominateur prendra la forme

$$F_0(\lambda)\, x^m + F_1(\lambda)\, x^{m-1} + F_2(\lambda)\, x^{m-2} + \ldots,$$

où

$$F_0(\lambda),\ F_1(\lambda),\ F_2(\lambda), \ldots$$

désignent des fonctions entières de λ.

Multipliant cette formule par une constante arbitraire, nous trouvons l'expression

(2) $$CF_0(\lambda)x^m + CF_1(\lambda)x^{m-1} + CF_2(\lambda)x^{m-2} + \ldots ,$$

qui embrasse tous les polynômes de degré non supérieur à m qui, étant multipliés par

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\theta_0(z) - \lambda\theta(z)}{x - z}\, dz,$$

donnent un produit qui se réduit à une fonction entière aux termes en x^{-m} près inclusivement. Remarquant que le polynôme cherché jouit de cette propriété même, nous concluons qu'il doit être représenté par la formule (2); or, le polynôme Z étant de degré non supérieur à $m - 1$, le terme en x^m dans cette formule appliquée à la détermination de Z doit disparaître, ce qui entraîne l'équation

(3) $$F_0(\lambda) = 0.$$

En vertu de cette équation, d'après ce qui précède, on obtient pour le polynôme cherché l'expression suivante:

(4) $$Z = CF_1(\lambda)x^{m-1} + CF_2(\lambda)x^{m-2} + \ldots .$$

En déterminant la plus grande et la plus petite racine de l'équation

$$F_0(\lambda) = 0,$$

nous trouverons la plus grande et la plus petite valeur du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\, dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\, dx},$$

Z étant un polynôme de degré $m - 1$. Les expressions de Z pour lesquelles ce rapport atteint ses valeurs extrêmes sont données par la formule (4), quand on y remplace λ par la plus grande et la plus petite racine de l'équation (3).

§ 6. Nous allons nous occuper maintenant d'un cas particulier, où les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx}$$

et les valeurs correspondantes du polynôme Z s'obtiennent de la manière la plus simple d'après ce qui a été exposé. Ce cas aura lieu lorsque

$$\theta_0(x) = x\theta(x).$$

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\theta_0(z) - \lambda\theta(z)}{x - z}\,dx$$

se réduit dans ce cas à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-\lambda)\,\theta(z)}{x - z}\,dz;$$

or, en considérant la dernière intégrale comme limite de la somme

$$\sum \frac{(z_i - \lambda)\,\theta(z_i)}{x - z_i}(z_{i+1} - z_i),$$

nous trouverons, en vertu de ce que nous avons montré dans le Mémoire sous le titre «*Sur les fractions continues*» *), que le dénominateur de la m-ième réduite de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-\lambda)\,\theta(z)}{x - z}\,dz$$

s'exprime á l'aide de $\psi_{m+1}(x)$, $\psi_m(x)$ c'est-à-dire à l'aide des dénominateurs de la $(m+1)$-ième et m-ième réduites de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\theta(z)}{x - z}\,dz,$$

*) Voir T. I, pag. 203—230.

par la formule

(5) $$\frac{\psi_m(\lambda)\psi_{m+1}(x) - \psi_{m+1}(\lambda)\psi_m(x)}{x-\lambda}.$$

Les fonctions $\psi_{m+1}(x)$, $\psi_m(x)$ étant respectivement de degrés $m+1$, m, le terme le plus élévé du polynôme représenté par cette formule sera de la forme

$$H\psi_m(\lambda).x^m,$$

et par conséquent dans le cas considéré l'équation qui détermine la valeur de λ sera:

$$\psi_m(\lambda)=0.$$

D'après ce qui a été démontré dans le § précédent la plus grande et la plus petite racine de cette équation donneront les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 x\theta(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\,dx}.$$

Pour déterminer les valeurs correspondantes du polynôme Z, multiplions d'après le § 5 la formule (5) par une constante arbitraire C et prenons pour λ les deux racines nommées ci-dessus de l'équation $\psi_m(\lambda)=0$.

On aura ainsi pour le polynôme cherché Z l'expression suivante:

$$Z = C.\frac{-\psi_{m+1}(\lambda)\psi_m(x)}{x-\lambda}$$

qui peut être représentée par

$$Z = C_0\frac{\psi_m(x)}{x-\lambda},$$

en posant

$$C_0 = -C\psi_{m+1}(\lambda).$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$\theta(x)=1,$$

les dénominateurs

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots.\ \psi_m(x), \ldots.$$

de réduites de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\theta(z)\,dz}{x-z} = \int_{-1}^{+1}\frac{dz}{x-z}$$

se réduisent, comme on sait, aux fonctions de Legendre

$$X_1,\ X_2, \ldots .\ X_m, \ldots .$$

Par conséquent la plus grande et la plus petite racine de l'équation

$$X_m = 0$$

représentent les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 x dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 dx},$$

Z étant un polynôme de degré $m - 1$. En faisant dans la formule

$$Z = \frac{C_0 X_m}{x - \lambda}$$

λ égal à ces racines, nous aurons les expressions des polynômes pour lesquels ce rapport atteint ces valeurs extrêmes.

§ 7. Après avoir montré comment se déterminent les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta_0(x)\, dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\, dx},$$

Z étant un polynôme de degré donné, revenons maintenant à nôtre problême de la recherche du maximum et du minimum du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yu dx}{\int_{-1}^{+1} Yv dx},$$

Y étant un polynôme de degré n et conservant le signe $+$ entre $x = -1$ et $x = +1$. Ces valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yu dx}{\int_{-1}^{+1} Yv dx},$$

comme on l'a vu dans le § 2, seront égales aux limites que le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0} u\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0} v\,dx}$$

ne peut dépasser, lorsque $\rho = 0$ ou 1, $\rho_0 = 0$ ou 1, Z étant un polynôme de degré non supérieur à $\frac{n-\rho-\rho_0}{2}$. Désignant par $E\frac{n-\rho-\rho_0}{2}$ le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n-\rho-\rho_0}{2}$ et remarquant que l'expression générale d'un polynôme de degré $E\frac{n-\rho-\rho_0}{2}$ renferme comme cas particuliers les polynômes de tous les degrés inférieurs, nous trouverons ces limites d'après ce qu'on a vu dans les §§ 2 et 3, en posant

$$\theta_0(x) = (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0} u, \quad \theta(x) = (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0} v,$$

(6) $$m - 1 = E\frac{n-\rho-\rho_0}{2},$$

et en faisant à l'égard des nombres ρ, ρ_0 les 4 suppositions suivantes:

1) $\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$
2) $\rho = 1, \quad \rho_0 = 0,$
3) $\rho = 0, \quad \rho_0 = 1,$
4) $\rho = 1, \quad \rho_0 = 1.$

Les limites entre lesquelles seront renfermées les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0} u\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0} v\,dx}$$

pour ces valeurs des ρ, ρ_0 et les valeurs correspondantes de $m-1$, seront les limites du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yu\,dx}{\int_{-1}^{+1} Yv\,dx},$$

le polynôme Y étant de degré non supèrieur à n et conservant le signe $+$ entre $x = -1$ et $x = +1$.

§ 8. Nous allons montrer maintenant comment ces limites se trouvent dans un cas singulièrement simple, savoir, quand $u = xv$. Pour une telle valeur de u, d'après § 6, les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2 (1+x)^{\rho} (1-x)^{\rho_0} u\,dx}{\int_{-1}^{+1} Z^2 (1+x)^{\rho} (1-x)^{\rho_0} v\,dx},$$

pour un polynôme Z de degré $m-1$, seront égales à la plus grande et la plus petite racine de l'équation

$$\psi_m(\lambda) = 0,$$

$\psi_m(x)$ étant le dénominateur de la m-ième réduite de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1+z)^{\rho} (1-z)^{\rho_0} u\,dz}{x-z},$$

qu'on obtient par le développement de cette intégrale en fraction continue. Pour trouver les valeurs extrêmes de ce rapport, qui sont d'après ce qui précède les limites du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yxu\,dx}{\int_{-1}^{+1} Yu\,dx},$$

lorsque le polynôme Y est de degré non supérieur à n et reste positif entre $x = -1$ et $x = +1$, nous devons considérer 4 hypothèses à l'égard des nombre ρ, ρ_0:

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 0,$$

$$\rho = 0, \quad \rho_0 = 1,$$

$$\rho = 1, \quad \rho_0 = 1;$$

en leur faisant correspondre les valeurs suivantes de m:

(7) $$m_1 = \mathrm{E}\frac{n+2}{2}, \quad m_2 = \mathrm{E}\frac{n+1}{2}, \quad m_3 = \mathrm{E}\frac{n+1}{2}, \quad m_4 = \mathrm{E}\frac{n}{2}.$$

Désignant par

$$\psi_m^{(1)}(x), \ \psi_m^{(2)}(x), \ \psi_m^{(3)}(x), \ \psi_m^{(4)}(x)$$

les fonctions auxquelles se réduit la fonction $\psi_m(x)$ pour les valeurs précédentes de ρ, ρ_0, nous remarquons que les plus grandes et les plus petites des racines des équations

(8) $$\psi^{(1)}_{m_1}(\lambda)=0,\ \psi^{(2)}_{m_2}(\lambda)=0,\ \psi^{(3)}_{m_3}(\lambda)=0,\ \psi^{(4)}_{m_4}(\lambda)=0$$

seront égales aux valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Z^2(1+x)^{\rho}(1-x)^{\rho_0}xudx}{\int_{-1}^{+1} Z^2(1+x)^{\rho}(1-x)^{\rho_0}udx},$$

et parmi celles-ci la plus grande et la plus petite seront les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yxudx}{\int_{-1}^{+1} Yudx}$$

dans les conditions posées.

Passant à la détermination des fonctions

$$\psi^{(1)}_m(x),\ \psi^{(2)}_m(x),\ \psi^{(3)}_m(x),\ \psi^{(4)}_m(x)$$

pour différentes valeurs de m, nous remarquons d'abord que la première entre elles

$$\psi^{(1)}_m(x),$$

correspondante à

$$\rho=0,\quad \rho_0=0,$$

se trouvera à l'aide du développement de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{u}{x-z}\,dz$$

en fraction continue, cette fonction étant comme on l'a vu le dénominateur de la m-me réduite.

D'après la formule (5), en y faisant $\lambda=\mp 1$ et remplaçant $\psi_m(x)$, $\psi_{m+1}(x)$ par $\psi^{(1)}_m(x)$, $\psi^{(1)}_{m+1}(x)$, nous trouverons les expressions suivantes des fonctions $\psi^{(2)}_m(x)$, $\psi^{(3)}_m(x)$ qu'on détermine à l'aide du developpement des intégrales

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1+z)\,udz}{x-z},\quad \int_{-1}^{+1}\frac{(1-z)\,udz}{x-z}dz$$

en fractions continues:

$$(9)\qquad \psi_m^{(2)}(x)=\frac{\psi_m^{(1)}(-1)\,\psi_{m+1}^{(1)}(x)-\psi_{m+1}^{(1)}(-1)\,\psi_m^{(1)}(x)}{x+1},$$

$$(10)\qquad \psi_m^{(3)}(x)=\frac{\psi_m^{(1)}(1)\,\psi_{m+1}^{(1)}(x)-\psi_{m+1}^{(1)}(1)\,\psi_m^{(1)}(x)}{x-1}.$$

Par la même formule, en y remplaçant $\psi_m(x)$, $\psi_{m+1}(x)$ par $\psi_m^{(3)}(x)$, $\psi_{m+1}^{(3)}(x)$ et posant $\lambda=1$, nous trouverons l'expression suivante de la fonction $\psi_m^{(4)}(x)$ qui se détermine par le développement de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-z)(1+z)u}{x-z}\,dz,$$

à l'aide de la fonction $\psi_m^{(3)}(x)$ déterminée par le développement de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-z)u}{x-z}\,dz,$$

à savoir

$$\psi_m^{(4)}(x)=\frac{\psi_m^{(3)}(-1)\,\psi_{m+1}^{(3)}(x)-\psi_{m+1}^{(3)}(-1)\,\psi_m^{(3)}(x)}{x+1}.$$

En substituant dans la dernière égalité les expressions des fonctions $\psi_m^{(3)}(x)$, $\psi_{m+1}^{(3)}(x)$ tirées de (10), nous trouverons qu'elle se réduit à la suivante

$$(11)\qquad \psi_m^{(4)}(x)=\frac{L\psi_{m+2}^{(1)}(x)-M\psi_{m+1}^{(1)}(x)+N\psi_m^{(1)}(x)}{x^2-1},$$

où

$$L=\frac{\psi_{m+1}^{(1)}(1)}{2}\Big[\psi_{m+1}^{(1)}(1)\psi_m^{(1)}(-1)-\psi_m^{(1)}(1)\psi_{m+1}^{(1)}(-1)\Big],$$

$$M=\frac{\psi_{m+1}^{(1)}(1)}{2}\Big[\psi_{m+2}^{(1)}(1)\psi_m^{(1)}(-1)-\psi_m^{(1)}(1)\psi_{m+2}^{(1)}(-1)\Big],$$

$$N=\frac{\psi_{m+1}^{(1)}(1)}{2}\Big[\psi_{m+2}^{(1)}(1)\psi_{m+1}^{(1)}(-1)-\psi_{m+1}^{(1)}(1)\psi_{m+2}^{(1)}(-1)\Big].$$

C'est ainsi qu'on trouvera toutes les fonctions qui figurent dans l'équation (8). Quant aux nombres

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,$$

qui déterminent les degrés de ces équations, on trouve d'après (7) en posant

$$n=2l,$$

les egalités

$$m_1=l+1;\ m_2=l;\ m_3=l;\ m_4=l,$$

et posant

$$n=2l-1,$$

on aura

$$m_1 = l;\ m_2 = l;\ m_3 = l;\ m_4 = l - 1.$$

§ 9. Dans le cas particulier où

$$u = 1,$$

les fonctions

$$\psi_1^{(1)}(x),\ \psi_2^{(1)}(x),\ \psi_3^{(1)}(x),\ldots,$$

représentant les dénominateurs des fractions réduites du développement de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{x-z}$$

en fraction continue, se réduisent, comme il a été dejà remarqué dans le § 6, aux fonctions de Legendre

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ldots;$$

et par suite dans le cas considéré nous aurons

$$\psi_m^{(1)}(x) = X_m,\ \psi_{m+1}^{(1)}(x) = X_{m+1},\ \psi_{m+2}^{(1)}(x) = X_{m+2};$$

en vertu des proprietés des fonctions de Legendre on aura dans ce cas

$$\psi_m^{(1)}(1) = 1,\ \psi_{m+1}^{(1)}(1) = 1,\ \psi_{m+2}^{(1)}(1) = 1,$$
$$\psi_m^{(1)}(-1) = \psi_{m+2}^{(1)}(-1) = (-1)^m;\ \psi_{m+1}^{(1)}(-1) = -(-1)^m;$$

d'après cela les équations (9), (10) et (11) nous donnent

$$\psi_m^{(2)}(x) = (-1)^m \frac{X_{m+1} + X_m}{x+1};$$
$$\psi_m^{(3)}(x) = \frac{X_{m+1} - X_m}{x-1};$$
$$\psi_m^{(4)}(x) = (-1)^m \frac{X_{m+2} - X_m}{x^2-1}.$$

Remarquant d'ailleurs que d'après les propriétés des fonctions de Legendre

$$X_{m+2} = \frac{2m+3}{m+2}\, xX_{m+1} - \frac{m+1}{m+2} X_m,$$

nous trouvons que la dernière des formules précédentes conduit à l'expression suivante de la fonction $\psi_m^{(4)}(x)$:

$$\psi_m^{(4)}(x) = (-1)^m \frac{2m+3}{m+2} \frac{X_{m+1}\, x - X_m}{x^2-1}.$$

Il en suit d'après le § 8 que les valeurs extrêmes du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yxdx}{\int_{-1}^{+1} Ydx},$$

le polynôme Y restant positif entre $x = -1$ et $x = +1$, se trouveront au moyen des équations

$$(12)\quad \begin{cases} \psi^{(1)}_{m_1}(x) = X_{l+1} = 0, \\ \psi^{(2)}_{m_2}(x) = (-1)^l \frac{X_{l+1} + X_l}{x+1} = 0, \\ \psi^{(3)}_{m_3}(x) = \frac{X_{l+1} - X_l}{x-1} = 0, \\ \psi^{(4)}_{m_4}(x) = (-1)^l \frac{2l+3}{l+2} \frac{X_{l+1}x - X_l}{x^2-1} = 0, \end{cases}$$

lorsque le degré de Y n'est pas supérieur à $2l$, et au moyen des équations

$$(13)\quad \begin{cases} \psi^{(1)}_{m_1}(x) = X_l = 0, \\ \psi^{(2)}_{m_2}(x) = (-1)^l \frac{X_{l+1} + X_l}{x+1} = 0, \\ \psi^{(3)}_{m_3}(x) = \frac{X_{l+1} - X_l}{x-1} = 0, \\ \psi^{(4)}_{m_4}(x) = (-1)^{l-1} \frac{2l+1}{l+1} \frac{X_l x - X_{l-1}}{x^2-1} = 0, \end{cases}$$

lorsque le degré de Y n'est par supérieur à $2l - 1$.

§ 10. Au moyen de ces équations nous trouverons la limite supérieure du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yxdx}{\int_{-1}^{+1} Ydx},$$

en déterminant la plus grande quantité qui satisfait à une équation quelconque parmi les équations (12) ou (13), selon que la limite du degré du polynôme Y est égale à $2l$ ou à $2l - 1$.

Cela se fait facilement en vertu des propriétés des fonctions de Legendre.

La fonction de Legendre X_l admet toujours, comme on le sait, des valeurs de signes contraires pour deux racines consécutives de l'équation

$$X_{l+1} = 0,$$

donc, il est certain que dans chacun des l intervalles entre ces dernières se trouvent des racines des équations de degré l

$$\frac{X_{l+1}+X_l}{x+1}=0,\ \frac{X_{l+1}-X_l}{x-1}=0,\ \frac{X_{l+1}x-X_l}{x^2-1}=0.$$

D'où l'on voit que toutes les racines des équations précédentes sont plus petites que la plus grande racine de l'équation

$$X_{l+1}=0;$$

par conséquent c'est cette dernière racine qui représente la plus grande des quantités qui satisfont à l'une quelconque des équations (12).

En appliquant les mêmes raisonnements aux équations

$$X_l=0,\ \frac{X_l x-X_{l-1}}{x^2-1}=0,$$

nous nous convaincons de ce que toutes les racines de l'équation

$$\frac{X_l x-X_{l-1}}{x^2-1}=0$$

seront moindres que la plus grande racine de l'équation

$$X_l=0.$$

Cette racine surpassera en même temps toutes les racines de l'équation

$$\frac{X_{l+1}-X_l}{x-1}=0,$$

parceque, d'après ce qui précède, ces dernières sont plus petites que la plus grande des racines de l'équation

$$X_{l+1}=0,$$

et que d'ailleurs, comme il est connu, dans l'intervalle entre cette racine et la plus grande racine de l'équation

$$X_l=0,$$

la fonction X_{l+1} conserve le signe $-$, et la fonction X_l le signe $+$, ce qui entraîne certainement l'impossibilité d'une racine de l'équation

$$\frac{X_{l+1}-X_l}{x-1}=0$$

supérieure à la plus grande des racines de l'équation

$$X_l=0.$$

Or remarquant que pour cette racine la valeur de la fonction X_{l+1} a le signe —, nous concluons que cette racine sera elle-même inférieure à la plus grande racine de l'équation

$$\frac{X_{l+1}+X_l}{x+1}=0.$$

D'où l'on voit que la plus grande quantité de toutes celles qui satisfont à l'une quelconque des équations (13) est la plus grande racine de l'équation

$$\frac{X_{l+1}+X_l}{x+1}=0,$$

qui, après la suppression du diviseur $x+1$, qui n'influt pas sur la valeur de cette racine, se réduit à la suivante:

$$X_{l+1}+X_l=0.$$

§ 11. De ce que nous avons démontré à l'égard des quantités les plus grandes de celles qui satisfont aux équations (12) et (13) il suit que la limite supérieure du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yx\,dx}{\int_{-1}^{+1} Y\,dx},$$

le polynôme Y restant positif entre $x=-1$ et $x=+1$, sera égale à la plus grande racine de l'équation

$$X_{l+1}=0,$$

ou de l'équation

$$X_{l+1}+X_l=0,$$

selon que la limite supérieure du degré du polynôme Y est égale à $2l$ ou à $2l-1$. Remarquant que la formule

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yx\,dx}{\int_{-1}^{+1} Y\,dx}$$

est également susceptible de donner des valeurs positives ainsi que des valeurs négatives nous concluons que les limites supérieures de sa valeur, déterminées de la manière indiquée, représentent en mêmes temps les limites supérieures de ses valeurs numériques.

D'ailleurs, le rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yxdx}{\int_{-1}^{+1} Ydx}$$

ne changeant pas de valeur par le changement de Y en $-Y$, on voit que les limites de ce rapport déterminées dans la supposition que Y conserve le signe $+$ entre $x=-1$ et $x=+1$ auront lieu aussi dans le cas où Y conserve le signe $-$ entre $x=-1$ et $x=+1$, et par suite lorsque en général Y ne change pas de signe dans l'intervalle donné.

C'est ainsi qu'on obtient, en vertu de ce que nous avons démontré à l'égard de la limite supérieure du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yxdx}{\int_{-1}^{+1} Ydx},$$

le théorème suivant:

Théorème.

Si Y désigne un polynôme qui ne change pas de signe entre $x=-1$ et $x=+1$ et dont le degré ne surpasse pas n, la valeur numérique du rapport

$$\frac{\int_{-1}^{+1} Yxdx}{\int_{-1}^{+1} Ydx}$$

ne surpasse pas la plus grande racine de l'équation $X_{l+1}=0$ ou $X_{l+1}+X_l=0$, selon qu'on a $n=2l$ ou $n=2l-1$, où X_l, X_{l+1} désignent les fonctions de Legendre des degrés l et $l+1$.

§ 12. Nous allons montrer maintenant une application du théorème démontré. Soit ABC un arc d'une courbe parabolique dont l'équation en coordonnées rectangulaires est:

$$y=f(x)=C_p x^p+C_{p-1}x^{p-1}+\dots.$$

Si cet arc de courbe entre les points A et C va toujours en s'élevant ou en s'abaissant et n'offre point d'inflexions, il ne peut couper ni la corde AC, ni les droites AD, CD menées parallèlement aux axes de coordonnées par ses extrémités A et C; par conséquent le segment ABC représentera une partie du triangle rectangulaire formé par la corde AC et les droites

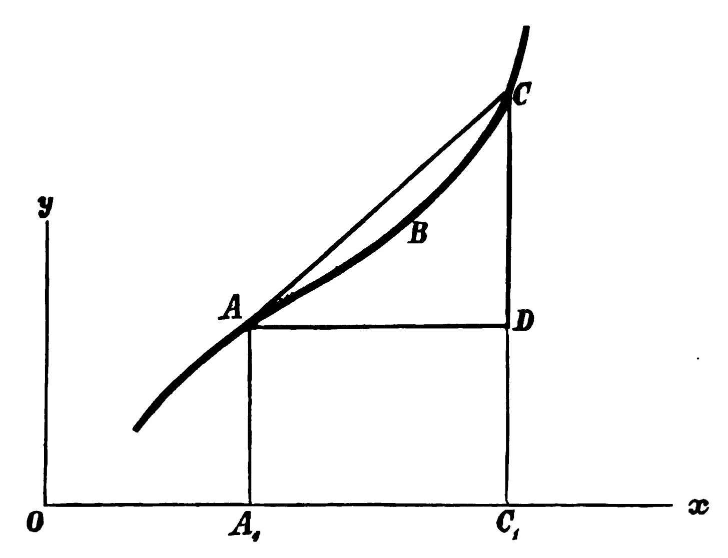
AD, DC parallèles aux axes des coordonnées. On voit d'après cela que le rapport

$$\frac{\text{segment } ACB}{\text{triangle } ACD}$$

sera toujours plus petit que 1, quel que soit le degré de la courbe parabolique. D'ailleurs pour tout degré donné le rapport

$$\frac{\text{segment } ACB}{\text{triangle } ACD}$$

aura pour limite une quantité inférieure à 1.



C'est cette valeur limite du rapport

$$\frac{\text{segment } ACB}{\text{triangle } ACD},$$

que le théorème démontré va nous donner, comme nous allons le voir tout de suite.

Désignant par

$$x_0, \; y_0, \; x_1, \; y_1$$

les coordonnés des points A, C et remarquant que $y = f(x)$, nous trouverons

$$AD = x_1 - x_0, \quad CD = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0),$$

ce qui nous donne l'expression de l'aire du triangle ACD que voici:

$$ACD = \frac{x_1 - x_0}{2} (f(x_1) - f(x_0)),$$

ce qu'on peut représenter sous la forme:

$$ACD = \frac{x_1 - x_0}{2} \int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx.$$

Passant à la détermination de l'aire du segment ACB, nous remarquons d'abord que l'aire du trapèze A_1ACC_1 s'exprime comme il suit:

$$A_1ACC_1 = \frac{A_1C_1}{2}(AA_1 + CC_1) = \frac{x_1 - x_0}{2}(y_0 + y_1) = \frac{x_1 - x_0}{2}(f(x_0) + f(x_1));$$

quant à l'aire limitée par l'arc ABC et par les droites AA_1, A_1C_1, C_1C, elle s'exprime par l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Retranchant cette dernière aire de la première on verra que l'aire du segment ACB s'exprime ainsi:

$$ACB = \frac{x_1 - x_0}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx,$$

ce qui se réduit à

$$ACB = \int_{x_0}^{x_1} f'(x)\left[x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right] dx,$$

au moyen de l'intégration par parties, en posant

$$\int dx = x - \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

D'après les valeurs trouvées des aires du triangle ACD et du segment ACB leur rapport s'exprime ainsi:

$$\frac{\text{segment } ACB}{\text{triangle } ACD} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\left[x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right] dx}{\frac{x_1 - x_0}{2}\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx},$$

ce qui se réduit à l'égalité

$$\frac{\text{segment } ACB}{\text{triangle } ACD} = \frac{\int_{-1}^{+1} f'\left(\frac{x_1 - x_0}{2}t + \frac{x_0 + x_1}{2}\right) t\,dt}{\int_{-1}^{+1} f'\left(\frac{x_1 - x_0}{2}t + \frac{x_0 + x_1}{2}\right) dt},$$

en introduisant la variable t au lieu de x, au moyen de la substitution

$$x = \frac{x_1 - x_0}{2}t + \frac{x_1 + x_0}{2}.$$

Comme la ligne parabolique considérée entre les points A et C va toujours en s'élevant ou en s'abaissant, son équation étant

$$y = f(x),$$

la dérivée

$$f'\left(\frac{x_1-x_0}{2}t+\frac{x_0+x_1}{2}\right),$$

entre les limites $t=-1$ et $t=+1$ correspondantes à ces points, ne changera pas de signe, et par suite on pourra appliquer le théorème mentionné à l'expression

$$\frac{\int_{-1}^{+1} f'\left(\frac{x_1-x_0}{2}t+\frac{x_0+x_1}{2}\right)tdt}{\int_{-1}^{+1} f'\left(\frac{x_1-x_0}{2}t+\frac{x_0+x_1}{2}\right)dt},$$

représentant la valeur du rapport

$$\frac{\text{segment } ACB}{\text{triangle } ACD}.$$

Or remarquant que la fonction entière $f'(x)$ est ici de degré non supérieur à $p-1$, nous devons prendre d'après ce théorème $n=p-1$. Ainsi en vertu de ce théorème nous arrivons à la conclusion que le rapport

$$\frac{\text{segment } ACB}{\text{triangle } ACD}$$

ne surpassera pas la plus grande racine de l'équation

$$X_{l+1}=0,$$

la courbe parabolique étant de degré non supérieur à $2l+1$, ou de l'équation

$$X_{l+1}+X_l=0,$$

si ce degré ne surpasse pas $2l$.

Posant $l=1$, nous trouvons que la première de ces équations se réduit à celle-ci:

$$X_2=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}=0,$$

et la seconde à

$$X_2+X_1=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}+x=0.$$

Remarquant que la plus grande racine de la première équation est $\sqrt{\frac{1}{3}}$ et de la seconde $\frac{1}{3}$, nous concluons d'après ce qui précède que la limite supérieure du rapport

$$\frac{\text{segment } ACB}{\text{triangle } ACD}$$

pour les lignes paraboliques du second degré est $\frac{1}{3}$ et pour celles du troisième $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

21.

SUR UNE SÉRIE

QUI FOURNIT

LES VALEURS EXTRÊMES DES INTÉGRALES,

LORSQUE LA FONCTION SOUS LE SIGNE EST DÉCOMPOSÉE EN DEUX FACTEURS.

(TRADUIT PAR C. A. POSSÉ.)

(Lu le 10 mai 1883.)

Объ одномъ рядѣ,

доставляющемъ предѣльныя величины интеграловъ при разложеніи подъ-интегральной функціи на множители.

(Приложеніе къ XLVII-му тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 4, 1883 г.)

Sur une série qui fournit les valeurs extrêmes des intégrales, lorsque la fonction sous le signe est décomposée en deux facteurs.

§ 1. Dans une Note sous le titre: *Sur le développement des fonctions à une seule variable* *), nous avons indiqué plusieurs séries pour le développement des fonctions, qui résultent de la formule générale d'interpolation par la méthode des moindres carrés que nous avons donné dans le Mémoire sous le titre: *Sur les fractions continues* **). Les termes de ces séries se composent des polynômes déterminés par le développement en fraction continue d'une intégrale de la forme

$$\int_a^b \frac{\theta^2(z)}{x-z}\,dz;$$

les dénominateurs des réduites qui s'obtiennent dans un tel développement sont justement ces polynômes suivant lesquels les fonctions se développent en séries, dont il était question dans notre Note.

Nous allons montrer maintenant une série d'un autre genre renfermant les mêmes polynômes. Cette série ne donne pas des valeurs approchées des fonctions sous la forme des polynômes, comme le faisaient les anciennes, mais elle fournit des expressions approchées, avec des termes complémentaires, des intégrales définies, ces expressions étant formées des intégrales plus simples sous certain égard, savoir: pour l'évaluation d'une intégrale de la forme

$$\int_a^b f_0(x)\, f_1(x)\, \theta^2(x)\, dx,$$

*) T. I, p. 501—508.

**) T. I, p. 203—230.

Sur une série qui fournit les valeurs extrêmes des intégrales, lorsque la fonction sous le signe est décomposée en deux facteurs.

§ 1. Dans une Note sous le titre: *Sur le développement des fonctions à une seule variable* *), nous avons indiqué plusieurs séries pour le développement des fonctions, qui résultent de la formule générale d'interpolation par la méthode des moindres carrés que nous avons donné dans le Mémoire sous le titre: *Sur les fractions continues* **). Les termes de ces séries se composent des polynômes déterminés par le développement en fraction continue d'une intégrale de la forme

$$\int_a^b \frac{\theta^2(z)}{x-z}\,dz;$$

les dénominateurs des réduites qui s'obtiennent dans un tel développement sont justement ces polynômes suivant lesquels les fonctions se développent en séries, dont il était question dans notre Note.

Nous allons montrer maintenant une série d'un autre genre renfermant les mêmes polynômes. Cette série ne donne pas des valeurs approchées des fonctions sous la forme des polynômes, comme le faisaient les anciennes, mais elle fournit des expressions approchées, avec des termes complémentaires, des intégrales définies, ces expressions étant formées des intégrales plus simples sous certain égard, savoir: pour l'évaluation d'une intégrale de la forme

$$\int_a^b f_0(x)\, f_1(x)\, \theta^2(x)\, dx,$$

*) T. I, p. 501—508.
**) T. I, p. 203—230.

où figure un produit de trois fonctions

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \theta^2(x),$$

on obtient une expression approchée composée d'intégrales où figurent sous le signe d'intégration séparément les fonctions

$$f_0(x)\,\theta^2(x),\ f_1(x)\,\theta^2(x),\ \theta^2(x),$$

multipliées par les polynômes mentionnés ci-dessus.

§ 2. Cette série, ainsi que son terme complémentaire, se déduisent facilement en considerant l'intégrale multiple

$$(1)\qquad T=\int P_0 S_0 S_1\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\ldots\ldots dx_n,$$

les fonctions

$$\theta_0,\ P_0,\ S_0,\ S_1$$

étant déterminées par les formules:

$$(2)\qquad \begin{cases} \theta_0=\theta(x_0)\,\theta(x_1)\ldots\ldots\theta(x_n), \\ \varphi(x)=(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n), \\ S_0=\dfrac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)}+\dfrac{f_0(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\ldots\ldots+\dfrac{f_0(x_n)}{\varphi'(x_n)}, \\ S_1=\dfrac{f_1(x_0)}{\varphi'(x_0)}+\dfrac{f_1(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\ldots\ldots+\dfrac{f_1(x_n)}{\varphi'(x_n)}, \\ P_0=\varphi'(x_0)\,\varphi'(x_1)\ldots\ldots\varphi'(x_n). \end{cases}$$

La dernière égalité, après la substitution des valeurs de $\varphi'(x_0)$, $\varphi'(x_1),\ldots\ldots$ $\varphi'(x_n)$, se réduit à celle qui suit:

$$(3)\qquad P_0=\pm\Big[(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)\ldots.(x_0-x_n)\ldots.(x_{n-1}-x_n)\Big]^2.$$

Les limites de toutes les variables dans les intégrales que nous considérons sont les mêmes, savoir: a et b.

Remarquant d'après la structure des fonctions S_0, S_1 que leur produit est égal à une somme de termes de la forme:

$$\frac{f_0(x_i)}{\varphi'(x_i)}\,\frac{f_1(x_k)}{\varphi'(x_k)},$$

où

$$i=0,\ 1,\ldots\ldots n,$$
$$k=0,\ 1,\ldots\ldots n,$$

nous concluons que l'intégrale (1) se décompose en une somme d'intégrales:

$$\sum\int\frac{f_0(x_i)}{\varphi'(x_i)}\,\frac{f_1(x_k)}{\varphi'(x_k)}P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\ldots\ldots dx_n.$$

Cette somme renferme des termes de deux genres, à savoir: 1) ceux dans lesquels $i=k$, 2) ceux dans lesquels i diffère de k.

Les indices i et k ayant dans cette somme toutes les valeurs de 0 à n, il y aura $n+1$ termes du premier genre et $(n+1)\,n$ termes du second genre. Or, d'après la symétrie par rapport aux variables

$$x_0,\ x_1, \ldots . x_n,$$

les termes du premier genre auront la valeur commune

$$\int \frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)} \frac{f_1(x_0)}{\varphi'(x_0)} P_0\, \theta_0^2\, dx_0\, dx_1 \ldots . dx_n,$$

représentant le terme qui correspond à $i=0$, $k=0$, et les termes du second genre auront la valeur commune

$$\int \frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)} \frac{f_1(x_1)}{\varphi'(x_1)} P_0\, \theta_0^2\, dx_0\, dx_1 \ldots . dx_n,$$

représentant le terme qui correspond à $i=0$, $k=1$; donc l'intégrale (1) que nous considerons se décompose de la manière suivante:

$$(4)\qquad \begin{cases} T=(n+1)\displaystyle\int \frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)} \frac{f_1(x_0)}{\varphi'(x_0)} P_0\, \theta_0^2\, dx_0\, dx_1 \ldots . dx_n \\[2ex] \qquad + (n+1)\,n \displaystyle\int \frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)} \frac{f_1(x_1)}{\varphi'(x_1)} P_0\, \theta_0^2\, dx_0\, dx_1 \ldots . dx_n. \end{cases}$$

§ 3. Pour simplifier la première des intégrales qui entrent au second membre de cette égalité nous introduirons des nouvelles fonctions θ_1, Φ, P_1, en posant

$$(5)\qquad \begin{cases} \theta(x_1)\,\theta(x_2) \ldots . \theta(x_n)=\theta_1, \\ (x-x_1)\,(x-x_2) \ldots . (x-x_n)=\Phi(x), \\ \Phi'(x_1)\,\Phi'(x_2) \ldots .. \Phi'(x_n)=P_1. \end{cases}$$

Comparant ces égalités aux égalités (2) nous remarquons que

$$(6)\qquad \begin{cases} \theta_0=\theta_1\cdot\theta(x_0), \\ \varphi(x)=(x-x_0)\,\Phi(x). \end{cases}$$

Si l'on différentie la dernière égalité par rapport à x, nous aurons:

$$\varphi'(x)=\Phi(x)+(x-x_0)\,\Phi'(x);$$

d'où, en faisant

$$x=x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots . x_n,$$

et remarquant que d'après (5) les valeurs $x=x_1,\ x_2,\ldots. x_n$ annulent la fonction $\Phi(x)$, nous déduisons

(7) $\varphi'(x_0)=\Phi(x_0),\ \varphi'(x_1)=(x_1-x_0)\,\Phi'(x_1),\ldots.,\ \varphi'(x_n)=(x_n-x_0)\,\Phi'(x_n).$

En multipliant ces égalités, nous trouvons:

$$\varphi'(x_0)\,\varphi'(x_1)\,\varphi'(x_2)\ldots.\varphi'(x_n)=$$
$$(x_1-x_0)\,(x_2-x_0)\ldots.(x_n-x_0)\,\Phi(x_0)\,\Phi'(x_1)\,\Phi'(x_2)\ldots.\Phi'(x_n).$$

Comme on a d'après (5)

$$(x_1-x_0)\,(x_2-x_0)\ldots.(x_n-x_0)=(-1)^n\,\Phi(x_0),$$
$$\Phi'(x_1)\,\Phi'(x_2)\ldots.\Phi'(x_n)=P_1,$$

et d'après (2)

$$\varphi'(x_0)\,\varphi'(x_1)\,\varphi'(x_2)\ldots.\varphi'(x_n)=P_0,$$

l'égalité obtenue nous donne

(8) $$P_0=(-1)^n\,\Phi^2(x_0)\,P_1.$$

Substituant les valeurs de P_0, θ_0, $\varphi'(x_0)$ tirées de (8), (6), (7) dans l'intégrale

$$\int\frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)}\frac{f_1(x_0)}{\varphi'(x_0)}P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\,dx_2\ldots.dx_n,$$

nous remarquons qu'elle se réduit à la suivante:

$$\int(-1)^n f_0(x_0)\,f_1(x_0)\,P_1\,\theta^2(x_0)\,\theta_1^2\,dx_0\,dx_1\,dx_2\ldots.dx_n.$$

Les fonctions P_1, θ_1 ne renfermant pas d'après (5) la variable x_0, cette intégrale se décompose en deux facteurs suivants:

$$\int(-1)^n P_1\,\theta_1^2\,dx_1\,dx_2\ldots.dx_n\cdot\int f_0(x_0)\,f_1(x_0)\,\theta^2(x_0)\,dx_0.$$

En vertu de cela, désignant par C la valeur de l'intégrale

$$\int(-1)^n P_1\,\theta_1^2\,dx_1\,dx_2\ldots.dx_n,$$

indépendante des fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, nous obtenons pour la détermination de la première des intégrales contenues dans l'égalité (4) la formule:

(9) $$\int\frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)}\frac{f_1(x_0)}{\varphi'(x_0)}P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\ldots.dx_n=C\int f_0(x_0)\,f_1(x_0)\,\theta^2(x_0)\,dx_0.$$

§ 4. Passant à la simplification de l'intégrale

$$\int \frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)} \frac{f_1(x_1)}{\varphi'(x_1)} P_0 \theta_0^2 dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n,$$

nous introduirons encore trois nouvelles fonctions, en posant

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x_2)\,\theta(x_3)\ldots\theta(x_n) = \theta_2, \\ (x - x_2)\,(x - x_3)\ldots(x - x_n) = \Phi_1(x), \\ \Phi'_1(x_2)\,\Phi'_1(x_3)\ldots\Phi'_1(x_n) = P_2. \end{array} \right.$$

Comparant les deux premières des égalites (10) aux égalités correspondantes (5), on déduit:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \theta(x_1)\,\theta_2, \\ \Phi(x) = (x - x_1)\,\Phi_1(x). \end{array} \right.$$

Cette dernière égalité étant différentiée par rapport à x, donne

$$\Phi'(x) = \Phi_1(x) + (x - x_1)\,\Phi'_1(x);$$

d'où, en posant

$$x = x_1,\ x_2, \ldots x_n$$

et remarquant que la fonction $\Phi_1(x)$ s'annule d'après (10) pour $x = x_2$, $x_3, \ldots x_n$, nous obtenons

$$(12) \quad \Phi'(x_1) = \Phi_1(x_1),\ \Phi'(x_2) = (x_2 - x_1)\,\Phi'_1(x_2), \ldots,\ \Phi'(x_n) = (x_n - x_1)\,\Phi'_1(x_n).$$

Multipliant ces égalités, nous trouvons

$$\Phi'(x_1)\,\Phi'(x_2)\,\Phi'(x_3)\ldots\Phi'(x_n) =$$
$$(x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)\,\Phi_1(x_1)\,\Phi'_1(x_2)\,\Phi'_1(x_3)\ldots\Phi'_1(x_n);$$

d'où l'on tire, en vertu des égalités (5), (10), l'expression suivante de la fonction P_1:

$$P_1 = (-1)^{n-1}\,\Phi_1^2(x_1)\,P_2;$$

et par conséquent l'égalité (8) nous donne

$$P_0 = -\Phi^2(x_0)\,\Phi_1^2(x_1)\,P_2.$$

En y substituant d'après (12) $\Phi'(x_1)$ au lieu de $\Phi_1(x_1)$ et remplaçant d'après (7) la fonction $\Phi(x_0)$ par $\varphi'(x_0)$ et la fonction $\Phi'(x_1)$ par $\frac{\varphi'(x_1)}{x_1 - x_0}$, nous obtenons

$$P_0 = -\left(\frac{\varphi'(x_0)\,\varphi'(x_1)}{x_1 - x_0}\right)^2 P_2.$$

Or en mettant cette valeur de P_0 dans l'intégrale

$$\int \frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)} \frac{f_1(x_1)}{\varphi'(x_1)} P_0 \theta_0^2 dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

et en y remplaçant d'après (6) la fonction θ_0 par le produit $\theta'(x_0)\theta_1$ et la fonction θ_1 d'après (11) par le produit $\theta(x_1)\theta_2$, nous trouvons que cette intégrale se réduit à la suivante:

$$-\int f_0(x_0) f_1(x_1) \theta^2(x_0) \theta^2(x_1) \frac{\varphi'(x_0)\varphi'(x_1)}{(x_1-x_0)^2} P_2 \theta_2^2 dx_0 dx_1 \dots dx_n,$$

ce qu'on peut aussi représenter par

$$-\int f_0(x_0) f_1(x_1) F(x_0, x_1) \theta^2(x_0) \theta^2(x_1) dx_0 dx_1,$$

où l'on a désigné par

$$F(x_0, x_1)$$

la fonction des deux variables x_0, x_1, déterminée par l'égalité

$$(13) \qquad F(x_0, x_1) = \int \frac{\varphi'(x_0)\varphi'(x_1)}{(x_1-x_0)^2} P_2 \theta_2^2 dx_2 dx_3 \dots dx_n.$$

§ 5. En vertu de ces transformations des intégrales qui entrent au second membre de l'égalité (4), elle se réduit à celle ci

$$(14) \quad \begin{cases} T = (n+1) C \int f_0(x_0) f_1(x_0) \theta^2(x_0) dx_0 \\ \qquad - (n+1) n \int f_0(x_0) f_1(x_1) F(x_0, x_1) \theta^2(x_0) \theta^2(x_1) dx_0 dx_1, \end{cases}$$

T étant d'après (1) la valeur de l'intégrale

$$\int P_0 S_0 S_1 \theta_0^2 dx_0 dx_1 \dots dx_n.$$

Nous allons montrer maintenant comment s'obtiennent les limites entre lesquelles se trouve renfermée la valeur de cette intégrale.

D'après (2) les fonctions S_0, S_1 se déterminent par les égalités:

$$S_0 = \frac{f_0(x_0)}{\varphi'(x_0)} + \frac{f_0(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \dots + \frac{f_0(x_n)}{\varphi'(x_n)},$$
$$S_1 = \frac{f_1(x_0)}{\varphi'(x_0)} + \frac{f_1(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \dots + \frac{f_1(x_n)}{\varphi'(x_n)}.$$

En mettant ici d'après (7)

$$\Phi(x_0),\ (x_1 - x_0)\Phi'(x_1), \dots (x_n - x_0)\Phi'(x_n)$$

au lieu de

$$\varphi'(x_0),\ \varphi'(x_1),\ldots\ \varphi'(x_n),$$

nous remarquons que ces égalités peuvent être représentées sous la forme

$$(15)\quad \begin{cases} S_0 = \dfrac{1}{\Phi(x_0)}\left[f_0(x_0) - \dfrac{\Phi(x_0)f_0(x_1)}{(x_0-x_1)\,\Phi'(x_1)} - \ldots - \dfrac{\Phi(x_0)f_0(x_n)}{(x_0-x_n)\,\Phi'(x_n)}\right], \\ S_1 = \dfrac{1}{\Phi(x_0)}\left[f_1(x_0) - \dfrac{\Phi(x_0)f_1(x_1)}{(x_0-x_1)\,\Phi'(x_1)} - \ldots - \dfrac{\Phi(x_0)f_1(x_n)}{(x_0-x_n)\,\Phi'(x_n)}\right]. \end{cases}$$

Si l'on considère la première de ces égalités, où d'après (5)

$$\Phi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

on remarque que l'expression renfermée entre les parenthèses [ ] représente la différence entre la valeur de la fonction $f_0(x)$ pour $x = x_0$ et la valeur que donne la formule d'interpolation de Lagrange pour la détermination de $f_0(x_0)$ d'après les valeurs de $f_0(x)$ pour $x = x_1, x_2, \ldots x_n$.

Le rapport de cette différence à la valeur de

$$\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}{1.2\ldots n},$$

ne sort pas, comme on le sait, des limites dans lesquelles reste renfermée la dérivée

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n}$$

pour $x = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ et pour les valeurs intermédiaires.

Remarquant d'ailleurs, d'après ce qui a été admis à l'égard des limites d'intégration, que toutes ces valeurs se trouvent entre a et b, nous concluons que ce rapport est égal à une certaine quantité M_0, moyenne entre les valeurs de la dérivée

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n}$$

dans les limites a et b. Par conséquent, d'après l'égalité (15), nous aurons

$$S_0 = \frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}{1.2\ldots n}\,\frac{M_0}{\Phi(x_0)}.$$

En remplaçant ici d'après (5) le produit

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)$$

par $\Phi(x_0)$, nous trouvons l'expression de S_0 qui, étant simplifiée, se réduit à la suivante:

$$S_0 = \frac{M_0}{1.2\ldots n}.$$

On trouve d'une manière analogue

$$S_1 = \frac{M_1}{1.2\ldots n},$$

M_1 étant une moyenne entre les valeurs de la dérivée

$$\frac{d^n f_1(x)}{dx^n}$$

dans l'intervalle $x=a$, $x=b$.

En vertu des égalités que nous avons déduites à l'égard des valeurs des fonctions S_0, S_1 dans l'intégrale

$$T = \int S_0 S_1 P_0 \theta_0^2 \, dx_0 \, dx_1 \ldots dx_n,$$

et remarquant que le facteur $P_0 \theta_0^2$ d'après (3) n'y change pas de signe, nous concluons que pour certaines valeurs M_0, M_1 ne sortant pas des limites entre lesquelles restent les dérivées

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n}, \quad \frac{d^n f_1(x)}{dx^n}$$

dans l'intervalle de $x=a$ à $x=b$, aura lieu l'égalité suivante:

$$T = \frac{M_0 M_1}{(1.2\ldots n)^2} \int P_0 \theta_0^2 \, dx_0 \, dx_1 \ldots dx_n. \tag{16}$$

§ 6. Substituant cette valeur de T dans l'égalité (14) nous obtenons l'équation

$$\frac{M_0 M_1}{(1.2\ldots n)^2} \int P_0 \theta_0^2 dx_0 dx_1 \ldots dx_n = (n+1)\, C \int f_0(x_0) f_1(x_0) \theta^2(x_0) \, dx_0$$
$$-(n+1)n \int f_0(x_0) f_1(x_1) F(x_0, x_1) \theta^2(x_0) \theta^2(x_1) dx_0 dx_1,$$

d'où il résulte la formule suivante pour l'évaluation de l'intégrale $\int f_0(x_0) f_1(x_0) \theta^2(x_0) \, dx_0$:

$$\int f_0(x_0) f_1(x_0) \theta^2(x_0) \, dx_0 = \int f_0(x_0) f_1(x_1) \frac{nF(x_0, x_1)}{C} \theta^2(x_0) \theta^2(x_1) \, dx_0 \, dx_1 + \frac{M_0 M_1 \int P_0 \theta_0^2 \, dx_0 \, dx_1 \ldots dx_n}{(1.2\ldots n)^2 (n+1) C}. \tag{17}$$

C'est de cette formule que nous tirons la série qui fait l'objet de cette Note, en développant la fonction

$$\frac{n}{C} F(x_0, x_1)$$

suivant les termes composés des polynômes qui s'obtiennent, comme on l'avait dit au § 1, au moyen du développement de l'intégrale

$$\int \frac{\theta^2(z) \, dz}{x - z}$$

en fraction continue et que nous désignerons par

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots.$$

D'après la propriété connue de ces polynômes, en vertu de la formule (17), il est facile de faire un tel développement de la fonction

$$\frac{n}{C}F(x_0, x_1)$$

sans qu'il soit nécessaire de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\varphi'(x_0)\,\varphi'(x_1)}{(x_0-x_1)^2} P_2\theta_2{}^2\,dx_2\,dx_3\ldots.dx_n,$$

qui donne l'expression de la fonction

$$F(x_0, x_1).$$

d'après l'équation (13).

Nous ne ferons que remarquer d'après cette équation que $F(x_0, x_1)$ est une fonction entière de degré inférieur à n, tant par rapport à x_0 que par rapport à x_1, comme cela résulte de ce que d'après (2) le produit $\varphi'(x_0)\,\varphi'(x_1)$ est divisible par $(x_0-x_1)^2$ et ne contient des puisances ni de x_0, ni de x_1 supérieures à $n+1$. D'après la propriété des polynômes

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots.$$

toute puissance de x inférieure à n pouvant être représentée par la somme

$$k_0\psi_0(x)+k_1\psi_1(x)+\ldots.+k_{n-1}\psi_{n-1}(x),$$

la fonction

$$\frac{n}{C}F(x_0, x_1),$$

d'après ce qu'on a remarqué ci-dessus à l'égard de la fonction $F(x_0, x_1)$, pourra être représentée par la somme

$$\sum C_{\lambda,\mu}\,\psi_\lambda(x_0)\,\psi_\mu(x_1),$$

λ et μ restant moindres que n.

En mettant cette somme au lieu de

$$\frac{n}{C}F(x_0, x_1)$$

dans la formule (17), nous obtenons l'égalité

$$\int f_0(x_0)\,f_1(x_0)\,\theta^2(x_0)\,dx_0=\int f_0(x_0)\,f_1(x_1)\sum C_{\lambda,\mu}\,\psi_\lambda(x_0)\,\psi_\mu(x_1)\,\theta^2(x_0)\,\theta^2(x_1)\,dx_0\,dx_1$$
$$+\frac{M_0\,M_1\int P_0\,\theta_0{}^2\,dx_0\,dx_1\ldots.dx_n}{(1.2\ldots.n)^2\,(n+1)\,C},$$

qui, comme il est aisé de reconnaître, peut être représentée comme il suit:

$$(18)\quad \int f_0(x) f_1(x)\,\theta^2(x)\,dx = \sum C_{\lambda,\mu} \int f_0(x)\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx \int f_1(x)\psi_\mu(x)\,\theta^2(x)\,dx + \frac{M_0 M_1 \int P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\ldots dx_n}{(1.2\ldots n)^2\,(n+1)\,C}.$$

En vertu de la propriété connue des polynômes

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots$$

de satisfaire à l'équation

$$(19)\qquad \int \psi_i(x)\,\psi_k(x)\,\theta^2(x)\,dx = 0$$

pour i différent de k, il n'est pas difficile de trouver la valeur des coefficients

$$C_{\lambda,\mu},$$

qui figurent dans cette formule. En effet, si l'on y pose

$$f_0(x) = \psi_l(x),\ f_1(x) = \psi_m(x),$$

où

$$l < n,\ m < n,$$

les dérivées

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n} = \frac{d^n \psi_l(x)}{dx^n},\ \frac{d^n f_1(x)}{dx^n} = \frac{d^n \psi_m(x)}{dx^n}$$

seront égales à zéro. Par suite, d'après ce qui a été dit au § 5 à l'égard des quantités M_0, M_1, celles-ci seront aussi égales à zéro; donc, pour de telles valeurs des fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, la formule (18) se réduira à l'égalité

$$\int \psi_l(x)\psi_m(x)\,\theta^2(x)\,dx = \sum C_{\lambda,\mu} \int \psi_l(x)\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx \int \psi_m(x)\psi_\mu(x)\,\theta^2(x)\,dx.$$

Remarquant d'après (19) que les intégrales

$$\int \psi_l(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx,$$
$$\int \psi_m(x)\,\psi_\mu(x)\,\theta^2(x)\,dx$$

se réduisent à zéro lorsque $\lambda \gtrless l$, $\mu \gtrless m$, nous concluons que dans la somme

$$\sum C_{\lambda,\mu} \int \psi_l(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx \int \psi_m(x)\,\psi_\mu(x)\,\theta^2(x)\,dx$$

tous les termes, à l'exception de celui qui correspond à

$$\lambda = l,\ \mu = m,$$

s'évanouissent; en vertu de quoi l'égalité déduite nous donne

$$\int \psi_\lambda(x)\,\psi_\mu(x)\,\theta^2(x)\,dx = C_{\lambda,\mu}\int \psi_\lambda^2(x)\,\theta^2(x)\,dx \cdot \int \psi_\mu^2(x)\,\theta^2(x)\,dx;$$

d'où il résulte pour la détermination du coefficient $C_{\lambda,\mu}$ la formule suivante

$$C_{\lambda,\mu} = \frac{\int \psi_\lambda(x)\,\psi_\mu(x)\,\theta^2(x)\,dx}{\int \psi_\lambda^2(x)\,\theta^2(x)\,dx \int \psi_\mu^2(x)\,\theta^2(x)\,dx}.$$

En y faisant $\lambda = \mu$, nous trouvons

$$C_{\lambda,\lambda} = \frac{1}{\int \psi_\lambda^2(x)\,\theta^2(x)\,dx};$$

tandis que pour $\lambda \gtrless \mu$ d'après l'égalité (19) on voit que

$$C_{\lambda,\mu} = 0;$$

Il en suit que la somme

$$\sum C_{\lambda,\mu}\int f_0(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx \int f_1(x)\,\psi_\mu(x)\,\theta^2(x)\,dx$$

ne contient que les termes dans lesquels $\lambda = \mu$ et que dans ces termes le coefficient $C_{\lambda,\mu}$ a la valeur

$$\frac{1}{\int \psi_\lambda^2(x)\,\theta^2(x)\,dx};$$

par conséquent l'égalité (18) se réduit à la suivante

$$(20)\quad \int f_0(x) f_1(x)\,\theta^2(x)\,dx = \sum \frac{\int f_0(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx \int f_1(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx}{\int \psi_\lambda^2(x)\,\theta^2(x)\,dx} + \frac{M_0 M_1 \int P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1 \ldots dx_n}{(1.2\ldots n)^2 (n+1)\,C},$$

où la sommation s'étend, d'après ce qu'on a remarqué plus haut, aux valeurs suivantes de λ:

$$\lambda = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1.$$

§ 7. On peut aussi trouver sans peine la valeur de l'expression

$$\frac{\int P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n}{(1.2\ldots n)^2 (n+1)\,C},$$

contenue dans le dernier terme de l'égalité déduite.

On y arrive en y posant

$$f_0(x) = \psi_n(x),\ f_1(x) = \psi_n(x).$$

Les dérivées

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n},\quad \frac{d^n f_1(x)}{dx^n}$$

se réduisant dans ce cas à la quantité constante, égale à $\psi_n^{(n)}(0)$, les quantités M_0, M_1 d'après ce qu'on en a dit au § 5 seront aussi égales à $\psi_n^{(n)}(0)$; par conséquent pour

$$f_0(x)=\psi_n(x),\ f_1(x)=\psi_n(x)$$

la formule (20) donnera

$$\int \psi_n^2(x)\,\theta^2(x)\,dx = \sum \frac{\left[\int \psi_n(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx\right]^2}{\int \psi_\lambda^2(x)\,\theta^2(x)\,dx} + \frac{[\psi_n^{(n)}(0)]^2 \int P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\ldots dx_n}{(1.2\ldots n)^2(n+1)\,C}.$$

Le nombre λ étant moindre que n, d'après ce qu on a vu au § précédent, les intégrales de la forme

$$\int \psi_n(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx,$$

qui figurent sous le signe de la somme se réduisent à zéro en vertu de (19) et nous trouvons

$$\int \psi_n^2(x)\,\theta^2(x)\,dx = \frac{[\psi_n^{(n)}(0)]^2 \int P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\ldots dx_n}{(1.2\ldots n)^2(n+1)\,C}.$$

Cette égalité nous donne

$$\frac{\int P_0\,\theta_0^2\,dx_0\,dx_1\ldots dx_n}{(1.2\ldots n)^2(n+1)\,C} = \frac{\int \psi_n^2(x)\,\theta^2(x)\,dx_0}{[\psi_n^{(n)}(0)]^2},$$

ce qui, étant substitué dans la formule (20), la réduit à la suivante

$$\int f_0(x) f_1(x)\,\theta^2(x)\,dx = \sum \frac{\int f_0(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx \int f_1(x)\,\psi_\lambda(x)\,\theta^2(x)\,dx}{\int \psi_\lambda^2(x)\,\theta^2(x)\,dx} + \frac{M_0\,M_1}{[\psi_n^{(n)}(0)]^2}\int \psi_n^2(x_0)\,\theta^2(x_0)\,dx_0,$$

où la somme représente n termes de la série

$$\frac{\int f_0(x)\,\psi_0(x)\,\theta^2(x)\,dx\cdot\int f_1(x)\,\psi_0(x)\,\theta^2(x)\,dx}{\int \psi_0^2(x)\,\theta^2(x)\,dx}$$
$$+\frac{\int f_0(x)\,\psi_1(x)\,\theta^2(x)\,dx\cdot\int f_1(x)\,\psi_1(x)\,\theta^2(x)\,dx}{\int \psi_1^2(x)\,\theta^2(x)\,dx}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{\int f_0(x)\,\psi_{n-1}(x)\,\theta^2(x)\,dx\cdot\int f_1(x)\,\psi_{n-1}(x)\,\theta^2(x)\,dx}{\int \psi_{n-1}^2(x)\,\theta^2(x)\,dx},$$

qui donne la valeur approchée de l'intégrale

$$\int f_0(x)\, f_1(x)\, \theta^2(x)\, dx,$$

et l'expression

$$\frac{M_0 M_1}{[\psi_n^{(n)}(0)]^2}\int \psi_n^2(x_0)\, \theta^2(x_0)\, dx_0$$

représente son terme complémentaire.

Remarquant d'après ce qu'on a vu au § 5 que la valeur numérique des quantités M_0, M_1 ne surpasse pas la plus grande valeur numérique des dérivées

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n},\ \frac{d^n f_1(x)}{dx^n}$$

dans les limites de l'intégration et désignant ces valeurs numériques maxima par A et B, nous concluons que la valeur numérique du terme complémentaire

$$\frac{M_0 M_1}{[\psi_n^{(n)}(0)]^2}\int \psi_n^2(x_0)\, \theta^2(x_0)\, dx_0$$

ne surpasse pas la valeur de

$$\frac{A\, B}{[\psi_n^{(n)}(0)]^2}\int \psi_n^2(x_0)\, \theta^2(x_0)\, dx_0.$$

Quant au signe du terme complémentaire il se détermine facilement dans le cas où les dérivées

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n},\ \frac{d^n f_1(x)}{dx^n}$$

ne changent pas de signe dans les limites de l'intégration.

Dans ce cas, d'après le § 5, les quantités M_0, M_1 auront les signes des dérivées

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n},\ \frac{d^n f_1(x)}{dx^n}$$

dans les limites de l'intégration, et par suite le terme complémentaire

$$\frac{M_0 M_1}{[\psi_n^{(n)}(0)]^2}\int \psi_n^2(x_0)\, \theta^2(x_0)\, dx_0,$$

vu que les quantités

$$\int \psi_n^2(x_0)\, \theta^2(x_0)\, dx_0,\ \left[\psi_n^{(n)}(0)\right]^2,$$

sont évidemment positives, aura le signe $+$ ou $-$ selon que ces dérivées conservent des signes égaux ou contraires dans les limites d'intégration.

22.

SUR LA REPRÉSENTATION DES VALEURS LIMITES DES INTÉGRALES PAR DES RÉSIDUS INTÉGRAUX.

(TRADUIT PAR SOPHIE KOWALEVSKI.)

(Lu le 8 octobre 1885.)

О представленіи предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ.

(Приложеніе къ LI тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 4, 1885 г.
Acta mathematica. T. IX, 1886, p. 35—56.)

Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux.

Dans un Mémoire *Sur les valeurs limites des intégrales* *), publié en 1874 dans le Journal de Mathématiques de Liouville, nous avons communiqué quelques résultats concernant les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,\partial x$$

dans le cas où l'on donne les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x,\ \int_a^b x^2 f(x)\,\partial x, \ldots,$$

prises entre des limites plus vastes: $a < u$, $b > v$, et où la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour toutes les valeurs réelles de x entre $x = a$ et $x = b$.

D'après un théorème contenu dans ce Mémoire, si le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)\,\partial x,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x, \ldots \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x$$

est pair $= 2m$, les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,\partial x$$

ne peuvent être déterminées que dans le cas où les limites u, v satisfont

*) T. II, pag. 183—185.

à une équation, dont les coefficients dépendent de la valeur des intégrales données.

Pour obtenir cette équation et les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,\partial x$$

dans le cas où u, v satisfont à cette équation, nous développons l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{s-x}\,\partial x$$

en une série procédant selon les puissances décroissantes de s

$$\int_a^b \frac{f(x)}{s-x}\,\partial x = \frac{\int_a^b f(x)\,\partial x}{s} + \frac{\int_a^b x f(x)\,\partial x}{s^2} + \ldots .$$

Posant

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = A_0,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x = A_1, \ldots .\ \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x = A_{2m-1},$$

nous obtenons donc pour l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{s-x}\,\partial x$$

l'expression approximative suivante, rigoureuse jusqu'au terme $\frac{1}{s^{2m}}$ inclusivement:

$$\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s^2} + \ldots . + \frac{A_{2m-1}}{s^{2m}}.$$

En désignant donc par

$$\cfrac{1}{\alpha_1 s + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 s + \beta_2 - \cdot \, . \, . - \cfrac{1}{\alpha_m s + \beta_m}}}$$

la fraction continue, que l'on obtient en développant l'expression

$$\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s^2} + \ldots . + \frac{A_{2m-1}}{s^{2m}},$$

en fraction continue et en s'arrêtant à la $m^{\text{ième}}$ réduite, nous aurons par conséquent, aussi avec un degré d'approximation jusqu'au terme $\frac{1}{z^{2m}}$ inclusivement,

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,\partial x = \cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z+\beta_m}}}.$$

A l'aide de la fraction continue définie de cette façon, on établit l'équation à laquelle doivent satisfaire u et v, de même que les valeurs limites correspondantes de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,\partial x.$$

En désignant par

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$$

la fraction ordinaire, à laquelle peut se réduire la fraction continue en question, et en égalant le dénominateur $\psi_m(z)$ à zéro, on obtient l'équation

$$\psi_m(z) = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire les limites u et v de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,\partial x.$$

Et en désignant par

$$z_1,\ z_2, \ldots . z_{l-1},\ z_l, \ldots . z_{n-1},\ z_n, \ldots . z_m$$

toutes les racines de cette équation, disposées d'après leur grandeur croissante, on trouve que si l'on pose

$$u = z_l,\ v = z_n,$$

les valeurs limites de l'intégrale en question

$$\int_u^v f(x)\,\partial x$$

seront exprimées par les somme

$$\frac{\varphi_m(z_{l+1})}{\psi'_m(z_{l+1})} + \frac{\varphi_m(z_{l+2})}{\psi'_m(z_{l+2})} + \ldots . + \frac{\varphi_m(z_{n-1})}{\psi'_m(z_{n-1})},$$

$$\frac{\varphi_m(z_l)}{\psi'_m(z_l)} + \frac{\varphi_m(z_{l+1})}{\psi'_m(z_{l+1})} + \ldots . + \frac{\varphi_m(z_n)}{\psi'_m(z_n)}.$$

Ces sommes sont composées des résidus de la fonction

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$$

par rapport aux racines de l'équation

$$\psi_m(z) = 0,$$

contenues dans les limites

$$z_l, \; z_n,$$

les racines z_l et z_n elles mêmes y étant comprises ou non.

Pour pouvoir exprimer ces sommes de résidus partiels par des résidus intégraux, nous conviendrons de désigner par ω une quantité positive infiniment petite. Vu que dans ce cas les racines de l'équation

$$\psi_m(z) = 0,$$

contenues dans les limites

$$z_l + \omega, \; z_n - \omega$$

sont

$$z_{l+1}, \; z_{l+2}, \dots \; z_{n-1},$$

et les racines, contenues dans les limites

$$z_l - \omega, \; z_n + \omega$$

sont

$$z_l, \; z_{l+1}, \dots \; z_n,$$

nous pouvons représenter les sommes précédentes par les résidus intégraux:

$$\mathop{\mathcal{E}}_{z_l+\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}, \quad \mathop{\mathcal{E}}_{z_l-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

En conséquence des valeurs limites trouvées pour l'intégrale

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,\partial x$$

on aura donc

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{z_l+\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{z_l-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

§ 2. Ces inégalités, de même que la solution d'un problème présentée dans le Mémoire mentionné plus haut et d'autres problèmes du même genre, découlent immédiatement de la représentation des valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,\partial x$$

par des résidus intégraux dans le cas, où la limite supérieure de l'intégrale v reste arbitraire, mais la limite inférieure u coïncide avec la limite inférieure des intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x, \ldots .$$

Dans ce cas les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

sont données par les formules suivantes:

$$(1) \qquad \int_a^v f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega} F(z),$$

$$(2) \qquad \int_a^v f(x)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v-\omega} F(z),$$

où $F(z)$ est une fonction rationnelle, dont la valeur dépend du nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)\,\partial x,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x, \ldots .$$

et de leurs valeurs. Cette fraction s'obtient facilement en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,\partial x$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cdots}}},$$

dont les m dénominateurs peuvent toujours être trouvées, comme nous l'avons montré, lorsque l'on connaît les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = A_0,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x = A_1, \ldots, \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x = A_{2m-1}.$$

En désignant comme auparavant par

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$$

la fraction ordinaire à laquelle se réduit la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}},$$

nous désignerons par

$$\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)}$$

la fraction ordinaire que nous obtenons en nous arrêtant au terme

$$\alpha_{m-1}\ z + \beta_{m-1}.$$

Si, outre les intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = A_0,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x = A_1, \ldots, \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x = A_{2m-1},$$

on connaît aussi la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b x^{2m} f(x)\,\partial x = A_{2m},$$

il est nécessaire, pour pouvoir déterminer la fraction rationnelle $F(z)$ dans les formules (1) et (2), de déterminer non seulement la fraction continue précitée et les deux fractions ordinaires

$$\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)},\ \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

mais aussi la valeur du coefficient de z dans le $(m+1)^{\text{ième}}$ dénominateur de la fraction continue, obtenue par le développement de l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}} + \frac{A_{2m}}{z^{2m+1}}.$$

Nous désignerons ce coefficient par

$$\alpha_{m+1}.$$

§ 3. En étudiant la fraction rationnelle $F(z)$, nous remarquons que sous sa forme générale elle peut être exprimée d'une manière simple par une fraction continue. Dans cette dernière les m premiers dénominateurs sont identiques avec ceux de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}},$$

que l'on obtient en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z - x} \partial x.$$

La fraction rationnelle $F(z)$ pourra donc être représentée par la formule

$$F(z) = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}}, \tag{3}$$

où Z est une fonction inconnue.

Cette fonction peut être exprimée à l'aide des fonctions $\varphi_{m-1}(z)$, $\varphi_m(z)$ seulement, si l'on connaît les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x f(x)\,\partial x, \ldots . \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x.$$

Mais si l'on veut se servir de $2m + 1$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x f(x)\,\partial x, \ldots . \int_a^b x^{2m} f(x)\,\partial x,$$

il faudra encore, pour déterminer $F(z)$, connaître une quantité constante α_{m+1}.

Dans le premier de ces deux cas, cette fonction sera donnée par la formule

$$Z = \gamma\,(z - v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}, \tag{4}$$

dans laquelle γ désigne la plus grande des deux quantités

$$\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right],$$

$$\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right].$$

Dans le second cas on trouve pour la détermination de Z deux formules différentes selon que la fraction

$$(5) \qquad \frac{\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}-\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]-\alpha_{m+1}}{\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)}-\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]-\alpha_{m+1}}.$$

est positive ou négative. Dans le premier cas la fonction Z est définie par la formule

$$(6) \qquad Z=\alpha_{m+1}(s-v)+\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}.$$

Da ns le second cas Z est donné par la formule

$$(7) \quad Z=\alpha_{m+1}(s-a)-\frac{(b-a)\rho\delta}{1-\rho}+\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}-\frac{(b-a)^2\rho\delta}{(1-\rho)^2 s-(1-\rho)(b-a\rho)},$$

où

$$\rho=\frac{\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}-\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]-\alpha_{m+1}}{\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)}-\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]-\alpha_{m+1}},$$

$$\delta=\frac{1}{b-a}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)}-\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}\right]-\alpha_{m+1}.$$

§ 4. L'expression de la valeur limite de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x,$$

par les résidus intégraux nous conduit facilement à toutes les formules indiquées dans le Mémoire précité.

En supposant connues les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x,\ldots .\int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x$$

et supposant de plus que l'on cherche la valeur limite de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

pour une valeur de v satisfaisant à l'equation

$$\psi_m(v)=0,$$

nous remarquons que d'après le § 3 la valeur de Z sera donnée dans ce cas par la formule

$$Z=\gamma\,(z-v)+\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)};$$

d'où il résulte

$$Z=\infty$$

à cause de l'équation

$$\psi_m(v)=0.$$

Par conséquent, d'après le § 3,

$$F(z)=\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cdots-\cfrac{1}{\alpha_m z+\beta_m}}}.$$

En substituant à la fraction continue la fraction ordinaire qui lui est égale

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

on trouve

$$F(z)=\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)};$$

Pour cette valeur de $F(z)$ les formules (1), (2) nous donnent

$$\int_a^v f(x)\,\partial x \geqq \sum_{a-\omega}^{v-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^v f(x)\,\partial x \leqq \sum_{a-\omega}^{v+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Ceci aura lieu pour toutes les valeurs de v satisfaisant à l'équation

$$\psi_m(v)=0.$$

En posant succéssivement

$$v=z_n,\quad v=z_l,$$

où z_n et z_l signifient comme auparavant les racines de l'équation

$$\psi_m(z)=0,$$

et $z_n > z_l$ nous déduisons de ces formules

$$\int_a^{z_n} f(x)\,\partial x \geqq \sum_{a-\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},\quad \int_a^{z_n} f(x)\,\partial x \leqq \sum_{a-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^{z_l} f(x)\,\partial x \geqq \sum_{a-\omega}^{z_l-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},\quad \int_a^{z_l} f(x)\,\partial x \leqq \sum_{a-\omega}^{z_l+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Et en retranchant les deux dernières inégalités des deux premières on trouve

$$\int_{s_l}^{s_n} f(x)\,\partial x \leqq \sum_{s_l-\omega}^{s_n+\omega} \frac{\varphi_m(s)}{\psi_m(s)},$$

$$\int_{s_l}^{s_n} f(x)\,\partial x \geqq \sum_{s_l+\omega}^{s_n-\omega} \frac{\varphi_m(s)}{\psi_m(s)},$$

Comme nous l'avons vu au § 1, ces inégalités nous conduisent aux mêmes valeurs limites de l'intégrale

$$\int_{s_l}^{s_n} f(x)\,\partial x,$$

que nous avons communiquées dans le Journal de Liouville pour le cas considéré.

§ 5. Pour appliquer les formules (1) et (2) à la résolution du problème proposé dans le Mémoire précité, nous supposons que les trois quantités données

$$p,\ d,\ k,$$

sont déterminées par les formules suivantes:

$$p=\int_0^b f(x)\,\partial x,\quad d=\frac{\int_0^b x f(x)\,\partial x}{\int_0^b f(x)\,\partial x},\quad k=\int_0^b (x-d)^2 f(x)\,\partial x,$$

et que l'on veut trouver les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)\,\partial x$$

pour le cas où la fonction inconnue $f(x)$ ne devient pas négative pour des valeurs de x entre 0 et b.

Vu que les trois quantités

$$p,\ d,\ k$$

déterminent les valeurs des trois intégrales

$$\int_0^b f(x)\,\partial x=p,\quad \int_0^b xf(x)\,\partial x=pd,\quad \int_0^b x^2 f(x)\,\partial x=pd^2+k,$$

les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)\,\partial x$$

dans le problème considéré seront déterminées par les formules qui s'appliquent au cas, quand le nombre des intégrales données est impair $2m+1$: il faut poser de plus

$$m=1,\ a=0,$$

$$A_0=p,\ A_1=pd,\ A_2=pd^2+k.$$

Pour déterminer la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 s+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 s+\beta_2-\cdots-\cfrac{1}{\alpha_m s+\beta_m}}}$$

nous développons l'expression

$$\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s^2}=\frac{p}{s}+\frac{pd}{s^2}$$

en une fraction continue, en nous arrêtant toutefois au premier dénominateur, ce qui nous donne

$$\frac{1}{\alpha_1 s+\beta_1}=\frac{1}{\frac{s}{p}-\frac{d}{p}}.$$

Nous trouvons donc

$$\frac{\varphi_1(s)}{\psi_1(s)}=\frac{1}{\frac{s}{p}-\frac{d}{p}};\quad \frac{\varphi_0(s)}{\psi_0(s)}=\frac{0}{1};\quad \frac{\varphi_1(s)}{\psi_1(s)}=\frac{p}{s-d}.$$

Pour déterminer la quantité constante $\alpha_{m+1}=\alpha_2$, nous développons en fraction continue l'expression

$$\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s^2}+\frac{A_2}{s^3}=\frac{p}{s}+\frac{pd}{s^2}+\frac{pd^2+k}{s^3},$$

en nous arrêtant au second dénominateur et ne considérant que le premier terme de ce dernier. De cette manière nous trouvons

$$pz+\frac{pd}{s^2}+\frac{pd^2+k}{s^3}=\cfrac{1}{\frac{s-d}{p}-\cfrac{1}{\frac{p^2}{k}s+\cdots}};$$

d'où l'on déduit, conformément à ce qui a été exposé au § 2,

$$\alpha_2 = \frac{p^2}{k}.$$

§ 6. En substituant ces valeurs dans la formule (5) on trouve la fraction

$$\frac{d - v + \frac{k}{pd}}{d - v - \frac{k}{p(b-d)}}.$$

dont le signe décide, d'après le § 3, laquelle des deux formules (6), (7) doit être employée pour déterminer la fonction Z.

Vu que cette fraction ne change de signe que pour les valeurs

$$v = d - \frac{k}{p(b-d)}, \quad v = d + \frac{k}{pd},$$

pour lesquelles elle devient ∞ ou 0, tandis que pour $v = \infty$ et $v = -\infty$ elle est égale à $+1$, on voit que cette fraction sera positive pour

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)}$$

et pour

$$v > d + \frac{k}{pd}$$

tandis qu'elle est négative lorsque v est contenu entre les limites

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}.$$

Par conséquent, si

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)}$$

ou bien

$$v > d + \frac{k}{pd},$$

nous devons, conformément au § 3, nous servir de la formule (6) pour déterminer la fonction Z, ce qui nous donne

$$Z = \alpha_2 (z - v) + \frac{\psi_0(v)}{\psi_1(v)}$$
$$= \frac{p^2}{k}(z - v) + \frac{p}{v - d}.$$

Au contraire, dans le cas où

$$d-\frac{k}{p(b-d)}<v<d+\frac{k}{pd}$$

la fonction Z sera déterminée par la formule (7) qui nous donne

$$Z=\frac{p^2}{k}z+(2d-b-v)\frac{p^2}{k}+(b-d)(v-d)\frac{dp^3}{k^2}$$
$$-\frac{p[p(b-d)d-k][p(v-d)d-k][p(d-v)(b-d)-k]}{k^3(z-d)-pk^2(b-d)(v-d)d}.$$

En passant maintenant à la détermination de la fraction rationnelle $F(z)$, conformément au § 3, nous remarquons que dans le cas considéré la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cdots-\cfrac{1}{\alpha_m z+\beta_m}}}$$

ne contient qu'un seul dénominateur

$$\alpha_1 z+\beta_1=\frac{z}{p}-\frac{d}{p};$$

la formule (3) se réduit donc à

$$F(z)=\frac{1}{\frac{z}{p}-\frac{d}{p}-\frac{1}{Z}}.$$

Aux deux valeurs de Z correspondent donc les valeurs suivantes de $F(z)$:

$$F(z)=\frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)},$$

$$F(z)=\frac{pz^2-p(b+v-d)z+k+(b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)}.$$

La première de ces valeurs aura lieu, d'après ce que nous avons vu, dans le cas où

$$v<d-\frac{k}{p(b-d)},$$

ou bien

$$v>d+\frac{k}{pd},$$

la seconde dans le cas où

$$d-\frac{k}{p(b-d)}<v<d+\frac{k}{pd}.$$

En introduisant ces valeurs de $F(z)$ dans les formules (1) et (2) et en posant $a=0$, nous trouvons que les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)\,\partial x,$$

que nous cherchons dans le problème considéré, seront données par les formules

$$(8)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^v f(x)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)}, \\ \displaystyle\int_0^v f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)}, \end{cases}$$

dans le cas où

$$v<d-\frac{k}{p(b-d)}, \quad \text{ou} \quad v>d+\frac{k}{pd};$$

et par les formules

$$\int_0^v f(v)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2-p(b+v-d)z+k+(b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{pz^2-p(b+v-d)z+k+(b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

dans le cas où

$$d-\frac{k}{p(b-d)}<v<d+\frac{k}{pd}.$$

§ 7. Si nous nous arrêtons au cas

$$v<d-\frac{k}{p(b-d)},$$

nous remarquons que pour telles valeurs de v, z étant compris entre $z=-\omega$ et $z=v\pm\omega$, la fraction

$$\frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

ne peut devenir ∞ que pour

$$z=v;$$

vu que la seconde valeur $z = d - \frac{k}{p(v-d)}$, pour laquelle cette fraction devient ∞, surpasse, pour les valeurs considérées de v et pour ω infiniment petit, aussi bien $v + \omega$ que $v - \omega$. Quant à la valeur

$$z = v,$$

elle sera contenue, à cause de l'inégalité

$$\omega > 0,$$

dans les limites

$$-\omega, \quad v + \omega,$$

mais elle sera en dehors des limites

$$-\omega, \quad v - \omega.$$

Par conséquent, pour les valeurs considérées de v, le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

se réduira à zéro, tandis que le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}.$$

se réduira au résidu correspondant à

$$z = v,$$

qui est égal à

$$\frac{kp}{k + p(v-d)^2}.$$

Par conséquent, dans le cas où $v < d - \frac{k}{p(b-d)}$ les formules (8) se réduisent aux suivantes:

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \geqq 0,$$

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \leqq \frac{kp}{k + p(v-d)^2}.$$

Passant maintenant au cas, où

$$v > d + \frac{k}{pd},$$

nous remarquons que dans ce cas la valeur

$$z = d - \frac{k}{p(v-d)},$$

pour laquelle la fraction

$$\frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)},$$

devient infinie, est contenue aussi bien entre les limites

$$-\omega, \quad v-\omega$$

qu'entre les limites

$$-\omega, \quad v+\omega;$$

tandis que l'autre valeur $z = v$, pour laquelle cette fraction devient aussi ∞, n'est contenue qu'entre les deux dernières limites.

Par conséquent le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

se réduit au résidu correspondant à

$$z = d - \frac{k}{p(v-d)},$$

lequel est égal à

$$\frac{p^2(v-d)^2}{k+p(v-d)^2},$$

tandis que le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{v}{p(v-d)}\right)}$$

sera égal à la somme des résidus de la fraction

$$\frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{v}{p(v-d)}\right)}$$

correspondants aux deux valeurs de z, pour lesquelles cette fraction devient

infinie. Cette somme est égale à p. Pour ces valeurs des résidus intégraux, les formules (8) nous donnent

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \geqq \frac{p^2(v-d)^2}{k+p(v-d)^2},$$

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \leqq p.$$

Il nous reste encore à étudier plus en détail le cas où

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}.$$

Pour ces valeurs de v, les valeurs limites de intégrale

$$\int_0^v f(x)\,\partial x$$

sont données, d'après le § 6, par les formules

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2 - p(b+v-d)z + k + (b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{pz^2 - p(b+v-d)z + k + (b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)}.$$

Vu que des trois valeurs

$$z = 0, \quad z = b, \quad z = v,$$

pour lesquelles la fraction

$$\frac{pz^2 - p(b+v-d)z + k + (b-d)(v-d)d}{z(z-b)(z-v)}$$

devient infinie, la première, $z = 0$, est contenue aussi bien entre les limites

$$-\omega, \quad v - \omega$$

qu'entre les limites

$$-\omega, \quad v + \omega,$$

la seconde $z = b$ n'est contenue ni entre les premieres, ni entre les secondes limites, tandis que la troisième, $z = v$ n'est contenue qu'entre les secondes limites, le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2 - p(b+v-d)z + k + (b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)}$$

se réduit au résidu correspondant à $s = 0$, lequel est égal à

$$\frac{(b-d)(v-d)p+k}{bv},$$

tandis que le résidu intégral

$$\underset{-\omega}{\overset{v+\omega}{\mathcal{E}}} \frac{ps^2 - p(b+v-d)s + k + (b-d)(v-d)p}{s(s-b)(s-v)}$$

est égal à la somme des résidus correspondants à $s = 0$ et à $s = v$; ces résidus sont respectivement égaux à

$$\frac{(b-d)(v-d)p+k}{bv},$$

$$\frac{d(b-d)p-k}{(b-v)v},$$

leur somme est donc

$$\frac{(b-d)(b+d-v)p-k}{b(b-v)}.$$

Il résulte par conséquent de ces formules

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \geqq \frac{(b-d)(v-d)p+k}{bv},$$

$$\int_0^v f(x)\,\partial x \leqq \frac{(b-d)(b+d-v)p-k}{b(b-v)}.$$

On voit donc que de l'expression des valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

à l'aide de résidus integraux découlent toutes les formules communiquées dans mon Mémoire, inséré dans le Journal de Liouville sous le titre: *Sur les valeurs limites des intégrales.*

§ 8. Il est facile de s'assurer de l'exactitude des valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

que nons avons trouvées pour le cas où l'on connaît les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x^2 f(x)\,\partial x, \dots$$

et que de plus la fonction inconnue $f(x)$ reste positive entre a et b, à l'aide de l'équation

$$\int_a^b Uf(x)\,\partial x = \mathcal{E}\, UF(z),$$

laquelle aura toujours lieu, en conséquence des propriétés de la fonction rationnelle $F(z)$ déterminée par les formules (3), (4), (6), (7), sitôt que U désigne une fonction entière dont le degré est moindre que le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x^2 f(x)\,\partial x, \ldots .$$

Quant à la déduction de ces mêmes formules par la méthode des quantités maxima et minima, cette question sera l'objet d'un Mémoire particulier, dans lequel nous montrerons aussi d'autres applications de la fonction rationnelle $F(z)$. On verra entre autre que les deux racines de l'équation

$$\frac{1}{F(x)} = 0,$$

les plus rapprochées de la racine

$$x = v,$$

fournissent la solution du problème suivant par rapport à la fonction $f(x)$: *dans quelles limites, en partant de $x = v$ ou en finissant par $x = v$, la fonction $f(x)$ peut-elle avoir une valeur constante égale à zéro?*

En assignant à v dans les formules qui déterminent $F(z)$ certaines valeurs spéciales, nous trouvons deux fractions $F_1(z)$, $F_2(z)$ telles, que les résidus intégraux

$$\mathcal{E}_{a-\omega}^{b+\omega} F_1(z)\,\theta(z), \quad \mathcal{E}_{a+\omega}^{b+\omega} F_2(z)\,\theta(z)$$

représentent les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\theta(x)\,\partial x,$$

sous condition, que pour toutes les valeurs de x entre $x = a$ et $x = b$ la fonction $\theta(x)$ reste finie et continue et que sa dérivée, dont l'ordre est égal au nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x^2 f(x)\,\partial x, \ldots .$$

ne change pas de signe. Si le nombre de ces intégrales est pair, ces valeurs spéciales de $F(z)$ peuvent être déduites des formules (3) et (4) en supposant $v=b$, ou bien v égal à une racine quelconque de l'équation $\psi_m(x)=0$. Si au contraire le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)\,\partial x,\quad \int_a^b x f(x)\,\partial x,\ \ldots.\quad \int_a^b x^{2m} f(x)\,\partial x,$$

est impair, les fractions $F_1(z)$ et $F_2(z)$ peuvent être déduites des formules (3) et (6) en supposant $v=a$, $v=b$.

A l'aide des fractions, déterminées par les formules (3), (4), (6), (7) on peut aussi trouver les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,\partial x$$

quelles que soient u, v pourvu seulement, que dans les intégrales données l'une des limites soit égale à $\pm\infty$.

23.

SUR LES RÉSIDUS INTÉGRAUX

QUI DONNENT

DES VALEURS APPROCHÉES DES INTÉGRALES.

(TRADUIT PAR I. LYON.)

(Lu le 18 novembre 1886.)

Объ интегральныхъ вычетахъ,

доставляющихъ приближенныя величины интеграловъ.

(Приложеніе къ LV-му тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 2, 1887 г.
Acta mathematica. T. XII, 1888—1889, p. 287—322.)

Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales.

---

§ 1. Dans un Mémoire *sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux*, communiqué à l'Académie des sciences le 8 octobre 1885 *), nous avons montré comment, d'après les valeurs données de $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x,\quad \int_a^b x f(x)\,\partial x, \ldots \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x,$$

on peut trouver les limites les plus étroites de la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x,$$

si la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour toutes les valeurs réelles de x entre $x=a$ et $x=b$, et si la valeur de v est comprise entre a et b. Ces limites, comme nous avons vu, sont données par les formules suivantes:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_a^v f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega} F(z), \\ &\int_a^v f(x)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v-\omega} F(z). \end{aligned}\right.$$

---

*) T. II, p. 421—440.

où ω est une quantité positive infiniment petite, et $F(z)$ une fonction rationnelle qui s'obtient facilement en développant l'expression

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\partial x}{z} + \frac{\int_a^b x f(x)\,\partial x}{z^2} + \ldots + \frac{\int_a^b x^{2m-1} f(x)\partial x}{z^{2m}}$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \ldots}}}$$

En effet, en posant

$$\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)} = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_{m-1} z + \beta_{m-1}}}},$$

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)} = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}},$$

elle est donnée par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} F(z) = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}}, \\ Z = \gamma\,(z - v) + \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}, \end{cases}$$

où γ désigne la plus grande des deux quantités

$$\frac{1}{a - v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right],$$

$$\frac{1}{b - v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right].$$

En substituant à la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}}$$

la fraction ordinaire qui lui est égale

$$F(z) = \frac{\varphi_m(z)\,Z - \varphi_{m-1}(z)}{\psi_m(z)\,Z - \psi_{m-1}(z)},$$

et en posant

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \varphi_m(z)\,Z - \varphi_{m-1}(z), \\ \Phi_1(z) &= \psi_m(z)\,Z - \psi_{m-1}(z), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

on aura

$$F(z) = \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}.$$

En portant cette valeur de la fonction $F(z)$ dans les formules (1), nous trouvons

$$\int_a^v f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

$$\int_a^b f(x)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v-\omega} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

ou bien

$$\int_a^v f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} + \mathop{\mathcal{E}}_{v}^{v+\omega} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

$$\int_a^v f(x)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - \mathop{\mathcal{E}}_{v-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}.$$

Or, les résidus intégraux

$$\mathop{\mathcal{E}}_{v}^{v+\omega} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}, \quad \mathop{\mathcal{E}}_{v-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

où ω désigne une quantité infiniment petite, s'étendent seulement sur les valeurs voisines de $z = v$; et comme cette valeur de z, qui annule $\Phi_1(z)$ en vertu de (2) et (3), coïncide avec l'une de leurs limites, la valeur commune de ces résidus sera

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Phi_0(v)}{\Phi'_1(v)},$$

et les dernières formules nous donnent

$$\int_a^v f(x)\,\partial x \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} + \frac{1}{2}\,\frac{\Phi_0(v)}{\Phi'_1(v)},$$

$$\int_a^v f(x)\,\partial x \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - \frac{1}{2}\,\frac{\Phi_0(v)}{\Phi'_1(v)}.$$

On voit par là que la différence entre le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_1(x)}$$

et l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

est au plus égale à la fraction

$$\pm \frac{1}{2} \frac{\Phi_0(v)}{\Phi'_1(v)}$$

C'est la plus grande approximation avec laquelle la valeur de l'intégrale peut être déterminée d'après les valeurs données de $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x f(x)\,\partial x, \ldots\ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x,$$

si par rapport à la fonction inconnue $f(x)$ on sait seulement qu'elle reste positive pour les valeurs réelles de x entre $x = a$ et $x = b$.

Nous allons maintenant étudier la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$$

et quelques formules qui peuvent nous conduire à la détermination de sa limite supérieure. Dans un cas particulier très remarquable nous trouvons par ces formules la limite supérieure de la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)},$$

sous la forme d'une fonction du nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)\,\partial x, \quad \int_a^b x f(x)\,dx, \quad \int_a^b x^2 f(x)\,dx, \ldots\ldots,$$

et qui tend vers zéro quand ce nombre augmente indéfiniment.

§ 2. Nous profiterons ici de quelques résultats que nous avons obtenus dans notre Mémoire *sur les fractions continues* *). Dans ce Mémoire nous nous sommes occupé de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \cdots}}}$$

*) T. I, p. 203—230.

qu'on obtient en développant la somme

$$\sum \frac{\theta^2(x_i)}{z-x_i} = \frac{\theta^2(x_0)}{z-x_0} + \frac{\theta^2(x_1)}{z-x_1} + \ldots\ldots + \frac{\theta^2(x_n)}{z-x_n},$$

où les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots . x_n$$

sont toutes réelles et distinctes, et

$$\theta^2(x_0),\ \theta^2(x_1), \ldots . \theta^2(x_n)$$

sont des quantités positives quelconques. En désignant par

$$\frac{\varphi_0(z)}{\psi_0(z)},\ \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)},\ \frac{\varphi_2(z)}{\psi_2(z)}, \ldots .$$

les réduites de la fraction continue, nous trouvons, en vertu des formules démontrées dans ce mémoire, les égalités suivantes:

$$\sum \theta^2(x_i)\psi_0^2(x_i) = \frac{1}{\alpha_1},\ \sum \theta^2(x_i)\psi_1^2(x_i) = \frac{1}{\alpha_2},\ \sum \theta^2(x_i)\psi_2^2(x_i) = \frac{1}{\alpha_3}, \ldots .;$$

qui montrent que les coefficients

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots .$$

sont tous positifs. Il résulte de là que les premières termes des fonctions

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \ldots .,$$

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \psi_2(z), \ldots .$$

ordonnées suivant les puissances décroisantes de z, auront des coefficients positifs.

D'autre part, comme nous avons vu dans ce même Mémoire, pour toute fonction entière $f_0(z)$ d'un degré inférieur à μ on doit avoir l'équation

(4) $$\sum f_0(x_i)\psi_\mu(x_i)\theta^2(x_i) = 0.$$

De cette équation nous allons déduire quelques propriétés des fonctions

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \psi_2(z) \ldots .,$$

dont nous nous servirons après. Pour cela nous remarquons que la dernière réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)}$$

doit donner la valeur exacte de la somme

$$\frac{\theta^2(x_0)}{z - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)}{z - x_1} + \dots + \frac{\theta^2(x_n)}{z - x_n}$$

et son dénominateur $\psi_{n+1}(z)$ sera une fonction entière du degré $(n+1)$ de la forme

(5) $$\psi_{n+1}(z) = C(z - x_0)(z - x_1)\dots(z - x_n),$$

où C désigne un coefficient constant. L'expression

$$\frac{\psi_{n+1}(z)}{(z - x_\lambda)(z - x_{\lambda+1})}$$

sera donc une fonction entière du degré $(n - 1)$, et d'après (6) on devra avoir l'équation

$$\sum \frac{\psi_{n+1}(x_i)\,\psi_n(x_i)}{(x_i - x_\lambda)(x_i - x_{\lambda+1})}\,\theta^2(x_i) = 0$$

qui se réduit en vertu de (7) à l'égalité

$$\frac{\psi'_{n+1}(x_\lambda)\,\psi_n(x_\lambda)\,\theta^2(x_\lambda)}{x_\lambda - x_{\lambda+1}} + \frac{\psi'_{n+1}(x_{\lambda+1})\,\psi_n(x_{\lambda+1})\,\theta^2(x_{\lambda+1})}{x_{\lambda+1} - x_\lambda} = 0,$$

d'où nous déduisons

$$\psi'_{n+1}(x_\lambda)\,\psi_n(x_\lambda)\,\theta^2(x_\lambda) = \psi'_{n+1}(x_{\lambda+1})\,\psi_n(x_{\lambda+1})\,\theta^2(x_{\lambda+1}).$$

Or, les racines

$$x_0,\ x_1, \dots x_\lambda,\ x_{\lambda+1}, \dots x_n$$

sont toutes réelles et distinctes, et en les supposant disposées dans l'ordre de leurs grandeurs on voit que la dérivée

$$\psi'_{n+1}(z)$$

aura des signes contraires pour les deux racines consécutives x_λ et $x_{\lambda+1}$, et par conséquent la fonction

$$\psi_n(z)$$

aura aussi des signes opposés pour

$$z = x_\lambda,\quad z = x_{\lambda+1}$$

c'est à dire entre deux racines consécutives quelconques de l'équation

$$\psi_{n+1}(z) = 0$$

on aura au moins une racine de l'équation

$$\psi_n(z) = 0$$

On voit par là que les n racines de l'équation

$$\psi_n(z) = 0$$

seront toutes réelles, distinctes et situées respectivement dans les n intervalles des $(n+1)$ racines de l'équation

$$\psi_{n+1}(z) = 0.$$

En désignant par

$$x'_0,\ x'_1, \ldots . x'_{n-1}$$

les racines de l'équation

$$\psi_n(z) = 0,$$

disposées dans l'ordre de leurs grandeurs, on aura la série de grandeurs croissantes

$$x_0,\ x'_0,\ x_1,\ x'_1, \ldots . x_\lambda,\ x'_\lambda,\ x_{\lambda+1},\ x'_{\lambda+1} \ldots . x'_{n-1},\ x_n.$$

§ 3. Les n racines

$$x'_0,\ x'_1, \ldots . x'_{n-1}$$

de l'équation

$$\psi_n(z) = 0$$

étant inégales, la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

en fractions simples nous donnera la somme

$$(6)\quad \frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} = \frac{\varphi_n(x'_0)}{\psi'_n(x'_0)} \frac{1}{z - x'_0} + \frac{\varphi_n(x'_1)}{\psi'_n(x'_1)} \frac{1}{z - x'_1} + \ldots . + \frac{\varphi_n(x'_{n-1})}{\psi'_n(x'_{n-1})} \frac{1}{z - x'_{n-1}},$$

où, comme il est facile de voir, les facteurs

$$\frac{\varphi_n(x'_0)}{\psi'_n(x'_0)},\ \frac{\varphi_n(x'_1)}{\psi'_n(x'_1)}, \ldots ,\ \frac{\varphi_n(x'_{n-1})}{\psi'_n(x'_{n-1})}$$

sont tous positifs.

En effet, les fonctions

$$\varphi_{n+1}(z),\ \psi_{n+1}(z),\ \varphi_n(z),\ \psi_n(z)$$

des réduites

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)},\ \frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

sont liées par la relation

$$\varphi_{n+1}(z)\psi_n(z) - \varphi_n(z)\psi_{n+1}(z) = 1.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par

$$\frac{\psi_{n+1}(z)\,\psi_n(z)}{z - x'_\mu},$$

et en y faisant

$$z = x'_\mu,$$

nous trouvons l'égalité

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)} = -\frac{1}{\psi'_n(x'_\mu)\,\psi_{n+1}(x'_\mu)}.$$

Pour déterminer à l'aide de cette égalité le signe de la fraction

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)}$$

nous remarquons d'abord que le produit

$$\psi'_n(z)\,\psi_{n+1}(z)$$

sera positif pour $z = \infty$, puisque les premiers termes des fonctions $\psi(z)$, ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de z, ont des coefficients positifs (§ 2).

Si maintenant on passe de $z = \infty$ à la plus grande racine $z = x'_{n-1}$ de l'équation

$$\psi_n(z) = 0,$$

la fonction $\psi_{n+1}(z)$ changera son signe en passant par sa racine $z = x_n$, tandis que la dérivée $\psi'_n(z)$ n'ayant pas de racine entre $z = x'_{n-1}$ et $z = \infty$ conservera son signe. Le produit

$$\psi'_n(z)\,\psi_{n+1}(z)$$

sera donc négatif pour $z = x'_{n-1}$, et il est facile de voir qu'il conservera sa valeur négative pour toutes les racines

$$x'_0,\ x'_1, \ldots x'_\mu,\ x'_{\mu+1}, \ldots x'_{n-1}$$

de l'équation

$$\psi_n(z) = 0,$$

car, d'après le § 2, entre deux racines consécutives de l'équation

$$\psi_n(z) = 0$$

on trouvera toujours une racine pour chacune des équations

$$\psi'_n(z) = 0$$

et

$$\psi_{n+1}(z) = 0,$$

en vertu de quoi le produit doit avoir le même signe pour toutes les racines de l'équation

$$\psi_n(z) = 0.$$

Ainsi, le produit

$$\psi'_n(z)\,\psi_{n+1}(z)$$

sera négatif pour les valeurs

$$z = x'_0,\ x'_1, \ldots . x'_{n-1}$$

et la fraction

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)}$$

sera positive pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Posons

$$\theta_1^2(x'_0) = \frac{\varphi_n(x'_0)}{\psi'_n(x'_0)},\ \theta_1^2(x'_1) = \frac{\varphi_n(x'_1)}{\psi'_n(x'_1)}, \ldots . \theta_1^2(x'_{n-1}) = \frac{\varphi_n(x'_{n-1})}{\psi'_n(x'_{n-1})},$$

et la somme (6) prendra la forme

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} = \frac{\theta_1^2(x'_0)}{z - x'_0} + \frac{\theta_1^2(x'_1)}{z - x'_1} + \ldots . + \frac{\theta_1^2(x'_{n-1})}{z - x'_{n-1}}.$$

Ainsi, connaissant la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)}$$

en une somme de fractions simples de la forme

$$\frac{\theta^2(x_0)}{z - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)}{z - x_1} + \ldots . + \frac{\theta^2(x_n)}{z - x_n},$$

où les x_i sont toutes des quantités réelles et distinctes, et les $\theta^2(x_i)$ des quantités positives quelconques, on pourra aussi décomposer la réduite

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

en une somme de la même forme

$$\frac{\theta_1^2(x'_0)}{z - x'_0} + \frac{\theta_1^2(x'_1)}{z - x'_1} + \ldots . + \frac{\theta_1^2(x'_{n-1})}{z - x'_{n-1}},$$

dans laquelle les quantités x'_μ sont aussi toutes réelles et distinctes, et les $\theta_1^2(x'_\mu)$ des quantités positives. De plus, les quantités x_i et x'_μ dans l'ordre de leurs grandeurs formeront, comme on a vu, la série suivante:

$$x_0,\ x'_0,\ x_1,\ x'_1, \ldots . x_\lambda,\ x'_\lambda,\ x_{\lambda+1},\ x'_{\lambda+1} \ldots . x'_{n-1},\ x_n.$$

En passant de même de la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_n(s)}{\psi_n(s)}$$

à la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_{n-1}(s)}{\psi_{n-1}(s)},$$

et ainsi de suite, nous trouvons pour chacune d'elles une décomposition de la forme

$$\frac{\varphi_l(s)}{\psi_l(s)} = \frac{\theta_k^2(s_0)}{s-s_0} + \frac{\theta_k^2(s_1)}{s-s_1} + \ldots + \frac{\theta_k^2(s_{l-1})}{s-s_{l-1}},$$

où les racines $s_0, s_1, \ldots, s_{l-1}$ de l'équation

$$\psi_l(s) = 0$$

sont toutes réelles et distinctes, et les $\theta_k^2(s)$ des quantités positives.

De plus, en désignant par

$$s'_0,\ s'_1, \ldots s'_\lambda,\ s'_{\lambda+1}, \ldots s'_{l-2}$$

les racines de l'équation

$$\psi_{l-1}(s) = 0$$

et en les disposant avec celles de

$$\psi_l(s) = 0$$

par l'ordre de leurs grandeurs croissantes, nous trouvons la série

$$s_0,\ s'_0,\ s_1,\ s'_1, \ldots s_\lambda,\ s'_\lambda,\ s_{\lambda+1}, \ldots s'_{l-2},\ s_{l-1},$$

dont les termes sont tous compris entre x_0 et x_n.

§ 4. Revenons à la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 s + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 s + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m s + \beta_m}}},$$

que l'on obtient en développant l'expression

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\partial x}{s} + \frac{\int_a^b x f(x)\,\partial x}{s^2} + \ldots + \frac{\int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x}{s^{2m}},$$

en fraction continue et en s'arrêtant à la $m^{\text{ième}}$ réduite.

Cette expression ne diffère de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,\partial x$$

que par les termes

$$\frac{\int_a^b x^{2m} f(x)\,\partial x}{z^{2m+1}} + \frac{\int_a^b x^{2m+1} f(x)\,\partial x}{z^{2m+2}} + \ldots,$$

et comme ces termes n'ont aucune influence sur les m premiers dénominateurs de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \ldots}}},$$

nous pouvons, en nous bornant aux m premiers termes, la regarder comme provenant du développement de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,\partial x.$$

Or, cette intégrale, où, par hypothèse, la fonction $f(x)$ reste positive pour les valeurs de x entre a et b, peut être regardée comme la limite de la somme

$$\frac{\theta^2(x_0)}{z-x_0} + \frac{\theta^2(x_1)}{z-x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)}{z-x_n},$$

dans laquelle les quantités x_i désignent une série de grandeurs croissantes de $x_0 = a$ à $x_n = b$, et les $\theta^2(x_i)$ des quantités positives choisies conformément aux valeurs correspondantes de $f(x)$; et nous en concluons, d'après le § 2, que les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}},$$

provenant du développement de l'expression

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\partial x}{z} + \frac{\int_a^b x f(x)\,\partial x}{z^2} + \ldots + \frac{\int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x}{z^{2m}},$$

auront des valeurs positives, définies par les formules

$$\alpha_1=\frac{1}{\int\limits_a^b \psi^2{}_0(x)\,f(x)\,\partial x},\quad \alpha_2=\frac{1}{\int\limits_a^b \psi^2{}_1(x)\,f(x)\,\partial x},\ldots.\alpha_m=\frac{1}{\int\limits_a^b \psi^2{}_{m-1}(x)\,f(x)\,\partial x},$$

et que les dénominateurs $\psi_m(z)$ et $\psi_{m-1}(z)$ des réduites

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},\quad \frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)},$$

auront toutes leurs racines réelles, distinctes et comprises entre a et b.

De plus, en désignant par

$$z_0,\ z_1,\ldots.z_\lambda,\ z_{\lambda+1},\ldots.z_{m-1}$$
$$z'_0,\ z'_1,\ \ldots z'_\lambda,\ z'_{\lambda+1},\ \ldots z'_{m-2},$$

les racines des équations

$$\psi_m(z)=0,\quad \psi_{m-1}(z)=0,$$

dans l'ordre de leurs grandeurs, on devra avoir la série suivante de grandeurs croissantes:

$$z_0,\ z'_0,\ z_1,\ z'_1\ldots.z_\lambda,\ z'_\lambda,\ z_{\lambda+1},\ldots.z'_{m-2},\ z_{m-1}.$$

Tout ceci doit avoir lieu, bien entendu, si les intégrales

$$\int\limits_a^b f(x)\,\partial x,\quad \int\limits_a^b x\,f(x)\,\partial x,\ldots.\quad \int\limits_a^b x^{2m-1}f(x)\,\partial x$$

peuvent prendre des valeurs données pour $f(x)$ positive entre

$$x=a,\quad x=b.$$

§ 5. Nous venons de voir que, si les valeurs données des intégrales

$$\int\limits_a^b f(x)\,\partial x,\quad \int\limits_a^b x\,f(x)\,\partial x,\ldots.\quad \int\limits_a^b x^{2m-1}f(x)\,\partial x$$

sont possibles pour $f(x)$ positive entre a et b, l'équation

$$\psi_m(x)=0$$

déterminée par ces valeurs ne peut pas avoir des racines hors des limites a et b.

Deux cas peuvent donc se présenter: 1) aucune des racines de l'équation

$$\psi_m(z)=0$$

n'atteint ni la limite a, ni la limite b, et 2) l'une des limites a et b ou toutes les deux annulent la fonction $\psi_m(z)$. Nous allons d'abord examiner le second cas qui d'ailleurs se présente très rarement.

En regardant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,\partial x$$

comme la limite de la somme

$$\frac{\theta^2(x_0)}{z-x_0}+\frac{\theta^2(x_1)}{z-x_1}+\ldots\ldots+\frac{\theta^2(x_n)}{z-x_n},$$

où l'on a $x_0=a$, $x_n=b$, et en remarquant que, d'après le § 2, le dénominateur de la dernière réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)},$$

égale à cette somme, est le seul qui peut s'annuler pour $z=x_0=a$ et $z=x_n=b$, nous en concluons que, dans le cas considéré, la somme

$$\frac{\theta^2(x_0)}{z-x_0}+\frac{\theta^2(x_1)}{z-x_1}+\ldots\ldots+\frac{\theta^2(x_n)}{z-x_n}$$

et par conséquent l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,\partial x$$

doivent être égales à la réduite

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Or, cette fraction se décompose en une somme de fractions simples de la forme

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}=\frac{\varphi_m(z_0)}{\psi'_m(z_0)}\frac{1}{z-z_0}+\frac{\varphi_m(z_1)}{\psi'_m(z_1)}\frac{1}{z-z_1}+\ldots\ldots+\frac{\varphi_m(z_{m-1})}{\psi'_m(z_{m-1})}\frac{1}{z-z_{m-1}},$$

et pour que cette somme puisse être égale à l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,\partial x$$

il faut que la fonction $f(x)$ s'annule pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, qui ne sont pas dans le voisinage de

$$x=z_0,\ z_1,\ldots z_{m-1},$$

et que pour les valeurs de x infiniment voisines de

$$x = z_0,\ z_1, \ldots . z_{m-1}$$

elle ait des valeurs telles que les intégrales

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega} f(x)\,\partial x,\ \int_{z_1-\omega}^{z_1+\omega} f(x)\,\partial x, \ldots .\ \int_{z_{m-1}-\omega}^{z_{m-1}} f(x)\,\partial x$$

se ramènent, lorsque ω devient nulle, aux valeurs

$$\frac{\varphi_m(z_0)}{\psi'_m(z_0)},\ \frac{\varphi_m(z_1)}{\psi'_m(z_1)}, \ldots . \frac{\varphi_m(z_{m-1})}{\psi'_m(z_{m-1})}.$$

Avec une telle fonction $f(x)$ l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

se ramène au résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

pour toutes les valeurs de v entre les limites a et b, différentes de

$$z_0,\ z_1, \ldots ,\ z_{m-1}.$$

Quant aux valeurs de

$$v = z_0, \ldots ,\ z_{m-1},$$

on voit que pour ces valeurs de v l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

reçoit des accroissements brusques, égaux respectivement à

$$\frac{\varphi_m(z_0)}{\psi'_m(z_0)},\ \frac{\varphi_m(z_1)}{\psi'_m(z_1)}, \ldots . \frac{\varphi_m(z_{m-1})}{\psi'_m(z_{m-1})};$$

et par conséquent pour

$$v = z_0,\ z_1, \ldots ,\ z_{m-1},$$

sa valeur ne peut pas être complètement déterminée.

§ 6. Passons au cas général lorsque ni a, ni b ne satisfont pas à l'equation

$$\psi_m(z) = 0,$$

Nous allons d'abord montrer que la quantité γ qui figure dans nos formules est une quantité positive.

En effet, d'après le § 1 on doit avoir les inégalités

$$\gamma \geqq \frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right],$$

$$\gamma \geqq \frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right].$$

En les multipliant respectivement par les quantités positives $v-a$, $b-v$ et en les ajoutant ensuite membre à membre, nous trouvons l'inégalité

$$\gamma(b-a) \geqq \frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)},$$

Or, les termes les plus élevés dans les fonctions $\psi_{m-1}(z)$, $\psi_m(z)$ ayant des coefficients positifs, on devra avoir

$$\frac{\psi_{m-1}(\infty)}{\psi_m(\infty)} > 0,$$

$$\frac{\psi_{m-1}(-\infty)}{\psi_m(-\infty)} < 0,$$

et comme toutes les racines des équations

$$\psi_{m-1}(z) = 0, \quad \psi_m(z) = 0$$

sont plus grandes que a et plus petites que b, on aura aussi

$$\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} > 0, \quad \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} < 0,$$

en vertu de quoi l'inégalité précédente nous donne

$$\gamma\,(b-a) > 0,$$

d'où

$$\gamma > 0.$$

La quantité γ, comme on a vu dans le § 1, sert à déterminer la fonction $\Phi_1(z)$ qui, en vertu de (2) et (3), sera donnée par la formule

$$\Phi_1(z) = \left[\gamma(z-v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]\psi_m(z) - \psi_{m-1}(z),$$

dans laquelle, comme on vient de le voir, la quantité γ est positive; et comme de plus les termes les plus élevés dans les fonctions

$$\psi_m(z), \ \psi_{m-1}(z)$$

ont des coefficients positifs, cette formule nous donnera

$$\Phi_1(+\infty) = +, \quad \Phi_1(-\infty) = \mp,$$

où le signe supérieur correspond au cas de m pair et le signe inférieur au cas de m impair. Si maintenant on fait dans cette formule

$$z = z_{m-1}, \; z_{m-2}, \ldots . z_0,$$

on aura, d'après le § 4,

$$\psi_m(z_{m-1}) = 0, \; \psi_m(z_{m-2}) = 0, \ldots . \psi_m(z_0) = 0,$$

$$\psi_{m-1}(z_{m-1}) = +, \; \psi_{m-1}(z_{m-2}) = -, \ldots \ldots \psi_{m-1}(z_0) = \mp,$$

de sorte que pour la fonction $\Phi_1(z)$ nous trouvons

$$\Phi_1(z_{m-1}) = -, \; \Phi_1(z_{m-2}) = +, \ldots . \Phi_1(z_0) = \pm.$$

On voit par là que les $m + 1$ racines de l'équation

$$\Phi_1(z) = 0$$

sont toutes réelles, distinctes et séparées par les m racines de l'équation

$$\psi_m(z) = 0$$

§ 7. En désignant par

$$\zeta_0, \; \zeta_1, \ldots . \zeta_m$$

les racines de l'équation

$$\Phi_1(z) = 0,$$

nous trouvons pour la fraction

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

la décomposition suivante en fractions simples:

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{\Phi_0(\zeta_0)}{\Phi'_1(\zeta_0)} \frac{1}{z-\zeta_0} + \frac{\Phi_0(\zeta_1)}{\Phi'_1(\zeta_1)} \frac{1}{z-\zeta_1} + \ldots . + \frac{\Phi_0(\zeta_m)}{\Phi'_1(\zeta_m)} \frac{1}{z-\zeta_m},$$

où, comme il est facile de voir, les facteurs

$$\frac{\Phi_0(\zeta_0)}{\Phi'_1(\zeta_1)}, \; \frac{\Phi_0(\zeta_1)}{\Phi'_1(\zeta_1)}, \ldots . \frac{\Phi_0(\zeta_m)}{\Phi'_1(\zeta_m)}$$

sont tous positifs. En effet, des formules (3) on déduit facilement l'égalité

$$\Phi_0(z)\,\psi_m(z) - \Phi_1(z)\,\varphi_m(z) = \varphi_m(z)\,\psi_{m-1}(z) - \varphi_{m-1}(z)\,\psi_m(z).$$

Comme le second membre, d'après une propriété bien connue des réduites, est égal à l'unité, nous aurons l'égalité

$$\Phi_0(z)\,\psi_m(z) - \Phi_1(z)\,\varphi_m(z) = 1.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par

$$\frac{\Phi_1(z)\,\psi_m(z)}{z-\zeta_\lambda},$$

et en y faisant

$$z=\zeta_0\ \zeta_1,\ldots.\zeta_m,$$

nous trouvons l'égalité

$$\frac{\Phi_0(\zeta_\lambda)}{\Phi'_1(\zeta_\lambda)}=\frac{1}{\psi_m(\zeta_\lambda)\,\Phi'_1(\zeta_\lambda)}.$$

Pour déterminer à l'aide de cette égalité le signe de la fraction

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)},$$

nous remarquons d'abord que le produit

$$\psi_m(z)\ \Phi'_1(z)$$

sera positif pour $z=\infty$, puisque les termes les plus élevés dans les fonctions

$$\psi_m(z)\ \text{ et }\ \Phi'_1(z)$$

ont des coefficients positifs; et comme les racines des équations

$$\psi_m(z)=0$$

et

$$\Phi'_1(z)=0$$

sont toutes plus petites que la plus grande racine ζ_m de l'équation

$$\Phi_1(z)=0$$

(§ 6), on voit que ce produit sera aussi positif pour $z=\zeta_m$.

Il est facile de voir que le produit conservera ce signe $+$ pour toutes les racines

$$\zeta_0,\ \zeta_1,\ldots.\zeta_m$$

de l'équation

$$\Phi_1(z)=0;$$

car entre deux racines consécutives quelconques de l'équation

$$\Phi_1(z)=0$$

chacune des équations

$$\psi_m(z)=0\ \text{ et }\ \Phi'_1(z)=0$$

aura toujours une racine seulement (§ 6), en vertu de quoi le produit aura le même signe pour toutes les racines

$$z = \zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2, \ldots \zeta_\lambda, \ldots \zeta_m,$$

de l'équation

$$\Phi_1(z) = 0.$$

On aura donc bien

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)} > 0,$$

pour les valeurs de $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Ainsi, la fraction

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

qui, comme on a vu dans le § 1, est égale à la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}},$$

se ramène à la somme

$$\frac{\Phi_0(\zeta_0)}{\Phi'_1(\zeta_0)} \frac{1}{z - \zeta_0} + \frac{\Phi_0(\zeta_1)}{\Phi'_1(\zeta_1)} \frac{1}{z - \zeta_1} + \cdots + \frac{\Phi_0(\zeta_m)}{\Phi'_1(\zeta_m)} \frac{1}{z - \zeta_m},$$

dans laquelle les quantités ζ_i sont toutes réelles et distinctes, et les

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)}$$

des quantites positives.

Comme cette somme ne diffère que par les notations de la somme

$$\frac{\theta^2(x_0)}{z - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)}{z - x_1} + \cdots + \frac{\theta^2(x_n)}{z - x_n},$$

que nous avons étudiée dans le mémoire précité *sur les fractions continues*, on trouve, d'après la formule donnée à la fin du § 5 de ce Mémoire, l'égalité suivante:

$$1 = \frac{\psi_0^2(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)}}{\sum \psi_0^2(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)}} + \frac{\psi_1^2(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)}}{\sum \psi_1^2(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)}} + \cdots + \frac{\psi^2_m(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)}}{\sum \psi^2_m(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)}}.$$

Or, d'après ce que nous avons dit dans le § 2, on a

$$\sum \psi_0^2(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)} = \frac{1}{\alpha_1};\ \sum \psi_1^2(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)} = \frac{1}{\alpha_2}, \ldots \sum \psi^2_{m-1}(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)} = \frac{1}{\alpha_m};$$
$$\sum \psi^2_m(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)} = \frac{1}{\gamma},$$

en vertu de quoi l'égalité précédente peut s'écrire

$$1 = \alpha_1 \psi_0^2(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)} + \cdots + \alpha_m \psi^2_{m-1}(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)} + \gamma . \psi^2_m(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)},$$

d'où l'on tire la formule

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi'_1(\zeta_i)} = \frac{1}{\sum \alpha_{\mu+1}\,\psi^2_\mu(\zeta_i)} \qquad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ldots. m),$$

dans laquelle le dernier coefficient α_{m+1} sera égal à γ, coefficient de s dans le dernier dénominateur Z.

Ainsi pour toutes les racines

$$s = \zeta_0,\ \zeta_1,\ldots,\ \zeta_m$$

de l'équation

$$\Phi_1(s) = 0$$

on aura

$$\frac{\Phi_0(s)}{\Phi'_1(s)} = \frac{1}{\alpha_1\,\psi_0^2(s) + \alpha_2\,\psi_1^2(s) + \ldots. + \alpha_m\,\psi^2_{m-1}(s) + \gamma\,\psi^2_m(s)},$$

et comme, en vertu de (2) et (3), $s = v$ annule la fonction $\Phi_1(s)$, on obtient la formule

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi'_1(v)} = \frac{1}{\alpha_1\,\psi_0^2(v) + \alpha_2\,\psi_1^2(v) + \ldots + \alpha_m\,\psi^2_{m-1}(v) + \gamma\,\psi^2_m(v)}.$$

§ 8. Dans le § 1 nous avons montré que les limites de la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

et le résidu intégral

$$\mathcal{E}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(s)}{\Phi_1(s)}$$

sont données par

$$-\frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi'_1(v)},\quad +\frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi'_1(v)},$$

et l'on voit d'après la valeur trouvée de la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi'_1(v)}$$

que le degré d'approximation avec laquelle le résidu intégral

$$\mathcal{E}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_1(s)}$$

donne la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

sera déterminé par la fraction

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\ldots+\alpha_m\psi^2_{m-1}(v)+\gamma\psi^2_m(v)},$$

dans laquelle la quantité γ seule dépend des limites a, b des intégrales considérées.

Cette fraction augmente lorsque γ diminue, et elle diminue lorsque γ augmente. Comme la valeur de γ qui est toujours positive sera nulle pour $a=-\infty$, $b=\infty$, et deviendra infiniment grande pour $\psi_m(a)=0$ ou $\psi_m(b)=0$ (§§ 1 et 6), on voit que la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

et le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1(v)}$$

tendra vers zéro si a ou b s'approche indéfiniment de la valeur d'une racine de $\psi_m(s)$ et si v n'est pas racine de cette fonction, ce qui est bien conforme aux résultats auxquels nous sommes arrivés dans le § 5.

La limite (7) de cette différence atteindra au contraire sa plus grande valeur pour $a=-\infty$, $b=\infty$ et ce réduira pour ces valeurs des limites a, b à la fraction

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\ldots+\alpha_m\psi^2_{m-1}(v)}.$$

Il est facile de voir que la valeur de cette fraction diminue lorsque le nombre m augmente, et qu'elle deviendra nulle pour $m=\infty$, si la série

$$\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\alpha_3\psi_2^2(v)+\ldots.$$

est divergente. Cette fraction dépend évidemment de v aussi, et par conséquent, selon la valeur de v, le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(s)}{\Phi'_1(s)},$$

donnera la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

avec une approximation plus ou moins grande. Il est cependant facile de montrer que pour certaines valeurs de v la valeur de la fraction

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\ldots+\alpha_m\psi^2_{m-1}(v)},$$

et par conséquent aussi la valeur de la fraction (7) dont elle est la limite supérieure, sera plus petite que

$$\frac{1}{2m}\int_a^b f(x)\,\partial x.$$

En effet, en désignant par D la plus grande valeur du dénominateur

$$\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\ldots+\alpha_m\psi^2_{m-1}(v)$$

pour $a<v<b$, nous trouvons l'inégalité

$$\int_a^b\left(\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\ldots+\alpha_m\psi^2_{m-1}(v)\right)f(v)\,\partial v<D\int_a^b f(x)\,\partial x,$$

et comme d'après les formules

$$\int_a^b\psi_0^2(x)f(x)\,\partial x=\frac{1}{\alpha_1};\ \int_a^b\psi_1^2(x)f(x)\,\partial x=\frac{1}{\alpha_2},\ldots\int_a^b\psi^2_{m-1}(x)f(x)\,\partial x=\frac{1}{\alpha_m},$$

le premier membre de cette inégalité se réduit à m, on aura l'inégalité

$$m<D\int_a^b f(x)\,\partial x$$

ou bien

$$\frac{1}{2D}<\frac{1}{2m}\int_a^b f(x)\,\partial x.$$

On voit par là que $\frac{1}{2D}$ qui, conformément à notre notation, représente la plus petite valeur de la fraction

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\ldots+\alpha_m\psi^2_{m-1}(v)},$$

pour les valeurs de v comprises entre a et b, sera plus petite que

$$\frac{1}{2m}\int_a^b f(x)\,\partial x.$$

Donc, quelles que soient les limites a et b, la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

et le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

ne peut pas surpasser la valeur de la fraction

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\ldots+\alpha_m\psi^2_m(v)},$$

ou bien de la fraction

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{\psi_0^2(v)}{\int_a^b \psi_0^2(x)f(x)\,\partial x}+\dfrac{\psi_1^2(v)}{\int_a^b \psi_1^2(x)f(x)\,\partial x}+\ldots+\dfrac{\psi_{m-1}^2(v)}{\int_a^b \psi_{m-1}^2(x)f(x)\,\partial x}}$$

qu'on obtient en remplaçant les coefficients α par leurs valeurs tirées des formules

$$\int_a^b \psi_0^2(x)f(x)\,\partial x=\frac{1}{\alpha_1},\ \int_a^b \psi_1^2(x)f(x)\,\partial x=\frac{1}{\alpha_2},\ldots,\ \int_a^b \psi_{m-1}^2(x)f(x)\,\partial x=\frac{1}{\alpha_m}.$$

Les fonctions

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ldots,\ \psi_{m-1}(z)$$

sont déterminées, comme on a vu, à l'aide du développement de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx,$$

en fraction continue de la forme

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cfrac{1}{\alpha_3 z+\beta_3-\ldots}}}.$$

Et comme la valeur de la fraction

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{\psi_0^2(v)}{\int_a^b \psi_0^2(x)f(x)\,\partial x}+\dfrac{\psi_1^2(v)}{\int_a^b \psi_1^2(x)f(x)\,\partial x}+\ldots+\dfrac{\psi_{m-1}^2(v)}{\int_a^b \psi_{m-1}^2(x)f(x)\,\partial x}}$$

ne change pas lorsqu'on multiplie les fonctions ψ par des facteurs constants quelconques, nous pouvons y prendre pour les fonctions

$$\psi_0(s),\ \psi_1(s),\ldots,\ \psi_{m-1}(s),$$

les fonctions que l'on obtient en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{s-x}\,dx,$$

en fraction continue de la forme

$$\cfrac{\rho_1}{\alpha_1 s+\beta_1-\cfrac{\rho_2}{\alpha_2 s+\beta_2-\ldots-\cfrac{\rho_m}{\alpha_m s+\beta_m-\ldots}}},$$

les ρ étant des quantités constantes quelconques; car le changement des quantités ρ_1, ρ_2,... équivaut, comme il est facile de le voir, à l'introduction de facteurs constants dans ces fonctions.

Nous venons de montrer comment on détermine les limites de la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

et le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(s)}{\Phi_1(s)}$$

dans le cas où l'on donne les $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\partial x,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x,\ldots\ \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x$$

et si l'on sait que la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour les valeurs de x entre a et b.

Il est facile d'en déduire les limites de la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,\partial x$$

et

$$\int_a^v f_1(x)\,\partial x,$$

si l'on a les égalités

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = \int_a^b f_1(x)\,\partial x,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x = \int_a^b x f_1(x)\,\partial x, \ldots, \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x = \int_a^b x^{2m-1} f_1(x)\,\partial x,$$

et si la fonction $f_1(x)$ reste aussi positive pour les valeurs de x entre $x = a$, $x = b$. En effet, dans ce cas on aura les mêmes résidus intégraux et les mêmes limites des différences entre les intégrales et les résidus intégraux, et par conséquent la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,\partial x,\ \int_a^v f_1(x)\,\partial x$$

ne pourra pas surpasser le double de la limite de la différence entre chacune de ces intégrales et le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

Donc, si les égalités

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = \int_a^b f_1(x)\,\partial x,\ \int_a^b x f(x)\,\partial x = \int_a^b x f_1(x)\,\partial x, \ldots \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,\partial x = \int_a^b x^{2m-1} f_1(x)\,\partial x$$

ont lieu pour deux fonctions

$$f(x),\ f_1(x),$$

qui restent positives pour les valeurs de x entre a et b, la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,\partial x,\ \int_a^v f_1(x)\,\partial x,$$

ne pourra pas surpasser la valeur de la fraction

$$(8)\qquad \frac{1}{\alpha_1 \psi_0^2(v) + \alpha_2 \psi_1^2(v) + \ldots + \alpha_m \psi^2_{m-1}(v)},$$

quelles que soient les limites a et b.

§ 9. Comme exemple de l'application de nos formules nous allons maintenant considérer le cas où l'on a

$$a = -\infty,\ b = +\infty$$

et

$$f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2}.$$

Dans ce cas, comme on va le voir, la limite supérieure de la fraction (8) pourra être déterminée quelle que soit la valeur de v, et il en résulte un théorème qui peut avoir des applications utiles dans la Théorie des Probabilités.

D'après les formules données dans notre Mémoire *Sur le développement des fonctions à une seule variable* *), dans lequel nous avons étudié le développemment de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{k}{\pi}}\, e^{-ku^2}}{x-u}\, \partial u$$

en fraction continue et les réduites

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},\ \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots,$$

nous trouvons que, dans le cas que nous considérons maintenant, les fonctions

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \psi_2(z), \ldots$$

pourront être représentées par la formule

$$\psi_l(z) = e^{\frac{q^2}{2}z^2} \frac{\partial^l e^{-\frac{q^2}{2}z^2}}{\partial z^l},$$

et qu'on pourra les calculer successivement à l'aide de la formule

$$(9) \qquad \psi_l(z) = -q^2 z\, \psi_{l-1}(z) - (l-1) q^2 \psi_{l-2}(z)$$

et l'égalité

$$\psi_0(z) = 1.$$

D'autre part nous trouvons d'après ce même mémoire la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2} \psi_l^2(x)\, \partial x = 1.2.3\ldots l.q^{2l}.$$

*) T. I, p. 501—508.

En vertu de cette formule la fraction (8) qui détermine la limite de la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,\partial x, \quad \int_a^v f_1(x)\,\partial x$$

se ramène pour le cas que nous examinons à la fraction

$$\frac{1}{\psi_0^2(v)+\frac{\psi_1^2(v)}{1.q^2}+\ldots+\frac{\psi^2_{m-1}(v)}{1.2\ldots.(m-1)\,q^{2m-2}}},$$

dans laquelle les fonctions $\psi(v)$ seront déterminées par (9).

Pour déterminer la limite supérieure de cette fraction nous chercherons la limite inférieure de son dénominateur

$$\frac{\psi_0^2(v)}{1}+\frac{\psi_1^2(v)}{1.q^2}+\ldots+\frac{\psi^2_{m-1}(v)}{1.2\ldots.(m-1)\,q^{2m-2}}.$$

En posant

(10) $$\frac{\psi_i^2(v)}{\Gamma(i+1)\,q^{2i}}=T_i,$$

nous remarquons que ce dénominateur est égal à la somme

$$T_0+T_1+\ldots+T_{m-1}.$$

Pour trouver la limite inférieure de cette somme nous allons d'abord déterminer la fonction $\theta(t)$ définie par

$$\theta(t)=T_0+T_1\,t+T_2\,t^2+T_3\,t^3+\ldots,$$

où t désigne une variable quelconque.

§ 10. Pour déterminer la fonction $\theta(t)$ nous remarquons que d'après (9) on aura

$$\psi_l(v)=-q^2v\,\psi_{l-1}(v)-(l-1)\,q^2\psi_{l-2}(v),$$

et

$$\psi_{l-1}(v)=-q^2v\,\psi_{l-2}(v)-(l-2)\,q^2\psi_{l-3}(v),$$

d'où l'on tire

$$\psi_l^2(v)=q^4v^2\psi^2_{l-1}(v)+2\,(l-1)\,q^4v\,\psi_{l-1}(v)\,\psi_{l-2}(v)+(l-1)^2q^4\psi^2_{l-2}(v),$$

$$(l-2)^2q^4\psi^2_{l-3}(v)=\psi^2_{l-1}(v)+2\,q^2v\,\psi_{l-1}(v)\,\psi_{l-2}(v)+q^4v^2\psi^2_{l-2}(v),$$

et en éliminant entre ces deux équations le produit

$$\psi_{l-1}(v)\,\psi_{l-2}(v)$$

nous trouvons la relation

$$\psi_l^2(v)-(l-1)(l-2)^2q^6\psi^2_{l-3}(v)=q^2(q^2v^2-l+1)\psi^2_{l-1}(v)$$
$$-(l-1)\,q^4(q^2v^2-l+1)\,\psi^2_{l-2}(v).$$

Si maintenant on y remplace les fonctions

$$\psi_l^2(v),\ \psi^2_{l-1}(v),\ \psi^2_{l-2}(v),\ \psi^2_{l-3}(v)$$

par leurs valeurs tirées de (10), on aura l'équation

$$l\,T_l-(q^2v^2-l+1)\,T_{l-1}+(q^2v^2-l+1)\,T_{l-2}-(l-2)\,T_{l-3}=0.$$

Multiplions tous les termes par t^l et faisons la somme pour toutes les valeurs de l, de $l=0$ à $l=\infty$; nous aurons alors l'égalité

$$\sum_0^\infty l\,T_lt^l-\sum_0^\infty(q^2v^2-l+1)T_{l-1}t^l+\sum_0^\infty(q^2v^2-l+1)T_{l-2}t^l-\sum_0^\infty(l-2)\,T_{l-3}t^l=0.$$

En remarquant que d'après (10) on a

$$T_{-1}=0,\ T_{-2}=0,\ T_{-3}=0,$$

nous trouvons

$$\sum_0^\infty(q^2v^2-l+1)\,T_{l-1}t^l=\sum_0^\infty(q^2v^2-l)\,T_lt^{l+1},$$

$$\sum_0^\infty(q^2v^2-l+1)\,T_{l-2}t^l=\sum_0^\infty(q^2v^2-l-1)\,T_lt^{l+2},$$

$$\sum_0^\infty(l-2)\,T_{l-3}t^l=\sum_0^\infty(l+1)\,T_lt^{l+3},$$

en vertu de quoi l'égalité précédente se ramène à l'égalité

$$\sum_0^\infty l\,T_lt^l-\sum_0^\infty(q^2v^2-l)T_lt^{l+1}+\sum_0^\infty(q^2v^2-l-1)T_lt^{l+2}-\sum_0^\infty(l+1)T_lt^{l+3}=0,$$

d'où l'on déduit

$$(1+t-t^2-t^3)\sum_0^\infty l\,T_lt^{l-1}=(q^2v^2-(q^2v^2-1)\,t+t^2)\sum_0^\infty T_lt^l.$$

Comme d'après notre notation on a

$$\sum_0^\infty T_lt^l=\theta(t),$$

et par conséquent

$$\sum_0^\infty l T_l t^{l-1} = \theta'(t),$$

cette égalité se réduit à l'équation différentielle

$$(1+t-t^2-t^3)\theta'(t) = (q^2v^2-(q^2v^2-1)\,t+t^2)\,\theta(t),$$

qui, intégrée, donne

$$\theta(t) = C\frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

La constante d'intégration C se trouve facilement en remarquant que la fonction $\theta(t)$ se réduit pour $t=0$ à $T_0=\psi_0^2(v)=1$.

De sorte que l'on aura

$$C=1,$$

et par conséquent

$$\sum_0^\infty T_l t^l = \theta(t) = \frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

§ 11. D'après l'expression trouvée de la somme

$$\sum_0^\infty T_l t^l,$$

où t désigne une quantité variable, la limite inférieure de la somme

$$T_0+T_1+\ldots\ldots+T_{m-1}$$

pourra être déterminée à l'aide des formules données dans notre mémoire mentionné plus haut *Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux.* Pour appliquer les formules, données dans ce mémoire pour des intégrales, aux sommes

$$\sum_0^\infty T_l t^l,\ T_0+T_1 t+\ldots\ldots+T_{m-1}t^{m-1},$$

nous allons les présenter sous la forme des intégrales

$$\int_0^\infty Y t^x\,dx,\ \int_0^{m-1} Y t^x\,\partial x,$$

en désignant par Y une fonction de x qui s'annule pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas dans le voisinage de

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

et qui pour les valeurs de x infiniment voisines de

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

a des valeurs telles que les intégrales

$$\int_0^\omega Y\partial x,\ \int_{1-\omega}^1 Y\partial x,\ \int_{2-\omega}^2 Y\partial x, \ldots$$

tendent respectivement vers les valeurs

$$T_0,\ T_1,\ T_2, \ldots$$

lorsque ω tend vers zéro.

Pour une fonction Y ainsi déterminée on aura évidemment

$$\int_0^\infty Yt^x\,\partial x = \sum_0^\infty T_l t^l = \theta(t),$$

et

$$\int_0^{m-1} Yt^x\,\partial x = T_0 + T_1 t + \ldots + T_{m-1} t^{m-1}.$$

Comme la fonction Yt^x ne devient pas négative entre les limites 0 et ∞, les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v Yt^x\,\partial x$$

d'après les valeurs des trois intégrales

$$\int_0^\infty Yt^x\,\partial x,\ \int_0^\infty x\,Yt^x\,\partial x,\ \int_0^\infty x^2\,Yt^x\,\partial x$$

seront déterminées par les formules données dans les §§ 6 et 7 de notre Mémoire mentionné plus haut.

En faisant dans ces formules

$$a = 0,\ b = \infty,$$

nous trouvons que pour

$$v=\frac{\int_0^\infty x^2\, Y t^x\, \partial x}{\int_0^\infty x\, Y t^x\, \partial x},$$

la limite inférieure de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^v Y t^x\, \partial x$$

sera

$$\int_0^\infty Y t^x\, \partial x - \frac{\left(\int_0^\infty x\, Y t^x\, \partial x\right)^2}{\int_0^\infty x^2\, Y t^x\, \partial x}.$$

En remarquant que d'après l'égalité

$$\int_0^\infty Y t^x\, \partial x = \theta(t),$$

on aura

$$\int_0^\infty x\, Y t^x\, \partial x = t\,\theta'(t),$$

$$\int_0^\infty x^2\, Y t^x\, \partial x = t^2\,\theta''(t) + t\,\theta'(t),$$

nous en déduisons l'inégalité

$$\int_0^{\frac{t\,\theta''(t)}{\theta'(t)}+1} Y t^x\, \partial x \geqq \theta(t) - \frac{t\,(\theta'(t))^2}{t\,\theta''(t)+\theta'(t)}.$$

En prenant ici pour t une racine quelconque de l'équation

(11) $$m = \frac{t\,\theta''(t)}{\theta'(t)} + 2,$$

nous trouvons l'inégalité

$$\int_0^{m-1} Y t^x\, \partial x \geqq \theta(t) - \frac{t\,(\theta'(t))^2}{t\,\theta''(t)+\theta'(t)}.$$

Comme d'aprés les propriétés de la fonction Y on aura

$$\int_0^{m-1} Yt^x \partial x = T_0 + T_1 t + \ldots + T_{m-1} t^{m-1},$$

l'inégalité précédente se réduit à celle-ci:

$$T_0 + T_1 t + \ldots + T_{m-1} t^{m-1} \gtreqq \theta(t) - \frac{t(\theta'(t))^2}{t\theta''(t) + \theta'(t)}.$$

qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de t satisfaisant à (11).

Donc, en se bornant aux valeurs de t comprises entre 0 et 1 et remarquant que pour ces valeurs de t on aura

$$T_0 + T_1 t + \ldots + T_{m-1} t^{m-1} < T_0 + T_1 + \ldots + T_{m-1},$$

on devra avoir l'inégalité

$$T_0 + T_1 + \ldots + T_{m-1} > \theta(t) - \frac{t(\theta'(t))^2}{t\theta''(t) + \theta'(t)},$$

d'après laquelle nous pouvons trouver une limite inférieure de la somme

$$S_{m-1} = T_0 + T_1 + \ldots + T_{m-1},$$

en prenant pour t une racine de (11) comprise entre 0 et 1.

§ 12. En portant les valeurs de $\theta'(t)$, $\theta''(t)$ tirées de § 10, on trouve

$$(12) \qquad m - 1 = \frac{2t + \frac{(1-t)^3}{1+t} q^2 v^2 + t\left(t + \frac{1-t}{1+t} q^2 v^2\right)^2}{\left(t + \frac{1-t}{1+t} q^2 v^2\right)(1-t^2)},$$

et

$$(13) \qquad S_{m-1} > \frac{e^{\frac{q^2 v^2 t}{1+t}}}{\sqrt{1-t^2}} \; \frac{2t + \frac{(1-t)^3}{1+t} q^2 v^2}{2t + \frac{(1-t)^3}{1+t} q^2 v^2 + t\left(t + \frac{1-t}{1+t} q^2 v^2\right)^2}.$$

La dernière inégalité nous donne la limite inférieure de la somme

$$S_{m-1} = T_0 + T_1 + \ldots + T_{m-1}$$

en fonction de la racine t de (12) comprise entre 0 et 1.

Il est facile de voir que pour $m > 1$, comme nous le supposons toujours, l'équation (12) admettra bien une racine entre 0 et 1; mais la détermination exacte de cette racine est très difficile.

Comme il ne s'agit ici que de trouver une quantité qui reste constam-

ment plus petite que $\sum_0^{m-1} T_i$, nous pouvons y arriver sans résoudre l'équation (12).

Pour cela nous tirons de (12) la valeur de $\sqrt{m-1}$ et nous divisons par elle l'inégalité (13), ce qui nous donne une inégalité qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{S_{m-1}}{\sqrt{m-1}} > \frac{e^{\frac{q^2 v^2 t}{1+t}} \left(t+\frac{1-t}{1+t} q^2 v^2\right)^{-\frac{5}{2}} \left(2t+\frac{(1-t)^2}{1+t} q^2 v^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1-t}{1+t} q^2 v^2\right)^2}+\frac{t}{2t+\frac{(1-t)^2}{1+t} q^2 v^2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

En remarquant que la valeur de t dans cette inégalité doit être plus grande que zéro et plus petite que l'unité, nous trouvons

$$e^{\frac{q^2 v^2 t}{1+t}} > 1,$$

$$t+\frac{1-t}{1+t} q^2 v^2 < 1+q^2 v^2,$$

$$2t+\frac{(1-t)^2}{1+t} q^2 v^2 < 2+q^2 v^2 < 2(1+q^2 v^2),$$

$$t+\frac{1-t}{1+t} q^2 v^2 > t+\frac{1-t}{2} q^2 v^2,$$

$$\frac{t}{2t+\frac{(1-t)^2}{1+t} q^2 v^2} < \frac{1}{2};$$

en vertu de quoi l'inegalité précédente nous donne

$$(14) \qquad \frac{S_{m-1}}{\sqrt{m-1}} > \frac{(q^2 v^2+1)^{-3}}{\sqrt{2}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1-t}{2} q^2 v^2\right)^2}+\frac{1}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Passant à la détermination d'une limite inférieure de

$$t+\frac{1-t}{2} q^2 v^2$$

nous remarquons que l'équation (12) peut s'écrire

$$(m-1)(1-t^2) = t^2+\frac{(1-t)t}{1+t} q^2 v^2+\frac{2t+\frac{(1-t)^2}{1+t} q^2 v^2}{t+\frac{1-t}{1+t} q^2 v^2}.$$

Comme t est comprise entre 0 et 1, tous les termes seront positifs et l'on aura

$$(m-1)(1-t^2) > t^2,$$

d'où l'on déduit

$$m(1-t^2)>1,$$

ce qui donne

$$1-t>\frac{1}{m(1+t)},$$

et par consequent

$$1-t>\frac{1}{2m}.$$

D'autre part, en cherchant les maxima des fonctions

$$\frac{(1-t)t}{1+t},\quad \frac{2t+\frac{(1-t)^2}{1+t}q^2v^2}{t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2}$$

pour $0<t<1$, nous trouvons qu'ils s'obtiennent pour

$$t=\sqrt{2}-1,\ t=1$$

et qu'ils sont respectivement égaux à

$$3-\sqrt{8},\ 2,$$

en vertu de quoi l'équation précédente nous donne

$$(m-1)\ (1-t^2)<t^2+2+(3-\sqrt{8})\,q^2v^2;$$

d'où l'on déduit

$$m(1-t^2)<3+(3-\sqrt{8})\,q^2v^2$$

et

$$1-t<\frac{3+(3-\sqrt{8})\,q^2v^2}{m},$$

ce qui donne

$$t>1-\frac{3+(3-\sqrt{8})\,q^2v^2}{m}.$$

Ainsi, nous trouvons que

$$t>1-\frac{3+(3-\sqrt{8})\,q^2v^2}{m},\ 1-t>\frac{1}{2m}$$

et l'on aura par conséquent

$$t+\frac{1-t}{2}q^2v^2>1-\frac{3}{m}+\frac{\sqrt{8}-\frac{11}{4}}{m}q^2v^2>1-\frac{3}{m},$$

de sorte que l'inégalité (14), en y remplaçant

$$t+\frac{1-t}{2}q^2v^2 \text{ par } 1-\frac{3}{m},$$

nous donnera

$$\frac{S_{m-1}}{\sqrt{m-1}} > \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{(m-3)^3}{(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(q^2 v^2+1)^3},$$

ou bien

$$S_{m-1} > \frac{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(q^2 v^2+1)^3}.$$

En remarquant que, conformément à notre notation, on a

$$S_{m-1} = T_0 + T_1 + \ldots + T_{m-1} = \frac{\psi_0^2(v)}{1} + \frac{\psi_1^2(v)}{1.q^2} + \ldots + \frac{\psi^2_{m-1}(v)}{1.2\ldots(m-1)q^{2m-2}},$$

nous en concluons que la fraction

$$\frac{1}{\frac{\psi_0^2(v)}{1} + \frac{\psi_1^2(v)}{1.q^2} + \ldots + \frac{\psi^2_{m-1}(v)}{1.2\ldots(m-1)q^{2m-2}}}$$

sera plus petite que

$$\frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

Comme d'après le § 9 cette fraction donne les limites de la différence des intégrales

$$\int_{-\infty}^{v} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x, \quad \int_{-\infty}^{v} f_1(x)\,\partial x,$$

si l'on a les égalités

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\partial x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,\partial x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,\partial x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x,$$

. . . .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f_1(x)\,\partial x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^{2m-2} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f_1(x)\,\partial x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^{2m-1} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x,$$

la fonction $f_1(x)$ restant constamment positive, et comme on a

$$\int_{-\infty}^{v} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} \partial x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x = \frac{1}{q^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^{2m-2} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x = \frac{1.3.5\ldots.(2m-3)}{q^{2m-2}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^{2m-1} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} \partial x = 0,$$

nous en déduisons le théorème suivant:

Théorème.

Si la fonction $f_1(x)$ reste constamment positive et si l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\partial x = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,\partial x = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,\partial x = \frac{1}{q^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_1(x)\,\partial x = 0,$$

. . . .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f_1(x)\,\partial x = \frac{1.3.5\ldots.(2m-3)}{q^{2m-2}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f_1(x)\,\partial x = 0,$$

la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f_1(x)\,\partial x$$

sera comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} \partial x - \frac{3\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}\,(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} \partial x + \frac{3\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}\,(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

pour toutes les valeurs réelles de v.

24.

SUR DEUX THÉORÈMES RELATIFS AUX PROBABILITÉS.

(TRADUIT PAR I. LYON.)

(Lu le 10 mars 1887.)

О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей.

(Приложеніе къ LV-му тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 6, 1887 г.
Acta mathematica. T. XIV, 1890—1891, p. 805—815.)

Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités.

§ 1. Dans un Mémoire, sous le titre: *Des valeurs moyennes* *), nous avons montré comment on obtient des *inégalités*, d'où l'on déduit facilement un théorème sur les probabilités qui contient comme cas particuliers le théorème de Bernoulli et la loi des grands nombres.

Ce théorème, nous l'avons formulé ainsi:

Si les espérances mathématiques des quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,$$

et de leurs carrés

$$u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2, \ldots$$

ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique d'un nombre n de ces quantités et la moyenne arithmétique de leurs espérances mathématiques sera moindre qu'une quantité donnée, se réduit à l'unité, lorsque n devient infini.

Nous avons été conduit à ce résultat en cherchant à déterminer les valeurs limites d'une intégrale d'après les valeurs données des autres intégrales qui contiennent sous le signe $\int$, outre les fonctions connues, une fonction inconnue, assujettie à la seule condition de ne pas devenir négative entre les limites d'intégration. En développant la méthode employée dans ces recherches nous arrivons, dans un cas particulier, au théorème suivant sur les intégrales **):

---

*) T. I, p. 687—694.
**) T. II, p. 443—478.

Si la fonction $f(x)$ reste constamment positive et si l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\partial x = 1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\partial x = 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\partial x = \frac{1}{q^2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\,\partial x = 0,$$

. . . .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x)\,\partial x = \frac{1.3.5\ldots.(2m-3)}{q^{2m-2}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,\partial x = 0,$$

la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,\partial x$$

sera comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,\partial x - \frac{3\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}\,(q^2v^2+1)^3}{2\,(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,\partial x + \frac{8\sqrt{8}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}\,(q^2v^2+1)^3}{2\,(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

pour toutes les valeurs réelles de v.

Nous allons montrer maintenant, comment ce théorème sur les intégrales conduit à un théorème sur les probabilités, à l'aide duquel la détermination des valeurs les plus sûres des inconnues, quand on a un grand nombre d'équations qui contiennent des erreurs accidentelles plus ou moins considérables, se ramène à la méthode *des moindres carrés.*

Ce théorème peut être ainsi formulé:

Si les espérances mathématiques des quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots.$$

sont toutes nulles et si les espérances mathématiques de toutes leurs puissances ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la somme

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. + u_n,$$

d'un nombre n de ces quantités, divisée par la racine carrée de la double

somme des espérances mathématiques de leurs carrés, sera comprise entre deux limites quelconques t et t', se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t}^{t'} e^{-x^2}\,\partial x.$$

lorsque le nombre n devient infini.

§ 2. Pour démontrer ce théorème sous la forme la plus générale, nous prendrons $-\infty$ et $+\infty$ pour les limites entre lesquelles sont comprises toutes les valeurs possibles des quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots.$$

En désignant par

$$\varphi_1(x)\,\partial x,\ \ \varphi_2(x)\,\partial x,\ \ \varphi_3(x)\,\partial x,\ldots.$$

les probabilités que les valeurs des quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots.$$

sont comprises entre les limites infiniment voisines

$$x,\ x+\partial x,$$

nous remarquons:

1) que les fonctions

$$\varphi_1(x),\ \ \varphi_2(x),\ \ \varphi_3(x),\ldots.$$

ne peuvent pas avoir des valeurs négatives;

2) que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(u_1)\,\partial u_1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(u_2)\,\partial u_2,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_3(u_3)\,\partial u_3,\ldots.,$$

qui représentent les probabilités que les quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots.$$

auront des valeurs quelconques comprises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, seront égales à l'unité;

3) que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_1\varphi_1(u_1)\,\partial u_1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}u_2\varphi_2(u_2)\,\partial u_2,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}u_3\varphi_3(u_3)\,\partial u_3,\ldots.,$$

qui représentent les espérances mathématiques des quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots.,$$

d'après notre hypothèse, doivent être nulles;

4) qu'en général, toutes les quantités $a_i^{(\mu)}$ définies par l'égalité

$$a_i^{(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i^{\mu} \varphi_i(u_i)\,\partial u_i,$$

qui représentent les espérances mathématiques des différentes puissances des quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots.$$

seront, par hypothèse, comprises entre des limites finies.

D'autre part, en désignant par

$$f(x)\,\partial x$$

la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

sera comprise entre les limites infiniment voisines

$$x,\ x + \partial x,$$

nous remarquons que cette probabilité sera donnée par l'égalité

$$f(x)\,\partial x = \int \ldots \int \varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2) \ldots \varphi_n(u_n)\,\partial u_1\,\partial u_2 \ldots \partial u_n,$$

dans laquelle l'intégration par rapport à u_1, u_2, ... u_n s'étend sur toutes les valeurs de ces quantités pour lesquelles la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

ne sort pas des limites infiniment voisines x, $x + \partial x$.

En multipliant cette égalité membre à membre avec l'égalité

$$e^{sx} = e^{\frac{s(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)}{\sqrt{n}}},$$

où s désigne une constante arbitraire quelconque, et en intégrant de $x = -\infty$ à $x = \infty$, nous trouvons l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,\partial x = \int \ldots \int e^{\frac{s(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2) \ldots \varphi_n(u_n)\,\partial u_1\,\partial u_2 \ldots \partial u_n.$$

Comme dans le second membre l'intégration par rapport à

$$u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n$$

s'étend sur toutes les valeurs de ces quantités entre $-\infty$ et $+\infty$, le second membre de cette égalité se réduit au produit des intégrales simples

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)\,\partial u_1 . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2)\,\partial u_2 \ldots . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n)\,\partial u_n;$$

nous aurons donc l'égalité

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,\partial x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)\,\partial u_1 . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2)\,\partial u_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n)\,\partial u_n.$$

En développant les deux membres de cette égalité suivant les puissances de la constante arbitraire s et en égalant les coefficients des mêmes puissances de s, nous trouverons les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\partial x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\partial x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\partial x, \ldots,$$

qui représentent les espérances mathématiques des différentes puissances de la quantité

$$x = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}},$$

et qui nous serviront à déterminer les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,\partial x,$$

qui représente la probabilité que la valeur de la fraction

$$x = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

ne dépassera pas une quantité quelconque v.

§ 3. En nous bornant à la détermination de $2m$ intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\partial x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\partial x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\partial x, \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,\partial x,$$

nous remarquons que le premier membre de l'égalité (1), développé suivant les puissances de s jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1}, donnera la somme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\partial x + \frac{s}{1}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\partial x + \frac{s^2}{1.2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\partial x + \ldots + \frac{s^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,\partial x.$$

Pour déterminer les termes correspondants dans le second membre, nous allons le mettre sous la forme

$$e^{\log\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}}\varphi_1(u_1)\,\partial u_1 + \log\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}}\varphi_2(u_2)\,\partial u_2 + \ldots + \log\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}}\varphi_n(u_n)\,\partial u_n},$$

et l'on voit que le développement du second membre de (1), exact jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1} inclusivement, s'obtiendra en y remplaçant les logarithmes par leurs développements en séries arrêtés aux termes de l'ordre s^{2m-1}. Pour déterminer les développements de ces logarithmes, nous remarquons que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}}\varphi_i(u_i)\,\partial u_i,$$

sera donnée par l'expression approximative suivante, exacte jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1} inclusivement:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_i(u_i)\,\partial u_i + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i\varphi(u_i)\,\partial u_i}{1.\sqrt{n}}s + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^2\varphi_i(u_i)\,\partial u_i}{1.2.n}s^2 + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^3\varphi_i(u_i)\,\partial u_i}{1.2.3n\sqrt{n}}s^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_i^{2m-1}\varphi_i(u_i)\,\partial u_i}{1.2.3\ldots(2m-1)\,n^{m-1}\sqrt{n}}s^{2m-1},$$

et cette expression, d'après le § 2, se réduit à

$$1 + \frac{a_i^{(2)}}{2n}s^2 + \frac{a_i^{(3)}}{1.2.3n\sqrt{n}}s^3 + \ldots + \frac{a_i^{(2m-1)}}{1.2\ldots(2m-1)\,n^{m-1}\sqrt{n}}s^{2m-1},$$

où, par hypothèse, les quantités a_i sont toutes finies.

En développant le logarithme de cette expression suivant les puissances de s et en s'arrêtant au terme de l'ordre s^{2m-1}, nous trouverons une expression de la forme

$$\frac{a_i^{(2)}}{2n}s^2 + \frac{V_i^{(3)}}{n\sqrt{n}}s^3 + \ldots + \frac{V_i^{(2m-1)}}{n^{m-1}\sqrt{n}}s^{2m-1},$$

dans laquelle les quantités

$$V_i^{(3)}, \ldots V_i^{(2m-1)}$$

seront des fonctions entières des quantités

$$a_i^{(2)},\ a_i^{(3)}, \ldots,\ a_i^{(2m-1)},$$

ne contenant pas n; elles seront donc aussi toutes finies.

On aura donc, avec un degré d'approximation jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1} inclusivement,

$$\log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i)\,\partial u_i = \frac{a_i^{(2)}}{2n} s^2 + \frac{V_i^{(3)}}{n\sqrt{n}} s^3 + \ldots + \frac{V_i^{(2m-1)}}{n^{m-1}\sqrt{n}} s^{2m-1}.$$

En y faisant $i = 1, 2, \ldots, n$ et en posant

$$\frac{1}{q^2} = \frac{a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)}}{n},$$

$$M^{(3)} = \frac{V_1^{(3)} + V_2^{(3)} + \ldots + V_n^{(3)}}{n},$$

. . . .

$$M^{(2m-1)} = \frac{V_1^{(2m-1)} + V_2^{(2m-1)} + \ldots V_n^{(2m-1)}}{n}.$$

on trouve, avec le même degré d'approximation,

$$\log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)\,\partial u_1 + \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2)\,\partial u_2 + \ldots + \log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n)\,\partial u_n$$

$$= \frac{s^2}{2q^2} + \frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}} s^3 + \ldots + \frac{M^{(2m-1)}}{n^{m-2}\sqrt{n}} s^{2m-1},$$

où les quantités M, comme les moyennes arithmétiques des quantités finies

$$V_1^{(3)},\ V_2^{(3)}, \ldots\ V_n^{(3)},$$

. . . .

$$V_1^{(2m-1)},\ V_2^{(2m-1)} \ldots\ V_n^{(2m-1)},$$

seront aussi toutes finies.

On aura donc, avec un degré d'approximation jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1},

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,\partial x = e^{\frac{s^2}{2q^2} + \frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}} s^3 + \ldots + \frac{M^{(2m-1)}}{n^{m-2}\sqrt{n}} s^{2m-1}}.$$

§ 4. Quel que soit n, nous pourrons tirer de cette égalité les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\partial x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\partial x, \ldots \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,\partial x,$$

en arrêtant les développements des deux membres de cette égalité aux termes de l'ordre s^{2m-1}.

Dans le cas particulier $n = \infty$, l'égalité (2) se réduit à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,\partial x = e^{\frac{s^2}{2q^2}}.$$

puisque les quantités M, comme on a vu, sont toutes finies.

En développant les deux membres de cette égalité suivant les puissances de s et en s'arrêtant aux termes de l'ordre s^{2m-1}, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \frac{s}{1}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\partial x + \ldots + \frac{s^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,\partial x =$$

$$= 1 + \frac{s^2}{2q^2} + \frac{s^4}{1.2.(2q^2)^2} + \ldots + \frac{s^{2m-2}}{1.2\ldots(m-1)\,(2q^2)^{m-1}}$$

et, en égalant les coefficients des mêmes puissances de s, nous trouvons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\partial x = 1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\partial x = 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\partial x = \frac{1}{q^2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\,\partial x = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x)\,\partial x = \frac{1.3.5\ldots.(2m-3)}{q^{2m-2}},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)\,\partial x = 0.$$

Comme la fonction $f(x)$ qui figure sous le signe $\int$, par sa nature même, ne peut pas avoir des valeurs négatives, nous concluons, d'après le théorème sur les intégrales cité au § 1, que la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,\partial x$$

est comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,\partial x - \frac{3\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}\,(q^2v^2+1)^3}{2\,(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,\partial x + \frac{3\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}\,(q^2v^2+1)^3}{2\,(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

D'où, en remarquant que la valeur de la fraction

$$\frac{3\sqrt{8}}{2}\,\frac{(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{(m-3)^3\sqrt{m-1}}$$

tend vers zéro lorsque le nombre m augmente indéfiniment, nous tirons l'égalité

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,\partial x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,\partial x,$$

En y faisant successivement

$$v=\frac{\sqrt{2}}{q}\,t, \quad v=\frac{\sqrt{2}}{q}\,t',$$

nous trouvons les égalités

$$\int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t} f(x)\,\partial x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2}\,\partial x, \quad \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)\,\partial x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t'} e^{-x^2}\,\partial x,$$

qui par la soustraction nous donnent

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{q}t}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)\,\partial x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t}^{t'} e^{-x^2}\,\partial x.$$

Le premier membre de cette égalité, d'après le § 2, représente la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}$$

sera comprise entre les limites

$$\frac{\sqrt{2}}{q}\,t, \quad \frac{\sqrt{2}}{q}\,t',$$

et par conséquent la valeur de la fraction

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{\frac{2n}{q^2}}} = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{2\,(a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+\ldots+a_n^{(2)})}},$$

sera comprise entre les limites t et t'; en vertu de quoi cette égalité qui a lieu pour $n = \infty$ montre que la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)})}}$$

sera comprise entre deux limites quelconques t et t', a pour limite, lorsque n augmente indéfiniment, la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} \partial x.$$

Dans le cas de n fini, la probabilité que la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)})}}$$

sera comprise entre les limites t et t', différera plus ou moins de sa valeur limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} \partial x$$

selon la valeur de n et des quantités

$$q, \; M^{(3)}, \ldots \; M^{(2m-1)},$$

qui figurent dans l'égalité (2) et dont les valeurs, comme on a vu, dépendent des valeurs des espérances mathématiques des différentes puissances des quantités

$$u_1, \; u_2, \ldots \; u_n,$$

Sans nous arrêter ici à la détermination de la limite supérieure de cette différence pour n assez grand, nous remarquerons seulement que d'après les formules de notre Mémoire *Sur le développement des fonctions à une seule variable* *), cette probabilité pour n quelconque sera donnée par l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} \left[1 - K_3 \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3 \psi_3(x) + K_4 \left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^4 \psi_4(x) + \ldots\right] e^{-x^2} \partial x,$$

*) T. I, стр. 501—508.

dans laquelle les quantités

$$K_3,\ K_4,\ \ldots.$$

sont les coefficients de

$$s^3,\ s^4,\ \ldots.$$

dans le développement de la fonction

$$e^{\frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}} s^2 + \frac{M^{(4)}}{n} s^4 + \ldots}$$

suivant les puissances de s; et les fonctions

$$\psi_3(x),\ \psi_4(x),\ \ldots.$$

sont des polynômes qui s'obtiennent par la formule

$$\psi_l(x) = e^{x^2} \frac{\partial^l e^{-x^2}}{\partial x^l}.$$

25.

SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ LE PLUS SIMPLE

DONNANT DES MOUVEMENTS SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT À UN AXE.

(TRADUIT PAR P. O. SOMOF.)

(Lu le 15 novembre 1888.)

О простѣйшей суставчатой системѣ,

доставляющей движенія симметрическія около оси.

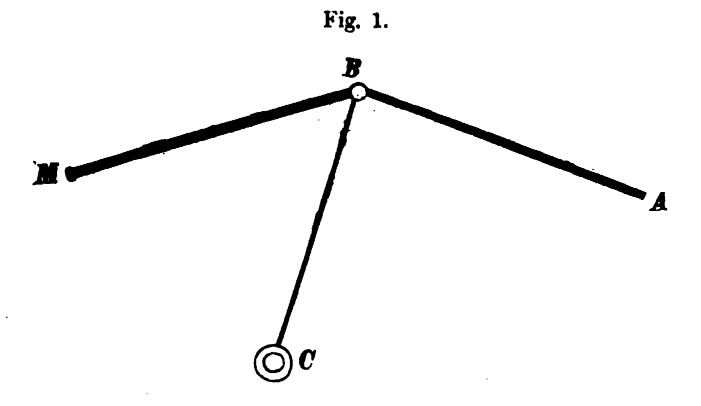
(Приложеніе къ LX тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 1, 1889 г.)

Sur le système articulé le plus simple donnant des mouvements symétriques par rapport à un axe.

---

§ 1. Le plus simple moyen pour transformer un mouvement plan se présente en un système articulé formé d'une ligne, qui tourne autour d'un centre fixe, et d'une ligne réunie à la première par une articulation. Tous les points de la première ligne décrivent seulement des cercles concentriques, tandis que les points de l'autre ligne peuvent décrire des courbes diverses, et les trajectoires de leurs différents points se distinguent considérablement l'une de l'autre par leur forme. Par suite, quand un point de cette ligne décrit une courbe quelconque, on reçoit pour les autres points des mouvements sur des courbes différentes. Dans cette transformation du mouvement, les points de la seconde ligne, dont les distances à l'axe d'articulation avec la première ligne sont égales à la distance de cet axe au centre fixe de rotation, appellent la plus grande attention. Il est aisé de démontrer que, si un tel point décrit une courbe symétrique par rapport à un axe passant par le centre fixe de rotation, un autre point quelconque se meut sur une ligne ayant la même propriété. On voit de là que chaque ligne

Fig. 1.



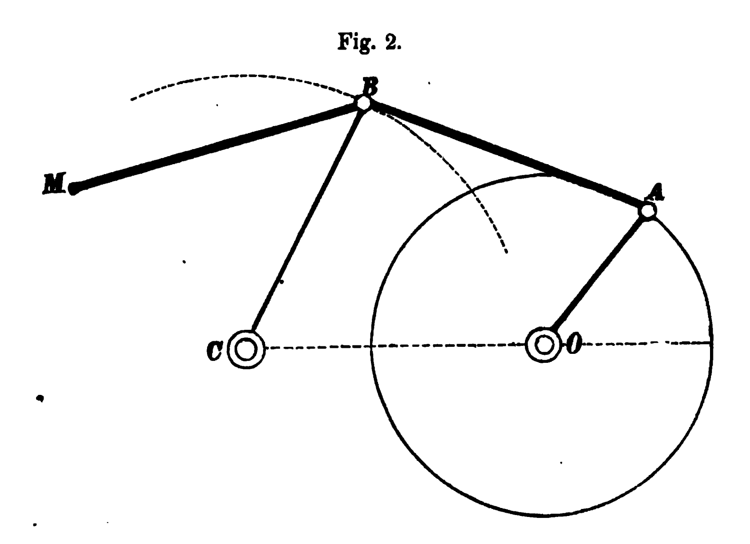
brisée ABM (fig. 1), articulée avec la droite BC, qui tourne autour du centre fixe, fournit, lors de l'égalité

$$AB = BM = BC,$$

un moyen pour transformer le mouvement sur une courbe symétrique par rapport à un axe passant par le centre C, en un mouvement sur une autre courbe ayant la même propriété. La forme et la position de cette dernière courbe changent avec le changement de l'angle ABM et de la position du centre C qui, selon ce que nous avons dit plus haut, doit rester sur l'axe de symétrie de la première courbe.

En transformant ainsi le mouvement d'un point A, qui se trouve à l'extrémité du rayon OA tournant autour du centre O, nous recevons un sy-

Fig. 2.



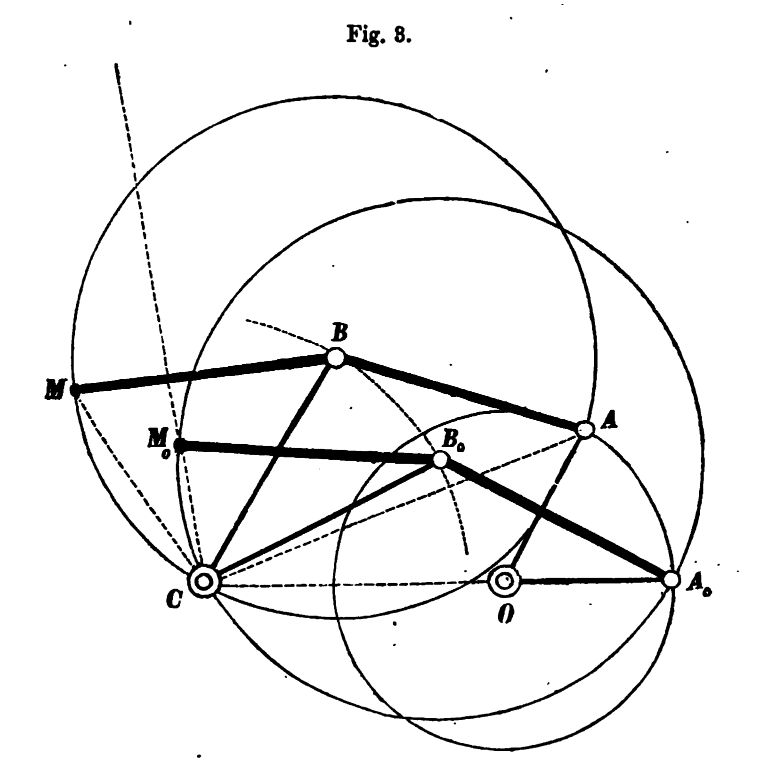
stème articulé, dans lequel le point M décrit une ligne symétrique par rapport à un axe qui passe par le centre O. Si la distance CO surpasse la longueur du rayon OA, celui-ci est en état d'accomplir un tour complet, après quoi le point M retourne à sa place primitive, ayant décrit une courbe fermée symétrique par rapport à un axe passant par le centre C.

Une telle transformation du mouvement circulaire peut présenter des applications utiles, s'il est demandé de produire un mouvement, auquel s'approche suffisamment le mouvement du point M de notre système articulé quand on donne des dimensions convenables à ses parties et des positions convenables à ses centres fixes de rotation. Toute la difficulté réside dans la détermination des unes et des autres conformément à la forme du mouvement qu'il est proposé d'obtenir. Nous nous proposons de considérer ici les cas les plus simples et qui se rencontrent le plus souvent en pratique, à savoir: quand on a en vue d'obtenir un mouvement sur une courbe, dont une partie plus ou moins considérable ne diffère pas beaucoup d'un arc de cercle ou d'une ligne droite.

§ 2. Dans le système considéré les points A, B décrivent des cercles

dont les centres sont O, C; et comme les longueurs des lignes AB, BM et la

Fig. 8.



valeur de l'angle ABM restent constantes, on aura les égalités suivantes:

$$ABM = A_0B_0M_0,$$
$$OA = OA_0, \quad CB = CB_0.$$

Il résulte de la dernière de ces égalités que les six lignes suivantes sont égales:

$$A_0B_0, \; B_0M_0, \; B_0C, \; AB, \; BM, \; BC,$$

car, d'après ce que nous avons dit dans le § 1,

$$A_0B_0 = B_0M_0 = B_0C,$$
$$AB = BM = BC.$$

D'où il est clair que les points A_0, C, M_0 se trouvent sur le cercle décrit du centre B_0, et les points A, C, M sur le cercle dont le centre est en B; ensuite, les angles ACM, ABM, A_0CM_0, $A_0B_0M_0$ sont liés par les égalités

$$2ACM + ABM = 2\pi,$$
$$2A_0CM_0 + A_0B_0M_0 = 2\pi,$$

qui donnent

$$2ACM + ABM = 2A_0CM_0 + A_0B_0M_0.$$

En remarquant que

$$ABM = A_0B_0M_0,$$

$$ACM = ACM_0 + M_0CM, \quad A_0CM_0 = ACM_0 + A_0CA,$$

nous obtenons

(1) $$M_0CM = A_0CA.$$

En nous appuyant sur cette formule et posant

$$OA_0 = OA = r, \quad OC = d,$$

$$AB = BM = BC = A_0B_0 = B_0M_0 = B_0C = 1,$$

$$ABM = A_0B_0M_0 = \omega,$$

cherchons à présent la longueur du rayon vecteur CM et l'angle de son inclinaison à la ligne CM_0, qui déterminent le lieu du point M pour un angle donné de l'inclinaison du rayon OA à la ligne des centres COA_0. Ces quantités s'expriment très simplement par l'angle ABC dont la valeur variable sera désignée par la lettre φ et à l'aide duquel il est facile de déterminer la position correspondante du rayon OA.

Dans le triangle isocèle CBM, où

$$CB = 1, \quad BM = 1,$$

nous avons

(2) $$CM = 2 \sin \frac{CBM}{2},$$

ce qui donne, d'après l'égalité

$$CBM = ABM - ABC = \omega - \varphi$$

la formule pour le rayon vecteur CM:

$$CM = 2 \sin \frac{\omega - \varphi}{2}.$$

Passant à la détermination de l'angle de son inclinaison à la ligne CM_0, nous trouvons d'après (1)

$$MCM_0 = ACA_0,$$

mais du triangle ACO nous tirons

$$\cos ACA_0 = \frac{AC^2 + CO^2 - AO^2}{2AC.OC};$$

par suite, on obtient pour l'angle MCM_0 la formule

$$\cos MCM_0 = \frac{AC^2 + CO^2 - AO^2}{2AC.OC}.$$

En remarquant que le triangle isocèle ACB, où

$$AB = 1,\ BC = 1,\ ABC = \varphi,$$

donne

$$AC = 2 \sin\frac{\varphi}{2},$$

et que d'après notre notation

$$AO = r,\ CO = d,$$

nous trouvons par cette formule

$$\cos MCM_0 = \frac{4 \sin^2\frac{\varphi}{2} + d^2 - r^2}{4\,d \sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Dans cette relation le signe de l'angle MCM_0 reste inconnu. Il est facile de le déterminer, en remarquant que, d'après (1), l'angle MCM_0 est égal à l'angle ACA_0; mais l'angle ACA_0 a une valeur positive ou négative selon que le point A est situé au dessus ou au dessous de la ligne des centres COA_0. Par conséquent, à la même valeur de l'angle φ correspondent deux positions tant du point A que du point M; dans l'une de ces positions le point A se trouve au dessus de la ligne des centres COA_0 et le point M à gauche de la droite CM_0, l'autre position du point A sera au dessous de la ligne COA_0 et le point M se trouve à droite de la ligne CM_0. Quant à la détermination de l'angle AOA_0, étant donné l'angle φ, on aura du triangle AOC

$$\cos AOA_0 = \frac{AC^2 - AO^2 - OC^2}{2AO.OC}.$$

En remarquant que

$$AC = 2 \sin\frac{\varphi}{2},\ AO = r,\ OC = d,$$

nous déduisons de la relation précédente

$$\cos AOA_0 = \frac{4 \sin^2\frac{\varphi}{2} - r^2 - d^2}{2\,dr}.$$

Comme, d'après ce qu'on a fait voir plus haut, à la même valeur de l'angle φ correspondent deux positions tant du rayon OA que du rayon vecteur CM, qui diffèrent seulement par les signes des angles AOA_0, MCM_0, nous voyons que le point M décrira une ligne symmétrique par rapport à l'axe CM_0, pendant que le rayon OA se tournera d'un même angle en haut

et en bas de la ligne des centres COA_0. Représentant par α la valeur limite de l'angle AOA_0 dans le mouvement considéré et par

$$\varphi_0, \varphi_1$$

les valeurs de l'angle $ABC = \varphi$, qui correspondent à

$$AOA_0 = 0, \; AOA_0 = \pm \alpha,$$

nous voyons que, pendant que l'angle AOA_0 varie entre 0 et α ou $-\alpha$, l'angle φ passe de la valeur φ_0 à φ_1.

En appliquant la formule que nous venons d'établir au cas spécial

$$AOA_0 = \alpha, \; \varphi = \varphi_1,$$

nous trouvons l'équation suivante entre les valeurs limites des angles ACA_0 et $ABC = \varphi_1$:

$$\cos \alpha = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} - d^2 - r^2}{2\,dr};$$

d'où il suit

(3) $$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(d+r)^2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}}{4\,dr}.$$

§ 3. Passant à la détermination des conditions pour que la courbe décrite par le point M entre les limites indiquées s'écarte le moins d'un arc du cercle quelconque, nous observons que cet arc, de même que la trajectoire du point M, doit être symétrique par rapport à l'axe CM_0, et pour cela son centre doit être situé sur cet axe. En supposant que ce centre se trouve en O_1 (fig. 4), déduisons à présent la formule pour déterminer la distance du point M au centre O_1, distance, qui aurait une grandeur constante, si le point M décrivait exactement un arc du cercle autour du point O_1.

Du triangle O_1CM nous déduisons

$$MO_1^2 = O_1C^2 + CM^2 - 2O_1C.CM.\cos MCM_0,$$

ce qui, après la substitution des valeurs pour le rayon vecteur CM et le $\cos MCM_0$, donne:

$$MO_1^2 = O_1C^2 + 4 \sin^2 \frac{\omega - \varphi}{2} - 4O_1C \sin \frac{\omega - \varphi}{2} \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + d^2 - r^2}{4\,d \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

En désignant par R le rayon du cercle, de l'arc duquel le point M

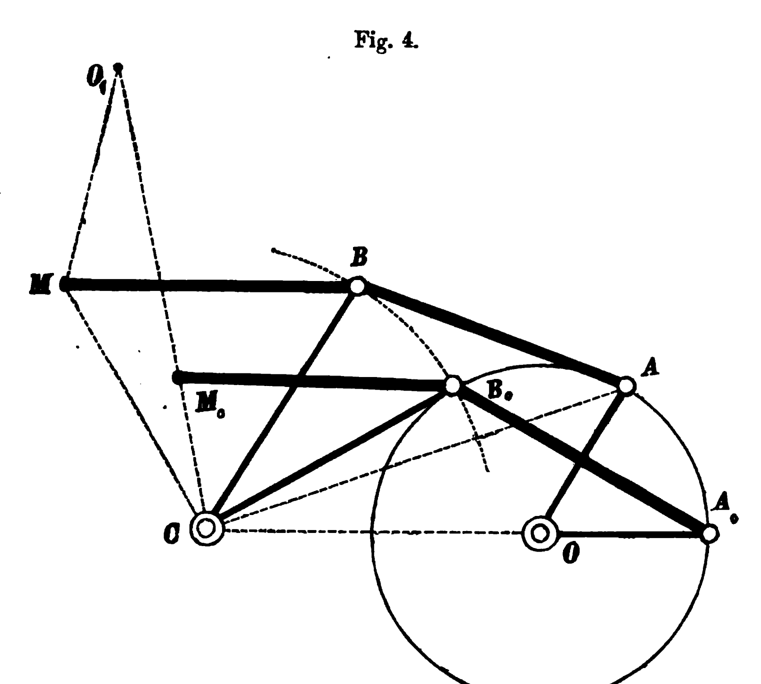
s'écarte le moins possible pendant le mouvement du système considéré, nous trouvons pour la différence $MO_1^2 - R^2$ la formule suivante:

$$MO_1^2 - R^2 = O_1C^2 - R^2 + 4\sin^2\frac{\omega-\varphi}{2} - 4O_1C\sin\frac{\omega-\varphi}{2}\,\frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2} + d^2 - r^2}{4d\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Occupons nous à présent de la détermination des conditions, pour que cette différence s'écarte le moins du zéro, quand l'angle φ, comme nous l'avons supposé plus haut, reste entre les limites

$$\varphi = \varphi_0,\ \varphi = \varphi_1.$$

Fig. 4.



§ 4. En posant dans la formule déduite

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = x,$$

nous remarquons qu'elle reçoit la forme

$$(4)\qquad MO_1^2 - R^2 = K\left[(p_1x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3\right],$$

où

$$K,\ p_1,\ p_2,\ p_3$$

sont des constantes, dont les valeurs s'expriment par

$$r,\ d,\ \omega,\ O_1C,\ R$$

de la manière suivante:

$$K = -\frac{\sin\frac{\omega}{2}(d^2-r^2)\,O_1C}{d}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} p_1 = 4\dfrac{\sin\omega.d + \sin\frac{\omega}{2}\,O_1C}{\sin\frac{\omega}{2}(d^2-r^2)\,O_1C}, \\ \\ p_2 = -4\,\dfrac{\cos\omega.d + \cos\frac{\omega}{2}\cdot O_1C}{\sin\frac{\omega}{2}(d^2-r^2)\,O_1C}, \end{cases} \tag{6}$$

$$p_3 = \frac{(R^2 - 2 + 2\cos\omega - O_1C^2)\,d - \cos\frac{\omega}{2}(d^2-r^2)\,O_1C}{\sin\frac{\omega}{2}(d^2-r^2)\,O_1C}. \tag{7}$$

On voit de la formule (4) que pour la même valeur du coefficient K la différence

$$MO_1^2 - R^2$$

reste d'autant plus près de zéro, que la fonction

$$(p_1x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3;$$

s'écarte moins de zéro; par suite, afin de diminuer autant que possible la valeur limite de la différence

$$MO_1^2 - R^2$$

pour des valeurs de φ, qui se trouvent entre $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \varphi_1$, nous devons opérer de la sorte que la fonction

$$(p_1x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

s'écarte le moins possible de zéro entre $x = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$, $x = \sin^2\frac{\varphi_1}{2}$.

Pour cela nous appliquons à la fonction

$$(p_1x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

le théorème concernant en général les fonctions, qui s'écartent le moins possible de zéro, que nous avons démontré dans le Mémoire sous le titre: *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* *). En se fondant sur ce théorème et désignant par

$$+L, \quad -L$$

*) T. I, pag. 273—378.

les valeurs limites de la fonction

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3$$

entre

$$x = \sin^2\frac{\varphi_0}{2},\quad x = \sin^2\frac{\varphi_1}{2},$$

nous concluons qu'elle doit au moins quatre fois atteindre les valeurs limites $-L$, $+L$, quand les valeurs de x ne sortent pas au dela des limites $x = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$, $x = \sin^2\frac{\varphi_1}{2}$.

Nous allons montrer à présent, de quelle manière la fonction

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3$$

peut être déterminée d'après cette propriété.

§ 5. Remarquons pour cela que toutes les valeurs de x, pour lesquelles la fonction

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3,$$

où l'on a

$$x \overline{<} \sin^2\frac{\varphi_0}{2},\quad x \overline{>} \sin^2\frac{\varphi_1}{2},$$

atteint les valeurs $+L$, $-L$ sans les surpasser, doivent être égales aux racines multiples de l'équation

$$\text{(8)}\quad \begin{aligned} &\left[(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 + L\right]\left[x - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right] \times \\ &\left[(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 - L\right]\left[x - \sin^2\frac{\varphi_1}{2}\right] = 0. \end{aligned}$$

En effet, on voit de la forme de cette équation qu'elle est satisfaite par des valeurs de x qui donnent:

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 = -L,$$

ou

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 = +L.$$

Si cela a lieu pour $x = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$ ou $x = \sin^2\frac{\varphi_1}{2}$, alors ces valeurs, comme on voit aussi de la forme de l'équation, seront ses racines multiples. Quant aux racines de cette équation qui sont entre $\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$ et $\sin^2\frac{\varphi_1}{2}$, elles aussi ne

peuvent pas être des racines non multiples, car pour des racines simples des équations

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 + L = 0,$$

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 - L = 0$$

la fonction

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3,$$

après avoir atteint les valeurs $+L$, $-L$, franchit ces limites.

On voit de cela que dans le cas considéré l'équation (8) doit avoir au moins 4 racines multiples, qui ne sortent pas hors des limites

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2};$$

mais cela ne peut avoir lieu que dans le cas, où l'équation a quatre racines doubles se trouvant entre les limites

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

car cette équation, après avoir été réduite à la forme rationnelle, sera du 8ième degré. Deux de ces racines sont évidemment, d'après la forme de l'équation,

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

Quant aux deux autres racines, comme elles sont limitées par les valeurs $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$, elles peuvent être représentées ainsi:

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_3}{2},$$

où φ_2, φ_3 sont des angles, qui sont enfermés entre φ_0, φ_1.

§ 6. Montrons à présent, comment on peut trouver les fonctions

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 + L,$$

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 - L$$

étant donnés les angles

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,$$

et comment trouver les angles inconnus φ_2, φ_3.

D'après ce qu'on a remarqué plus haut sur l'équation (8), on voit que l'équation

$$\left[(p_1 x+1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}+p_2 x+p_3+L\right]\left[(p_1 x+1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}+p_2 x+p_3-L\right]=0$$

aura deux racines simples

$$\sin^2\frac{\varphi_0}{2},\quad \sin^2\frac{\varphi_1}{2}$$

et deux racines doubles

$$\sin^2\frac{\varphi_2}{2},\quad \sin^2\frac{\varphi_3}{2}.$$

Et comme cette équation se décompose en deux suivantes

$$(p_1 x+1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}+p_2 x+p_3+L=0,$$

$$(p_1 x+1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}+p_2 x+p_3-L=0,$$

qui n'ont pas de racines communes et se réduisent à des équations cubiques, chacune d'elles aura une racine simple et une racine double.

En nous arrêtant sur l'équation

$$(p_1 x+1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}+p_2 x+p_3+L=0$$

et admettant qu'elle a pour la racine simple

$$x=\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$$

et pour la racine double

$$x=\sin^2\frac{\varphi_2}{2},$$

nous remarquons que le produit des trois différences

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2},$$

$$\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{1-x},$$

$$\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{1-x},$$

étant égalé au zéro, donne l'équation

$$\left[\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2}\right]\left[\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right]^2=0,$$

qui a aussi la racine simple $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ et la racine double $\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$. Mais cette équation dont la première partie représente une fonction de la forme

$$(P_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + P_2 x + P_3,$$

ne peut avoir trois racines communes avec l'équation

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 + L = 0,$$

si elle n'est pas identique à la dernière, et par conséquent doit avoir lieu l'égalité suivante:

$$(9) \qquad (p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 + L = \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2}\right)\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2.$$

De même, nous trouvons

$$(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 - L = \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_3}{2}\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2.$$

En soustrayant ces égalités l'une de l'autre, nous recevons

$$(10) \qquad 2L = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2}\right)\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2 \\ -\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_3}{2}\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)^2. \end{cases}$$

Cette égalité, qui a lieu pour toutes les valeurs de x, donne, comme nous le verrons, des équations qui déterminent les angles inconnus φ_2, φ_3.

§ 7. En chassant les paranthèses dans la dernière égalité et remplaçant les cotangentes par des quotients de cosinus et de sinus, nous trouvons qu'elle se réduit à

$$2L = \left(\frac{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}} - \frac{\sin\left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_3}{2}}\right)\sqrt{x(1-x)} + \frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_1}{2}} + 2\frac{\cos\frac{\varphi_3}{2}}{\sin\frac{\varphi_3}{2}}$$
$$- \left(\frac{\cos\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}} - \frac{\cos\left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_3}{2}}\right)x - \frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} - 2\frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\frac{\varphi_2}{2}}.$$

D'où l'on voit que, pour qu'elle soit possible pour chaque valeur de x, il faut que l'on ait

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}=\dfrac{\sin\left(\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_3}{2}},\\[2ex] \dfrac{\cos\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}=\dfrac{\cos\left(\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_3}{2}}.\end{cases}$$

Ces égalités nous serviront à déterminer les angles φ_2, φ_3.

En divisant ces égalités l'une par l'autre, nous recevons

$$\operatorname{tang}\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)=\operatorname{tang}\left(\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2}\right).$$

Et comme les angles φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 sont compris entre 0 et π, cette équation mène à une des deux conclusions suivantes: ou à l'égalité

$$\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}=\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2},$$

ou à l'égalité

$$\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}=\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2}\pm\pi.$$

De plus, en remarquant que dans le dernier cas on reçoit, d'après (11), l'équation

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}=-\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_3}{2},$$

qui ne peut pas être satisfaite par des valeurs positives des angles φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, ne dépassant pas π, nous concluons qu'il doit être

$$(12)\qquad \varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}=\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2},$$

et par suite les équations (11) nous donnent

$$(13)\qquad \sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}=\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_3}{2}.$$

Des deux dernières équations il est aisé de déduire des formules, qui servent à déterminer les angles φ_2, φ_3.

En effet, d'après (12), nous avons

$$\cos\varphi_3=\cos\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\right),$$

et par conséquent

$$\sin^2\frac{\varphi_3}{2}=\frac{1-\cos\varphi_3}{2}=\frac{1-\cos\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\right)}{2},$$

ce qui, après la substitution dans l'équation (13), donne

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}=\frac{1-\cos\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\right)}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2};$$

d'où l'on déduit, après avoir chassé les paranthèses et divisé par $\sin^2\frac{\varphi_2}{2}$, l'équation suivante:

$$\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\operatorname{cotang}^2\frac{\varphi_2}{2}+\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}-\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_1}{2}}+\cos^2\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}=0.$$

En résolvant cette équation par rapport à $\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}$ et retenant seulement la racine positive, nous trouvons

$$(14)\qquad \operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}=\frac{1}{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}}\left[\sqrt{\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_1}{2}}}-\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\right].$$

Ainsi l'angle φ_2 est déterminé en fonction des angles φ_0, φ_1. Cet angle nous servira comme une grandeur auxiliaire pour simplifier les formules. Quant à l'angle φ_3, sa valeur peut être aisément obtenu d'après (12), quand on a trouvé l'angle φ_2.

§ 8. Ayant les angles

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$$

on peut sans difficulté déterminer les grandeurs

$$L,\ p_1,\ p_2,\ p_3,$$

qui entrent dans nos formules.

En posant dans l'équation (10)

$$x=\sin^2\frac{\varphi_1}{2},$$

nous trouvons

$$2L=\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2}-\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2}\right)\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}-\cos\frac{\varphi_1}{2}\right)^2,$$

ce qui donne pour L la formule simple:

$$L=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}.$$

En remarquant que le produit

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2}\right)\left(\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)^2$$

quand on y a remplacé le cotangentes par les quotients de cosinus et de sinus, se réduit à l'expression

$$\left(\frac{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}x+1\right)\sqrt{\frac{1-x}{x}}-\frac{\cos\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}x-\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}-2\frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\frac{\varphi_2}{2}},$$

nous concluons, d'après (9), que p_1, p_2, p_3, L ont les valeurs suivantes:

$$p_1=\frac{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}},$$

$$p_2=-\frac{\cos\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}},$$

$$p_3+L=-\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}-2\frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\frac{\varphi_2}{2}}.$$

La dernière égalité, après qu'on y a introduit la valeur trouvée de L, donne

$$p_3=-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}-\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2}-2\operatorname{cotang}\frac{\varphi_2}{2}.$$

C'est ainsi que se déterminent les valeurs des coefficients

$$p_1,\ p_2,\ p_3,$$

avec lesquelles la fonction

$$(p_1x+1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}+p_2x+p_3$$

s'écarte le moins de zéro entre

$$x=\sin^2\frac{\varphi_0}{2},\quad x=\sin^2\frac{\varphi_1}{2}.$$

En même temps, comme nous avons vu, les écarts de la fonction

$$(p_1x+1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}+p_2x+p_3$$

de zéro ne sortent pas au delà des limites

$$-L=-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}},\quad L=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}};$$

et cette fonction atteint ces limites 4 fois: pour

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$$

elle atteint la première limite; pour

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}$$

la seconde.

§ 9. Passant à la détermination des expressions pour

$$r, \ d, \ O_1C, \ R,$$

telles que, d'après le § 4, la différence

$$MO_1^2 - R^2$$

se réduit à la fonction

$$K\left[(p_1 x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3\right],$$

nous portons les valeurs trouvées des coefficients

$$p_1, \ p_2$$

dans les équations (6), ce qui nous donne

$$\frac{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}} = 4\,\frac{d \sin\omega + O_1C \sin\frac{\omega}{2}}{(d^2 - r^2)\, O_1C \sin\frac{\omega}{2}},$$

$$\frac{\cos\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}} = 4\,\frac{d \cos\omega + O_1C \cos\frac{\omega}{2}}{(d^2 - r^2)\, O_1C \sin\frac{\omega}{2}}.$$

En outre, du triangle A_0B_0C (fig. 4), où

$$A_0B_0 = 1, \quad CB_0 = 1, \quad A_0B_0C = \varphi_0, \quad CA_0 = CO + OA_0 = d + r,$$

il vient

$$d + r = 2 \sin\frac{\varphi_0}{2}.$$

En résolvant cette équation simultanément avec les deux précédentes par rapport à

$$r, \ d, \ O_1C,$$

nous trouvons

$$(15)\qquad \begin{cases} r = \sin\frac{\varphi_0}{2} - \dfrac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}; \\[2ex] d = \sin\frac{\varphi_0}{2} + \dfrac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}; \\[2ex] O_1C = \dfrac{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} \left[\sin\frac{\varphi_0}{2} + \dfrac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}\right]. \end{cases}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (3), nous recevons pour la détermination de l'angle α la formule suivante:

$$(16)\qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}\sin^2\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^4\frac{\varphi_2}{2}}.$$

Quant au rayon R, il sera détérminé par l'équation (7), après qu'on y a introduit les expressions ci-dessus indiquées pour

$$p_3,\ d,\ r,\ O_1C.$$

§ 10. Quand les valeurs de

$$r,\ d,\ O_1C,\ R,$$

sont ainsi détérminées, la différence

$$MO_1^2 - R^2$$

se réduit à la fonction

$$K\left[(p_1x + 1)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3\right],$$

où, d'après (5),

$$K = -\frac{(d^2 - r^2)\,O_1C\sin\frac{\omega}{2}}{d};$$

par suite, selon ce qu'on a dit ci-dessus sur cette fonction, la différence

$$MO_1^2 - R^2,$$

entre $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ ne sortira pas au delà des limites

$$+\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}\,\frac{(d^2-r^2)\,O_1C\sin\frac{\omega}{2}}{d},$$

$$-\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}\,\frac{(d^2-r^2)\,O_1C\sin\frac{\omega}{2}}{d},$$

et atteindra la première limite, lorsque

$$\varphi = \varphi_0,\ \varphi = \varphi_2,$$

et la seconde, lorsque

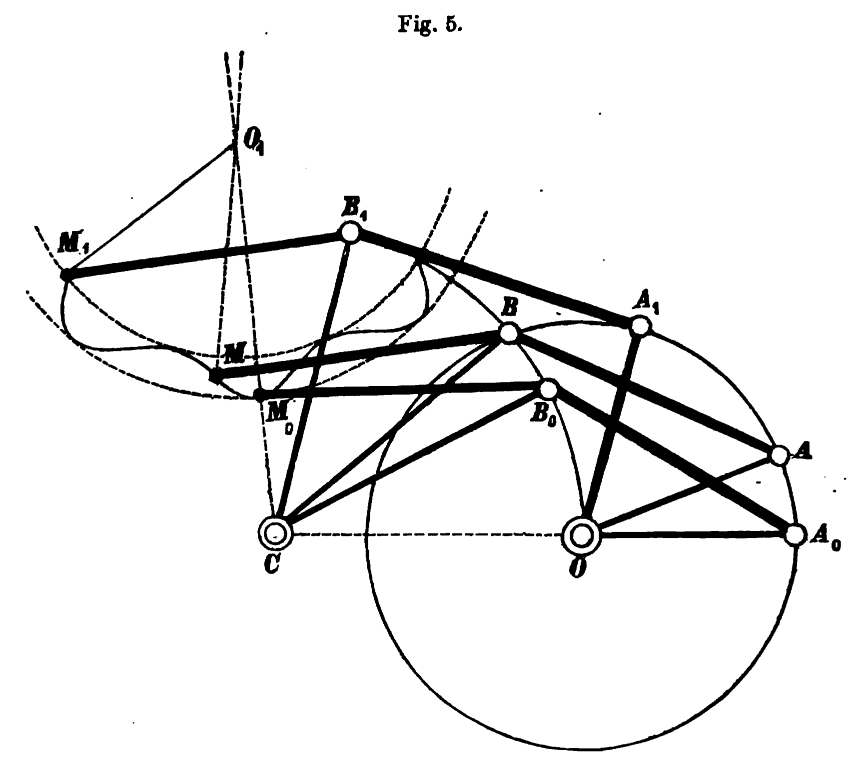
$$\varphi = \varphi_1,\ \varphi = \varphi_3.$$

D'où il est clair que, pendant le mouvement du système considéré entre les limites

$$\varphi = \varphi_0,\ \varphi = \varphi_1$$

le point M (fig. 5) ne s'éloigne pas du centre O_1 plus qu'à la distance M_0O_1,

Fig. 5.



qu'il atteint pour $\varphi = \varphi_0$, et ne s'approche de O_1 plus qu'à la distance

M_1O_1, qu'il atteint, quand $\varphi = \varphi_1$. Par conséquent le point M restera entre deux circonférences concentriques décrites du centre O_1 par les rayons

$$R_0 = M_0O_1,\ R_1 = M_1O_1. \tag{17}$$

Ces rayons représenteront les grandeurs limites de la distance du point M au centre O_1. Comme, d'après ce qu'on a dit plus haut, la distance MO_1 atteindra sa grandeur limite $R_0 = M_0O_1$, sans la surpasser, quand

$$\varphi = \varphi_0,\ \varphi = \varphi_2,$$

le premier cercle sera tangent à la trajectoire du point M en un point placé sur l'axe de symétrie CM_0, où

$$\varphi = \varphi_0,$$

et en deux autres points, de l'un et de l'autre côté de cet axe, où

$$\varphi = \varphi_2.$$

Quant à l'autre cercle, nous remarquons, qu'il sera aussi tangent à la trajectoire du point M en deux endroits, de l'un et de l'autre côté de l'axe de symétrie, où

$$\varphi = \varphi_3;$$

parce que pour cette valeur de l'angle φ la distance O_1M atteint la limite $R = M_1O_1$, sans la surpasser. Outre cela, sur ce cercle se trouveront les extrémités de la trajectoire du point M, où il arrive, quand φ atteint sa valeur limite φ_1; car pour cette valeur de φ la distance MO_1 est égale à $R_1 = M_1O_1$. Quant aux rayons R_0, R_1, ils sont liés par une équation très simple, qui peut être aisément déduite de ce que nous avons dit sur les valeurs limites de la différence

$$MO_1^2 - R^2.$$

En effet, on voit que, d'après les formules (§ 10) qui déterminent ces valeurs, entre $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ la plus grande valeur de la différence

$$MO_1^2 - R^2$$

est

$$+\frac{\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}} \cdot \frac{(d^2 - r^2)\, O_1C \sin\frac{\omega}{2}}{d},$$

et la plus petite est

$$-\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}\cdot\frac{(d^2-r^2)\,O_1O\sin\frac{\omega}{2}}{d}.$$

Mais, d'après ce qu'on a dit plus haut, on obtient la première valeur, lorsque

$$MO_1=R_0,$$

et la seconde, lorsque

$$MO_1=R_1,$$

et par suite

$$R_0^2-R^2=\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}\,\frac{(d^2-r^2)\,O_1O\sin\frac{\omega}{2}}{d},$$

$$R_1^2-R^2=-\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}\,\frac{(d^2-r^2)\,O_1O\sin\frac{\omega}{2}}{d};$$

d'où l'on déduit, en éliminant R^2:

$$R_1^2=R_0^2-\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}\,\frac{(d^2-r^2)\,O_1O\sin\frac{\omega}{2}}{d}. \tag{18}$$

§ 11. Occupons nous à présent de l'application des formules trouvées à quelques cas particuliers et traitons d'abord les cas, où la ligne brisée *ABM* devient une droite, ce qui arrive si, d'après notre notation,

$$\omega=\pi.$$

Comme l'équation (14), qui détermine l'angle φ_2, ne contient pas l'angle ω, elle reste invariable; les autres formules, après qu'on y a posé $\omega=\pi$, deviennent plus simples et seront:

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned} r&=\sin\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)},\\ d&=\sin\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)},\end{aligned}\right.$$

(20) $$CO_1 = -\left[\sin\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}\right]\operatorname{tang}\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

(21) $$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)-\sin^4\frac{\varphi_2}{2}}.$$

On obtient de ces formules des résultats très simples dans deux cas particuliers, à savoir:
1) quand on suppose

$$CO_1 = \infty,$$

et 2) quand on suppose

$$\alpha = \pi.$$

Dans le premier cas le système considéré donne un mouvement, qui est très proche du mouvement rectiligne, dans le second cas le mouvement est proche du mouvement circulaire.

En nous arrêtant au premier cas, nous remarquons que, d'après (20), $CO_1 = \infty$ seulement pour

(22) $$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on a

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}.$$

En mettant cette valeur de φ_2 dans l'équation (19), nous trouvons

(23) $$r = \frac{3}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2} - \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2};$$

d'où l'on reçoit, après avoir éliminé $\sin\frac{\varphi_0}{2}$, l'équation simple

$$2 + r = 3\,d,$$

à laquelle doivent satisfaire les valeurs de r, d, pour que le système considéré, étant composé de trois droites, pût donner un mouvement assez proche du mouvement rectiligne entre les limites plus ou moins larges.

Comme le centre O_1 pour

$$O_1C = \infty$$

s'éloigne à ∞, les arcs des cercles concentriques, entre lesquels, d'après § 10, restera le point M dans son mouvement, deviennent des droites pa-

rallèles, perpendiculaires à l'axe de symétrie CM_0 et dont la distance mutuelle est égale à la grandeur limite de

$$R_0 - R_1$$

pour

$$CO_1 = \infty.$$

En déterminant cette limite au moyen de l'équation (18) et remarquant (fig. 5) que le rapport

$$\frac{O_1 C}{R_0} = \frac{O_1 C}{M_0 O_1} = \frac{O_1 C}{O_1 C - CM_0}$$

pour

$$O_1 C = \infty$$

se réduit à 1, nous trouvons que cette limite est égale à

$$\frac{1}{2} \frac{\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2)\sin\frac{\omega}{2}}{d}.$$

Donc, représentant par D la distance mutuelle des parallèles, entre lesquelles est enfermée la trajectoire du point M dans le cas considéré, nous trouvons pour D la formule:

$$D = \frac{\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2)\sin\frac{\omega}{2}}{d},$$

qui, après qu'on y a introduit les valeurs de ω, φ_2, r, d ci-dessus indiquées, devient

$$(24) \qquad D = 2\frac{\left(1 - \sin\frac{\varphi_0}{2}\right)\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2\frac{\pi - \varphi_0 - 2\varphi_1}{4}}{\left(1 + \sin\frac{\varphi_0}{2}\right)\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4}\right)}.$$

Quant à l'angle α, nous recevons de l'équation (21), en y mettant $\frac{\pi}{2}$ au lieu de $\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}$, l'expression

$$(25) \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4}\right)}.$$

§ 12. Les formules trouvées contiennent outre l'angle φ_0, qu'on suppose donné, encore l'angle φ_1, qui doit être trouvé.

Afin de déterminer cet angle nous déduisons des égalités (22), (12)

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2},$$

ce qui donne

$$\sin^2\frac{\varphi_2}{2}=\frac{1-\cos\varphi_2}{2}=\frac{1-\sin\frac{\varphi_0}{2}}{2},\quad \sin^2\frac{\varphi_3}{2}=\frac{1-\cos\varphi_3}{2}=\frac{1-\sin\frac{\varphi_1}{2}}{2}.$$

En portant ces valeurs de

$$\sin^2\frac{\varphi_2}{2},\ \sin^2\frac{\varphi_3}{2}$$

dans la formule (13), nous recevons l'équation

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}\left(1-\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)=\sin\frac{\varphi_1}{2}\left(1-\sin\frac{\varphi_1}{2}\right),$$

d'où il suit

$$\sin\frac{\varphi_1}{2}=1-\sin\frac{\varphi_0}{2}.$$

En nous fondant sur cette égalité et sur l'équation (23), qui donne

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}=\frac{1+2r}{3},$$

nous trouvons

$$\sin\frac{\varphi_1}{2}=2\,\frac{1-r}{3};$$

mais d'après les égalités

(26) $$\sin\frac{\varphi_0}{2}=\frac{1+2r}{3},\quad \sin\frac{\varphi_1}{2}=2\,\frac{1-r}{3}$$

nous recevons

$$\cos\frac{\varphi_0}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{(1-r)(2+r)},\quad \cos\frac{\varphi_1}{2}=\frac{1}{3}\sqrt{(5-2r)(1+2r)},$$

$$\cos\varphi_0=1-2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}=\frac{7-8r-8r^2}{9},\quad \cos\varphi_1=1-2\sin^2\frac{\varphi_1}{2}=\frac{1+16r-8r^2}{9},$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi_0}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi_0}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin\frac{\varphi_0}{2}}{2}=\frac{1-r}{3},$$

$$\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}=\frac{\cos\varphi_1-\cos\varphi_0}{2}=\frac{1}{3}(4r-1),$$

$$\sin\frac{\pi-\varphi_0-2\varphi_1}{4}\cdot\sin\frac{\pi-\varphi_0+2\varphi_1}{4}=\frac{1}{2}\cos\varphi_1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

$$=\frac{\cos\varphi_1-\sin\frac{\varphi_0}{2}}{2}=\frac{(4r-1)(1-r)}{9}.$$

D'après ces égalités et d'après les équations (26), qui donnent

$$1-\sin\frac{\varphi_0}{2}=2\,\frac{1-r}{3},\quad 1+\sin\frac{\varphi_0}{2}=2\,\frac{2+r}{3},\quad \sin\frac{\varphi_1}{2}=2\,\frac{1-r}{3},$$

nous pouvons représenter la formule (24) comme il suit:

$$D = \frac{1}{27} \frac{(1-r)(4r-1)^3}{(2+r)\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\pi-\varphi_0+2\varphi_1}{4}},$$

où le numérateur ne contient pas les angles φ_0, φ_1. Afin de les éliminer du dénominateur, nous remarquons que

$$\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\pi-\varphi_0+2\varphi_1}{4} = \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\left[1-\cos\frac{\pi-\varphi_0+2\varphi_1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + 2\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\right]\cos\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2}\left[1+\sin\frac{\varphi_0}{2}\right]\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2};$$

d'où, après avoir porté les valeurs ci-dessus trouvées de

$$\sin\frac{\varphi_0}{2},\ \sin\frac{\varphi_1}{2},\ \cos\frac{\varphi_0}{2},\ \cos\frac{\varphi_1}{2}$$

nous déduisons

$$\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\pi-\varphi_0+2\varphi_1}{4} =$$

$$\frac{1-r}{27}\left[\sqrt{(5-2r)^3(1+2r)} + 4\sqrt{(2+r)^3(1-r)}\right];$$

par suite, l'expression précédente de D se réduit à la formule

$$D = \frac{(4r-1)^3}{(2+r)\left[\sqrt{(5-2r)^3(1+2r)} + 4\sqrt{(2+r)^3(1-r)}\right]}.$$

On détermine ainsi la distance mutuelle des deux parallèles, entre lesquelles reste le point M pendant le mouvement du système considéré, quand l'angle φ ne sort au delà des limites $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$. Dans ce cas, comme nous l'avons vu, la valeur limite de l'angle A_0OA se déduit de l'équation (25). En y introduisant les valeurs ci-dessus indiquées de

$$\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2},\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi_0}{4}\right),$$

et ayant égard à ce que, d'après (26),

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1+2r}{3},$$

nous trouvons l'équation suivante pour l'angle α, la valeur limite de l'angle A_0OA:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4r-1}{r(2+r)}.$$

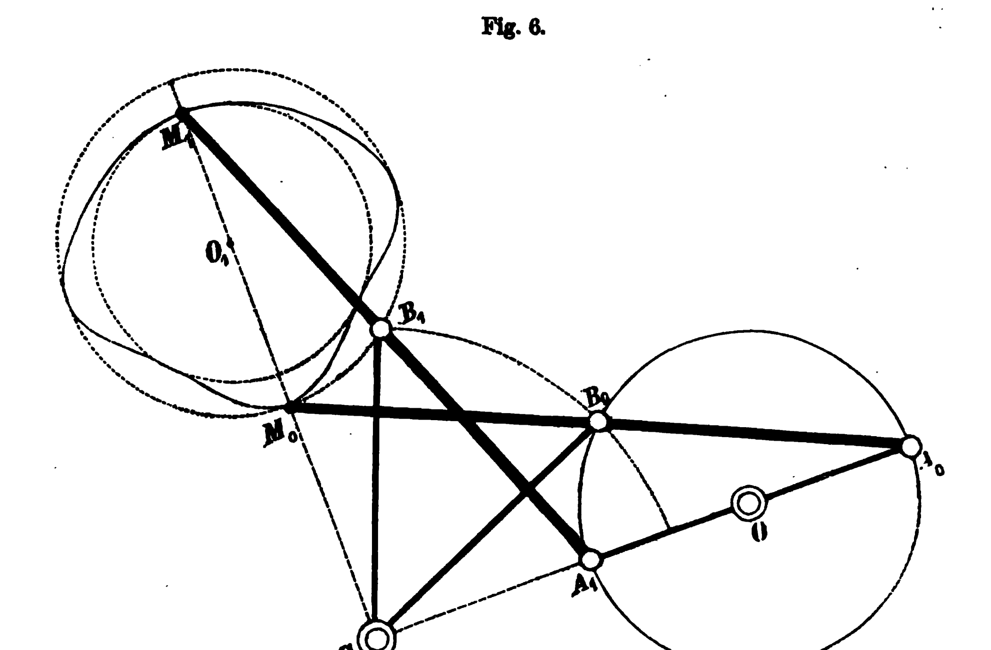
On en voit que dans le système considéré le rayon r doit surpasser $\frac{1}{4}$ et qu'à mesure que r s'approche de $\frac{1}{4}$, la valeur de l'angle de rotation du rayon OA, pour laquelle le point M reste entre les parallèles ci-dessus indiquées, décroit. De plus, comme on voit de la formule, qui détermine la distance D, ces parallèles se rapprochent rapidement, et par suite les déviations limites du point M de la ligne droite décroissent aussi rapidement.

§ 13. Passant à la supposition

$$\alpha = \pi,$$

nous remarquons que pour cette valeur de α les positions limites du rayon AO de l'un et de l'autre côté de la ligne des centres COA_0 coïncident avec cette dernière (fig. 6) ligne, et par conséquent les positions limites du point M sur chaque côté de l'axe de symétrie CM_0 doivent coïncider sur cette axe. Comme, d'après le § 10, les extrémités de la trajectoire du point M

Fig. 6.



se trouvent sur le cercle décrit du centre O_1 par le rayon $R_1 = M_1O_1$, leur coïncidence doit se faire sur ce cercle et en ce point le cercle sera tangent à la trajectoire. A cause de cela et tenant compte de ce qu'on a dit en général sur la trajectoire dans le § 10, nous concluons que dans le cas particulier, quand

$$\alpha = \pi,$$

le point M décrira une courbe fermée, restant entre deux cercles concentri-

ques décrits du centre O_1 par les rayons $R_1 = M_1 O_1$, $R_0 = M_0 O_1$; d'ailleurs on aura sur chacun d'eux trois points de tangence: un point sur l'axe de symétrie MO_0 et deux points de l'un et de l'autre côté de cet axe. Il est facile de voir que cette courbe ne peut s'éloigner du cercle décrit du centre O_1 par le rayon $\frac{R_0+R_1}{2}$ plus qu'à la distance $\frac{R_0-R_1}{2}$, et sera par conséquent peu distincte de ce cercle, si $\frac{R_0-R_1}{2}$ diffère assez peu de zéro.

Pour appliquer à ce cas les formules déduites dans le § 11, posons

$$\alpha = \pi.$$

Pour cette valeur de α l'équation (21) donne

$$\frac{\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)-\sin^4\frac{\varphi_2}{2}}=1,$$

d'où il suit

$$\left[\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\right]\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)=\sin^4\frac{\varphi_2}{2},$$

En y mettant au lieu de

$$\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}$$

la différence

$$\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi_1}{2}$$

on reçoit l'équation

$$\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)=\sin^4\frac{\varphi_2}{2},$$

qui donne l'une des deux relations: ou

$$\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)=\sin^2\frac{\varphi_2}{2},$$

ou

$$\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)=-\sin^2\frac{\varphi_2}{2}.$$

Cette dernière égalité donne, d'après (19),

$$r > d,$$

et alors le rayon r ne peut pas accomplir un tour complèt autour du centre O; on doit donc admettre la première égalité:

$$\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)=\sin^2\frac{\varphi_2}{2}; \tag{27}$$

en remarquant que, d'après (12) et (13),

$$\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}=\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2},$$

$$\frac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\frac{\varphi_1}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\varphi_3}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}},$$

on reçoit l'équation

(28) $$\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2}\right)=\sin^2\frac{\varphi_3}{2}.$$

En s'appuyant sur les deux dernières égalités, on peut trouver sans peine une formule pour déterminer l'angle

(29) $$\theta=\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}=\varphi_3+\frac{\varphi_1}{2}$$

d'après l'angle

(30) $$\psi=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4},$$

au moyen duquel, comme nous le verrons, on reçoit des expressions très simples de toutes les grandeurs qui se présentent dans le cas considéré.

En effet, les équations (27), (28), après qu'on y a introduit θ au lieu de

$$\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2},\quad \varphi_3+\frac{\varphi_1}{2}$$

et

$$\theta-\frac{\varphi_0}{2},\quad \theta-\frac{\varphi_1}{2}$$

au lieu de φ_2, φ_3, donnent

(31) $$\begin{cases}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\theta=\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi_0}{4}\right),\\ \sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\theta=\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi_1}{4}\right).\end{cases}$$

En soustrayant ces égalités l'une de l'autre, nous trouvons

$$\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}-\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\theta=\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi_1}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\varphi_0}{4}\right),$$

ce qui se reduit à

$$\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}-\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\theta=\left(\cos\frac{\varphi_0}{2}-\cos\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\theta.$$

Il s'ensuit de là que

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}-\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}-\sin\frac{\varphi_1}{2}}=-\operatorname{tang}\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4},$$

ce qui suppose

$$\theta + \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} = n\pi,$$

où n est un nombre entier. Pour déterminer ce nombre remarquons que, si φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 sont positives et ne surpassent π, l'angle

$$\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}$$

est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et l'angle

$$\theta = \varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}$$

entre 0 et $\frac{3\pi}{2}$; par conséquent la somme

$$\theta + \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}$$

doit être comprise entre 0 et 2π et dans l'égalité déduite le nombre n ne peut avoir d'autre valeur que celle-ci

$$n = 1;$$

donc

$$\theta = \pi - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4},$$

ce qui se réduit, d'après (30), à l'égalité

(32) $$\theta = \frac{\pi}{2} + \psi.$$

En revenant aux équations (31), divisons les l'une par l'autre, après y avoir remplacé

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_0}{4}\right), \quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_1}{4}\right)$$

par

$$\frac{1 - \cos\left(\theta - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{2}, \quad \frac{1 - \cos\left(\theta - \frac{\varphi_1}{2}\right)}{2}.$$

Nous trouvons ainsi

$$\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1 - \cos\left(\theta - \frac{\varphi_1}{2}\right)}{1 - \cos\left(\theta - \frac{\varphi_0}{2}\right)};$$

d'où il vient

$$\sin\frac{\varphi_0}{2} - \sin\frac{\varphi_1}{2} = \cos\left(\theta - \frac{\varphi_0}{2}\right)\sin\frac{\varphi_0}{2} - \cos\left(\theta - \frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\frac{\varphi_1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin(\theta - \varphi_1) - \sin(\theta - \varphi_0)\right],$$

ou encore

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}-\sin\frac{\varphi_1}{2}=\cos\left(\theta-\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\right)\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2},$$

ce qui donne

$$\cos\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}=\cos\left(\theta-\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\right)\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}.$$

Et comme, d'après (30) et (32),

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\psi;\quad \frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}=\frac{\pi}{2}-\psi,$$

cette égalité se ramène à la suivante:

$$\sin\psi=\sin 3\psi.\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4},$$

d'où nous trouvons

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned}&\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}=\frac{\sin\psi}{\sin 3\psi},\\ &\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}=\sqrt{1-\frac{\sin^2\psi}{\sin^2 3\psi}}=\frac{\sin 2\psi\sqrt{2\cos 2\psi}}{\sin 3\psi}.\end{aligned}\right.$$

§ 14. Afin de déterminer les valeurs de

$$r,\ d,\ O_1C$$

remarquons que dans le cas considéré en vertu de l'égalité (27), les équations (19), (20) donnent,

$$r=\sin\frac{\varphi_0}{2}-\sin\frac{\varphi_1}{2}=2\cos\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4},$$

$$d=\sin\frac{\varphi_0}{2}+\sin\frac{\varphi_1}{2}=2\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4},$$

$$CO_1=-\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}+\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)\operatorname{tang}\theta=-2\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}\operatorname{tang}\theta;$$

d'où, après avoir introduit les valeurs ci-dessus trouvées de

$$\theta,\quad \frac{\varphi_0+\varphi_1}{4},\quad \cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4},\quad \sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4},$$

il résulte

$$r=\frac{2\sin\psi\sin 2\psi\sqrt{2\cos 2\psi}}{\sin 3\psi},\quad d=\frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi},\quad CO_1=\frac{2\cos^2\psi}{\sin 3\psi}.$$

La dernière formule détermine la position du centre O_1 des deux cercles concentriques, entre lesquels est enfermée la trajectoire du point M. Les rayons R_0, R_1 de ces cercles ont, d'après le § 10, les valeurs suivantes

$$R_0=O_1M_0,\quad R_1=O_1M_1.$$

En remarquant que dans le cas actuel (fig. 6)

$$O_1M_0 = CO_1 - CM_0, \quad O_1M_1 = CM_1 - CO_1,$$

nous déduisons de ces égalités

$$R_0 = CO_1 - CM_0, \quad R_1 = CM_1 - CO_1,$$

ce qui nous donne

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{CM_1 - CM_0}{2}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = CO_1 - \frac{CM_0 + CM_1}{2}.$$

En y introduisant la valeur de CO_1 ci-dessus indiquée et remarquant que les triangles CB_0M_0, CB_1M_1, dans lesquels

$$CB_0 = B_0M_0 = CB_1 = B_1M_1 = 1,$$

$$CB_0M_0 = \pi - A_0B_0C = \pi - \varphi_0, \quad CB_1M_1 = \pi - A_1B_1C = \pi - \varphi_1,$$

donnent

$$CM_0 = 2 \cos \frac{\varphi_0}{2}, \quad CM_1 = 2 \cos \frac{\varphi_1}{2},$$

nous reçevons

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \cos \frac{\varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 8\psi} - \cos \frac{\varphi_0}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 8\psi} - 2 \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}.$$

Après qu'on y a introduit les valeurs de

$$\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \quad \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

ces formules se ramènent aux suivantes:

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{2 \cos \psi \sin 2\psi \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 8\psi}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{2 \cos 2\psi}{\sin 8\psi};$$

d'où l'on voit que l'angle ψ ne doit surpasser $\frac{\pi}{4}$, et que les valeurs de

$$\frac{R_0 - R_1}{2}$$

ainsi que de

$$\frac{R_0 + R_1}{2}$$

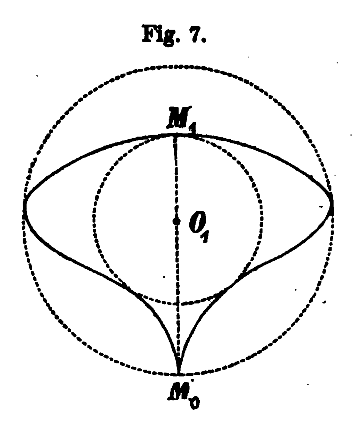
diminuent, à mesure que l'angle ψ s'approche de $\frac{\pi}{4}$.

D'ailleurs la première grandeur s'approche du zéro beaucoup plus vite que la seconde; donc, à mesure que ψ s'approche en croissant de $\frac{\pi}{4}$, le rapport de la première grandeur à la seconde tend au zéro; à cause de celà la trajectoire de M_1 pour des valeurs de ψ assez proches de $\frac{\pi}{4}$, représente une courbe, qui diffère peu du cercle. À mesure que l'angle ψ devient plus petit, le rapport

$$\frac{R_0 - R_1}{2} : \frac{R_0 + R_1}{2}$$

augmente, et la trajectoire du point M se modifie, passant d'une courbe, qui est peu distincte d'un cercle, à une courbe cordiforme (fig. 7).

Fig. 7.



§ 15. Nous avons montré dans les derniers §§ quelques applications des formules générales aux cas particuliers, quand la ligne brisée ABM devient une droite. Occupons-nous à présent de l'application de ces formules aux différents cas, où la ligne ABM reste une ligne brisée, et commençons par supposer que

$$O_1C = \infty;$$

ce qui a lieu, d'après (15), lorsque

$$\omega = 2\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right). \tag{34}$$

Après avoir introduit cette valeur de ω dans les formules (15), (16), nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} r &= \sin\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}, \\ d &= \sin\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^4\frac{\varphi_2}{2}}, \tag{36}$$

où φ_2 est un angle auxiliaire, qui peut être exprimé en fonction des angles φ_0, φ_1 par les équations déduites dans le § 7.

Supposant en particulier

$$\alpha = \pi,$$

portons cette valeur de α dans la formule (36), ce qui nous donne

$$\frac{\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)-\sin^4\frac{\varphi_2}{2}}=1.$$

Cette équation est identique à celle que nous avons trouvée dans le § 13 pour le cas $\omega=\pi$, et au moyen de laquelle nous avons déduit des formules générales les relations

$$\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right)=\sin^2\frac{\varphi_2}{2},\quad \theta=\varphi_2+\frac{\varphi_0'}{2}=\frac{\pi}{2}+\psi,$$

$$\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}=\frac{\sin\psi}{\sin 3\psi},\quad \sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}=\frac{\sin 2\psi\sqrt{2\cos 2\psi}}{\sin 3\psi},$$

où

$$\psi=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4},$$

nous concluons donc que ces égalités auront lieu aussi dans le cas actuel. En vertu de ces égalités on reçoit, d'après les équations (34), (35):

$$\omega=\pi+2\psi,$$

$$r=\sin\frac{\varphi_0'}{2}-\sin\frac{\varphi_1}{2}=2\cos\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}=\frac{2\sin\psi\sin 2\psi\sqrt{2\cos 2\psi}}{\sin 3\psi},$$

$$d=\sin\frac{\varphi_0}{2}+\sin\frac{\varphi_1}{2}=2\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}=\frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}.$$

Dans le cas considéré, où

$$\alpha=\pi,$$

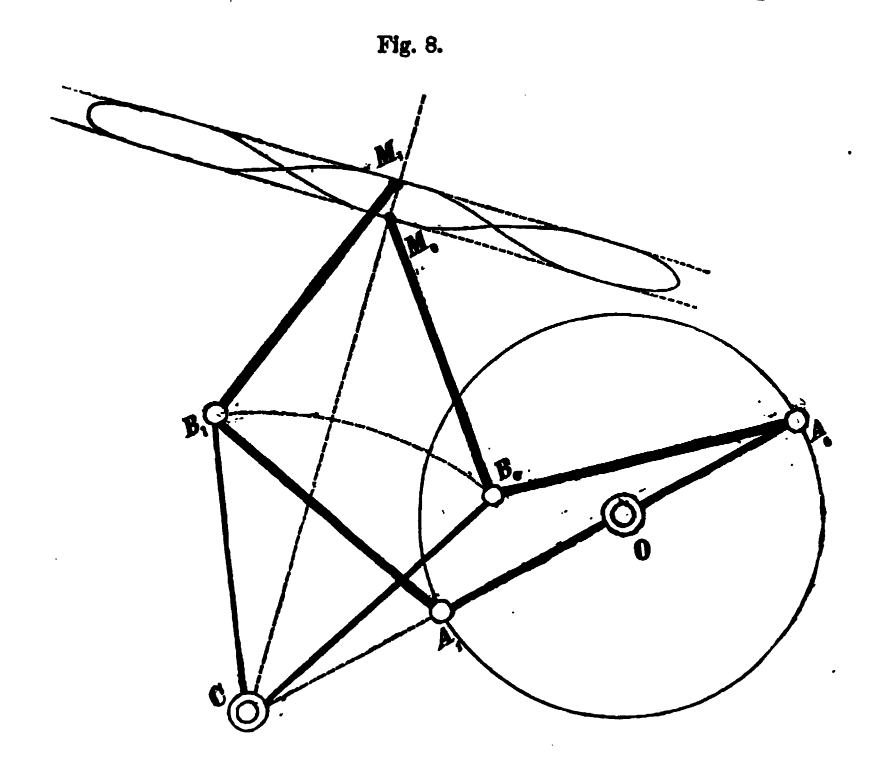
les positions limites du rayon OA, lorsqu'il tourne dans l'une et l'autre direction, coïncident, sur la ligne du centre OC (fig. 8), et par conséquent les extrémités de la trajectoire du point M coïncident à présent, de même que dans le cas précédent, sur l'axe de symétrie CM_0, et cette trajectoire représente une courbe fermée. Il est clair, de ce qu'on a montré dans le § 10, que cette courbe est limitée par deux droites parallèles, provenant, d'après l'égalité

$$CO_1=\infty,$$

des arcs circulaires décrites du centre O_1 par les rayont R_0, R_1, et que chacune de ces parallèles est tangente à la trajectoire du point M en trois points: sur l'axe de symétrie CM_0 et de chaque côté de cet axe. Cette courbe est d'autant moins différente d'une droite, que les parallèles, entre lesquelles

elle est enfermée, sont plus proches l'une de l'autre. Pour déterminer leur distance mutuelle, remarquons qu'elle est égale à la distance des points M_0,

Fig. 8.



M_1 de l'intersection des parallèles avec l'axe de symétrie CM_0, où ces parallèles sont tangentes à la trajectoire considérée. Des triangles isocèles CB_0M_0, CB_1M_1, où

$$CB_0 = B_0M_0 = CB_1 = B_1M_1 = 1,$$

$$CB_0M_0 = \omega - A_0B_0C = \omega - \varphi_0, \quad CB_1M_1 = \omega - A_1B_1C = \omega - \varphi_1,$$

on a

(37) $$CM_0 = 2\sin\frac{\omega - \varphi_0}{2}, \quad CM_1 = 2\sin\frac{\omega - \varphi_1}{2};$$

donc la distance des points M_0M_1 se détermine par la formule

$$M_0M_1 = CM_1 - CM_0 = 2\sin\frac{\omega - \varphi_1}{2} - 2\sin\frac{\omega - \varphi_0}{2},$$

qui se réduit à

$$M_0M_1 = 4\cos\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}\right)\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4};$$

d'où, après qu'on y a introduit les valeurs ci-dessus montrées de

$$\omega, \quad \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad \sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

on trouve

$$M_0M_1 = \frac{4 \sin 2\psi \sqrt{2 \cos^3 2\psi}}{\sin 3\psi}.$$

On voit de cette formule que l'angle ψ ne doit surpasser $\frac{\pi}{4}$ et qu'à mesure qu'il s'approche de $\frac{\pi}{4}$, la distance mutuelle des parallèles, entre lesquelles s'accomplit le mouvement du point M, quand le rayon AO tourne autour du centre O, diminue; à cause de celà, le point M, quand ψ est assez proche de $\frac{\pi}{4}$, s'écarte peu de la droite, qui se trouve entre les parallèles à la même distance de chacune d'elles.

§ 16. En parlant du cas, où le rayon AO accomplit un tour complêt autour du centre O, nous avons fait des suppositions particulières concernant l'angle entre les deux parties de la ligne brisée ABC ou la distance des centres C, O_1. Nous allons montrer maintenant l'application à ce cas des formules générales, en ne faisant aucune hypothèse spéciale. Les équations qu'on reçoit ici seront plus compliquées que les précédentes; mais elles se présenterout sous une forme, qui est commode pour le calcul.

Afin d'appliquer les formules déduites dans le § 9 au cas, où le rayon AO accomplit un tour complet autour du centre O, posons

$$\alpha = \pi.$$

Pour cette valeur de α l'équation (16) donne

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0+\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_0-\varphi_1}{2} \sin^2\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)-\sin^4 \frac{\varphi_2}{2}} = 1.$$

En déterminant d'après cette équation la valeur de

$$\sin\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

nous trouvons

$$\sin\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right) = \pm \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}.$$

Et comme, d'après (15), pour une valeur négative de

$$\sin\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

il vient

$$r > d,$$

ce qui empêche au rayon r d'accomplir un tour complet, nous conservons dans l'égalité obtenue seulement le signe $+$ et prenons

$$\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}. \tag{38}$$

En introduisant cette valeur de $\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)$ dans l'équation (15), nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} r &= \sin\frac{\varphi_0}{2} - \sin\frac{\varphi_1}{2} = 2\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}\cos\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \\ d &= \sin\frac{\varphi_0}{2} + \sin\frac{\varphi_1}{2} = 2\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}\cos\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \\ O_1C &= 2\,\frac{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)}\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}\cos\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

où φ_2 est un angle auxiliaire, dont la valeur peut être déterminée d'après les angles φ_0, φ_1 par les équations données dans le § 7, tandis que l'angle ω se détermine par l'équation (38). Et comme pour l'angle ω toutes les valeurs entre 0 et 2π sont possibles, on reçoit d'après cette équation deux valeurs de ω, dont l'une donne

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) < 0,$$

tandis que l'autre fournit

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) > 0.$$

Pour ces deux valeurs de ω on obtient deux systèmes, dans lesquels la trajectoire du point M reste entre deux cercles concentriques décrits du centre O_1 et tangents à la trajectoire en trois points. Mais ces trajectoires représentent des courbes de forme différente, selon que

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) < 0,$$

ou

$$\cos\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) > 0.$$

La diversité de forme de ces courbes apparait clairement, quand on détermine la position du centre O_1 par rapport aux points de leur intersection avec l'axe de symétrie CM_0.

§ 17. Pour évaluer la différence

$$CO_1 - CM_0,$$

qui détermine la position du centre O_1 par rapport au point M_0 (fig. 9), nous

Fig 9.

déduisons du triangle isocèle CB_0M_0, où

$$CB_0 = B_0M_0 = 1,$$

$$CB_0M_0 = A_0B_0M_0 - A_0B_0C = \omega - \varphi_0,$$

la formule

$$CM_0 = 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}.$$

Cette égalité jointe à la valeur de CO_1 donne, d'après (39):

$$CO_1 - CM_0 = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} - 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) - 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Pour simplifier cette formule, remarquons que

$$2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \cos \left(\omega - \varphi_2 - \varphi_0\right) - \cos \varphi_2$$

$$= \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) \cos \frac{\varphi_0}{2} + \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) \sin \frac{\varphi_0}{2} - \cos \varphi_2,$$

$$2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2};$$

ce qui la réduit à la forme:

$$CO_1 - CM_0 = \frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)+\cos\varphi_2-\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)};$$

d'où, remplaçant, d'après (38),

$$\sin\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

par

$$\frac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}{\sin\frac{\varphi_1}{2}},$$

nous trouvons

$$O_1C - CM_0 = \frac{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}+\cos\varphi_2-\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)},$$

et finalement

$$(40)\qquad O_1C - CM_0 = \frac{\cos^2\frac{\varphi_2}{2}-\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)}.$$

De la même manière nous trouvons

$$(41)\qquad O_1C - CM_1 = \frac{\cos^2\frac{\varphi_2}{2}-\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)}.$$

On voit directement d'après ces formules que, si

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)<0,$$

les différences

$$CO_1 - CM_0,\quad CO_1 - CM_1$$

ont le même signe. En remarquant que cela ne peut avoir lieu, si le centre O_1 se trouve entre les points M_0, M_1, nous concluons que ces points doivent être posés de l'un côté du centre O_1, si

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)<0.$$

Pour ce qui concerne le cas

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)>0,$$

on voit d'après la composition des formules (40), (41), que pour les valeurs positives de

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

les signes des différences

$$CO_1 - CM_0, \quad CO_1 - CM_1$$

dépendent des limites, entre lesquelles sont enfermées ces grandeurs.

Pour trouver ces limites, remarquons que, d'après ce qu'on a dit dans le § 5, les angles φ_2, φ_3 doivent être compris entre les angles φ_0, φ_1, où $\varphi_0 > \varphi_1$; par suite nous aurons

$$\varphi_0 > \varphi_3, \quad \varphi_1 < \varphi_2.$$

D'où il vient

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \sin \frac{\varphi_2}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} > \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \sin \frac{\varphi_3}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} < \sin \frac{\varphi_3}{2},$$

et comme, d'après (13),

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}},$$

la dernière égalité donne

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} < \sin \frac{\varphi_3}{2}.$$

En remarquant que, d'après (38),

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}$$

nous tirons de ces inégalités:

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) > \sin \frac{\varphi_2}{2}, \quad \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) < \sin \frac{\varphi_3}{2},$$

ce qui, pour

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) > 0,$$

donne

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) < \cos \frac{\varphi_2}{2}, \quad \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) > \cos \frac{\varphi_3}{2}.$$

D'après ces inégalités, qui déterminent la limite supérieure et la limite inférieure pour la valeur de

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right),$$

nous recevons

$$\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) > \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_2}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) < \cos^2 \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_3}{2};$$

d'où il vient

$$\cos^2\frac{\varphi_2}{2}-\cos\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)>0,$$

$$\cos^2\frac{\varphi_2}{2}-\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)<0,$$

parce que $\varphi_2<\varphi_0$, $\varphi_2>\varphi_1$.

Les inégalités ci-dessus déduites font voir qu'en déterminant les différences

$$CO_1-CM_0,\quad CO_1-CM_1$$

d'après les formules (40), (41), on reçoit pour elles, dans le cas

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)>0,$$

des valeurs de signes contraires; mais pour que cela soit ainsi, il faut, d'après la composition de ces différences, que le centre O_1 se trouve situé entre les points M_0, M_1 (fig. 9). On en conclue que la position du centre O_1 par rapport aux points M_0, M_1 change avec le changement du signe de $\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)$.

Si

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)>0,$$

le centre O_1 est situé entre les points M_0, M_1; mais si

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)<0,$$

les points M_0, M_1 se trouvent du même côté du centre O_1.

§ 18. En nous arrêtant au cas

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)<0,$$

quand les points M_0, M_1 se trouvent du même côté du centre O_1, et supposant qu'ils sont situés plus bas que celui-ci (fig. 10), nous trouvons

$$O_1M_0=CO_1-CM_0,\quad O_1M_1=CO_1-CM_1;$$

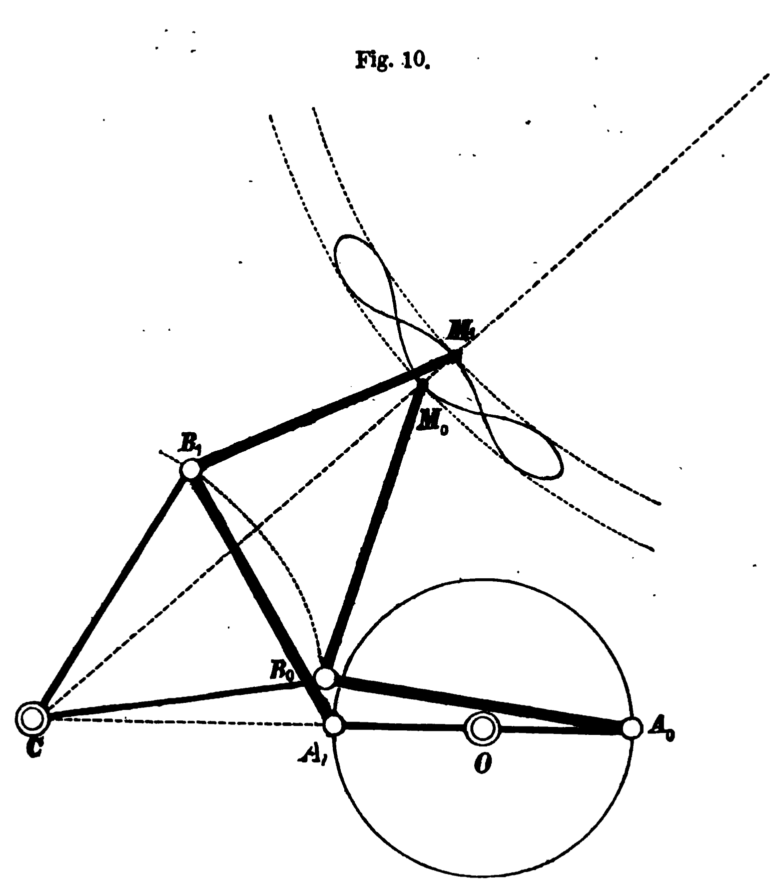
et en conséquence, d'après ce qu'on a dit dans le § 10 sur les cercles concentriques, entre lesquels est enfermée la trajectoire considérée, nous recevons pour les rayons R_0, R_1 les égalités suivantes:

$$R_0=O_1M_0=CO_1-CM_0,\quad R_1=O_1M_1=CO_1-CM_1;$$

d'où il vient

$$\frac{R_0+R_1}{2}=CO_1-\frac{CM_0+CM_1}{2},\quad \frac{R_0-R_1}{2}=\frac{CM_1-CM_0}{2}.$$

Fig. 10.



Mettant ici les valeurs de

$$CO_1,\ CM_0,\ CM_1,$$

nous recevons d'après (37), (39)

$$\frac{R_0+R_1}{2}=\frac{2\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\sin\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)}-\sin\frac{\omega-\varphi_0}{2}-\sin\frac{\omega-\varphi_1}{2},$$

$$\frac{R_0-R_1}{2}=\sin\frac{\omega-\varphi_1}{2}-\sin\frac{\omega-\varphi_0}{2},$$

ce qui se réduit aux formules suivantes:

$$\frac{R_0+R_1}{2}=\frac{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\sin\left(\frac{\omega}{2}-\varphi_2-\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{R_0-R_1}{2}=2\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}\right).$$

Nous les avons trouvées en supposant que les points M_0, M_1 sont situés plus bas que le centre O_1. Dans l'hypothèse contraire, nous recevons les mêmes formules, mais accompagnées du signe —. Donc, pour embrasser les deux cas, prenons les formules avec le double signe $\pm$. Dans les formules

$$\frac{R_0+R_1}{2}=\pm\frac{2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\sin\left(\frac{\omega}{2}-\varphi_2-\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\frac{R_0-R_1}{2}=\pm 2\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}\right),$$

ainsi obtenues il faut garder l'un ou l'autre signe, ce qui se détermine par la condition que la demi-somme

$$\frac{R_0+R_1}{2}$$

ne peut pas être négative.

Passant au cas

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)>0,$$

quand, d'après le § 17, le centre O_1 est situé entre les points M_0, M_1, et supposant (fig. 9) que le point M_0 est au-dessous du point M_1, nous trouvons

$$O_1M_0=CO_1-CM_0,\quad O_1M_1=CM_1-CO_1,$$

et par suite, d'après le § 10, nous aurons

$$R_0=CO_1-CM_0,\quad R_1=CM_1-CO_1,$$

ce qui donne

$$\frac{R_0+R_1}{2}=\frac{CM_1-CM_0}{2},\quad \frac{R_0-R_1}{2}=CO_1-\frac{CM_0+CM_1}{2}.$$

Si nous comparons ces égalités avec celles que nous avons reçues pour le cas

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)<0,$$

nous remarquons qu'ici on a pour la demi-somme

$$\frac{R_0+R_1}{2}$$

la même expression, qu'on a trouvée plus haut pour la demi-différence

$$\frac{R_0-R_1}{2},$$

et vice-versâ. Donc, en appliquant les formules ci-dessus trouvées au cas considéré, nous aurons

$$\frac{R_0+R_1}{2}=2\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}\right),$$

$$\frac{R_0-R_1}{2}=2\frac{\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\sin\left(\frac{\omega}{2}-\varphi_2-\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Ces formules concernent le cas, où le point M_1 est situé au-dessus du point M_0. Pour la position inverse des points M_0, M_1 on reçoit les mêmes formules, mais avec le signe —; et par suite nous aurons en général

$$\frac{R_0+R_1}{2}=\pm 2\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\varphi_0+\varphi_1}{4}\right),$$

$$\frac{R_0-R_1}{2}=\pm 2\,\frac{\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\sin\left(\frac{\omega}{2}-\varphi_2-\frac{\varphi_0-\varphi_1}{4}\right)}{\sin\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)},$$

où il faut retenir celui de deux signes $\pm$, qui donne pour

$$\frac{R_0+R_1}{2}$$

une valeur positive.

Les formules déduites contiennent, comme cas particuliers, les formules que nous avons trouvées dans les §§ 13 et 14, en supposant que l'angle ABC est égal aux deux angles droits, et dans le § 15, où nous avons supposé que la distance O_1C est infinie. Les premières de ces formules proviennent des formules générales, qui ont lieu pour

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)>0,$$

et les autres dérivent des formules obtenues dans le cas

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)<0.$$

On retrouve les premières formules pour

$$\omega=\pi,$$

et les secondes pour

$$\omega=2\left(\varphi_2+\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Nous avons vu que dans ces cas particuliers la trajectoire du point M présente deux formes différentes (fig. 6, 8). Dans le cas général on obtient aussi des trajectoires de deux formes différentes, selon le signe de $\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)$. Si

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)>0,$$

la trajectoire a la forme de la courbe, dont nous avons parlé dans les §§ 13 et 14. Mais si

$$\cos\left(\omega-\varphi_2-\frac{\varphi_0}{2}\right)<0,$$

la trajectoire sera une courbe semblable à celle, dont nous avons parlé dans le § 15, mais avec cette différence, qu'ici (fig. 10) les droites parallèles

sont remplacées par des arcs des cercles concentriques, décrits du centre O_1 avec les rayons R_0, R_1.

§ 19. Dans les §§ précédents nous avons considéré le cas, quand l'angle A_0OA varie entre les limites les plus larges, passant de $-\pi$ à $+\pi$.

Occupons nous à présent du cas contraire, en supposant que l'angle A_0OA reste entre les limites infiniment proches de zéro. Supposons pour cela que α, la valeur limite de l'angle A_0OA, reste infiniment petite. On voit de l'équation (16) que pour une valeur infiniment petite de α la différence

$$\varphi_0 - \varphi_1$$

est aussi infiniment petite; donc, en négligeant les grandeurs infiniment petites devant les grandeurs finies, nous aurons dans le cas considéré

$$\varphi_1 = \varphi_0,$$

et par suite

$$\varphi_2 = \varphi_0;$$

parce que, d'après le § 5, l'angle φ_2 doit être compris entre les angles φ_0, φ_1. Substituant ces valeurs de φ_1, φ_2 dans les équations (15), nous recevons pour r, d, CO_1 les formules suivantes:

$$r = \sin\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0\right)\cos\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2}\right)},$$

$$d = \sin\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0\right)\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2}\right)},$$

$$CO_1 = \frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0\right)\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Si nous remarquons que pour ces valeurs de φ_1, φ_2 il vient

$$\frac{\sin\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}\sin^2\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^4\frac{\varphi_0}{2}} = \frac{\sin\varphi_0\sin^2\left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2}\right) - \sin^4\frac{\varphi_0}{2}},$$

nous déduisons de l'équation (16) la relation suivante entre les angles infiniment petits α et $\varphi_0 - \varphi_1$:

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\sin\varphi_0\sin^2\left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2}\right) - \sin^4\frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2},$$

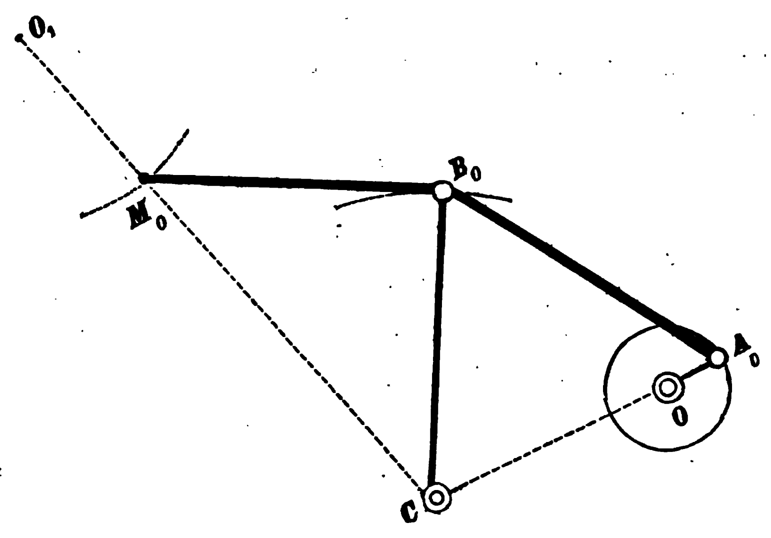
ce qui donne

$$(42)\quad \varphi_0-\varphi_1=\frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\omega-\frac{3\varphi_0}{2}\right)-\sin^4\frac{\varphi_0}{2}}{2\sin\varphi_0\sin^2\left(\omega-\frac{3\varphi_0}{2}\right)}\alpha^2=\frac{\sin(\omega-\varphi_0)\sin(\omega-2\varphi_0)}{4\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\left(\omega-\frac{3\varphi_0}{2}\right)}\alpha^2.$$

Passant à la détermination du rayon R_0 d'après le § 10 et supposant (fig. 11) que le centre O_1 est au-dessus du point M_0, nous trouvons que

$$R_0 = O_1M_0 = CO_1 - CM_0.$$

Fig. 11.



Introduisant ici la valeur de CO_1 ci-dessus trouvée et changeant, d'après (37), CM_0 en $2\sin\frac{\omega-\varphi_0}{2}$, nous recevons

$$R_0=\frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2}-\varphi_0\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)}-2\sin\frac{\omega-\varphi_0}{2}$$

$$=2\sin\frac{\omega-\varphi_0}{2}\,\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{\omega}{2}-\varphi_0\right)}{\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Nous avons déduit cette formule, en supposant que le centre O_1 se trouve au-dessus du point M_0. Dans l'hypothèse contraire, nous trouverons la même formule, mais avec le signe —, de sorte que pour embrasser les deux cas, nous écrirons cette formule avec le signe double.

Dans la formule

$$(43)\qquad R_0=\pm 2\sin\frac{\omega-\varphi_0}{2}\,\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{\omega}{2}-\varphi_0\right)}{\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)},$$

ainsi obtenue, il faut conserver le signe, qui donne pour R_0 la valeur positive.

Ayant le rayon R_0, on peut, d'après la formule (18), déterminer le rayon R_1 par l'équation

$$R_1^2 = R_0^2 - \frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}}\,\frac{(d^2-r^2)\,CO_1\sin\frac{\omega}{2}}{d}.$$

Dans le cas considéré les différences $\varphi_0 - \varphi_1$, $\varphi_2 - \varphi_1$ ont des valeurs infiniment petites. Pour trouver leur rapport, posons

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \Delta, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta_1,$$

ce qui donne

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \Delta, \quad \varphi_2 = \varphi_0 - \Delta + \Delta_1,$$

et par conséquent, on reçoit, d'après (14), l'équation suivante entre les grandeurs infiniment petites Δ et Δ_1:

$$\operatorname{cotang}\frac{\varphi_0 - \Delta + \Delta_1}{2} = \frac{1}{\sin\frac{\Delta}{4}}\left[\sqrt{\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sin\frac{\varphi_0-\Delta}{2}}} - \cos\frac{\Delta}{4}\right].$$

Développant suivant les puissances de Δ, Δ_1 et nous bornant aux infiniment petites du premier ordre, nous recevons de cette équation

$$\Delta_1 = \frac{1}{4}\,\Delta,$$

ce qui, d'après notre notation, donne

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{4}\,(\varphi_0 - \varphi_1).$$

Substituant cette valeur de $\varphi_2 - \varphi_1$ dans l'expression

$$\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}\,\frac{(d^2-r^2)\,CO_1}{d},$$

et remarquant, d'après les valeurs ci-dessus trouvées de φ_1, φ_2, r, d, CO_1, que

$$\frac{(d^2-r^2)\,CO_1}{d\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}} = \frac{4}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)},$$

nous trouvons, exactement jusqu'aux puissances de $\varphi_0 - \varphi_1$ du troisième degré inclusivement,

$$\frac{\sin\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}\,\frac{(d^2-r^2)\,CO_1\sin\frac{\omega}{2}}{d} = \frac{1}{32}\,\frac{(\varphi_0-\varphi_1)^3\sin\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)};$$

par suite l'équation, qui détermine R_1^2, donne avec la même exactitude

$$R_1^2 = R_0^2 - \frac{1}{32}\,\frac{(\varphi_0-\varphi_1)^3 \sin\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)}, \qquad R_1 = R_0 - \frac{1}{64}\,\frac{(\varphi_0-\varphi_1)^3 \sin\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)R_0}.$$

Il suit de la dernière égalité

$$\frac{R_0-R_1}{2} = \frac{1}{128}\,\frac{(\varphi_0-\varphi_1)^3 \sin\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\left(\frac{3\varphi_0}{2}-\frac{\omega}{2}\right)R_0},$$

ce qui présente la limite supérieure de la déviation du point M du cercle décrit par le rayon $\frac{R_0+R_1}{2}$ et ayant pour centre O_1 dans le mouvement du système considéré, quand l'angle α reste entre $\varphi=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_1$.

Substituant ici la valeur de $\varphi_0-\varphi_1$ d'après (41) et la valeur du rayon R_0 d'après (43), nous trouvons pour cette limite l'expression suivante:

$$\pm\frac{1}{16384}\,\frac{\sin\frac{\omega}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^3(\omega-\varphi_0)\sin^3(\omega-2\varphi_0)\,\alpha^6}{\cos^4\frac{\varphi_0}{2}\sin\frac{\omega-\varphi_0}{2}\sin\frac{\omega-2\varphi_0}{2}\sin^6\left(\omega-\frac{3\varphi_0}{2}\right)},$$

où α est la valeur limite de l'angle A_0OA. D'où l'on voit, qu'à mesure que l'angle α tend à s'annuler, ces déviations diminuent très rapidement, et par suite pour de petites valeurs de α la trajectoire du point M diffère très peu de l'arc du cercle décrit du centre O_1 par le rayon $\frac{R_0+R_1}{2}$.

Les formules que nous avons démontrées représentent la limite, à laquelle s'approchent les formules générales, quand l'angle α tend à s'annuler et peuvent servir à la résolution approximative de diverses problèmes qui concernent le système considéré, quand l'angle α est assez petit.

26.

SUR LES EXPRESSIONS APPROCHÉES DE LA RACINE CARRÉE D'UNE VARIABLE PAR DES FRACTIONS SIMPLES.

(TRADUIT PAR C. A. POSSÉ.)

(Lu le 14 mars 1889.)

(Traduit par A. Vassilief, à Kasan. Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure. III série, XV, 1898, p. 463—480.)

О приближенныхъ выраженіяхъ квадратнаго корня перемѣнной черезъ простыя дроби.

Приложеніе къ LXI тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 1, 1889 г.)

Angenäherte Darstellung der Quadratwurzel einer Veränderlichen mittelst einfacher Brüche.

(Übersetzt von O. Backlund. Acta mathematica. XVIII, 1894, p. 113—132.)

Sur les expressions approchées de la racine carrée d'une variable par des fractions simples.

§ 1. Dans l'évaluation des quadratures on est souvent obligé de remplacer les fonctions offrant des difficultés à l'intégration par leurs expressions approchées. Lorsqu'une difficulté pareille provient de la présence d'un radical du second degré, on pourra employer très utilement l'expression approchée du radical

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

par une fonction de la forme

$$A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x},$$

qu'on obtient à l'aide du premier théorème démontré dans notre Mémoire, sous le titre: *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* *). Quand on se propose de diminuer autant que possible la limite de l'erreur relative pour toutes les valeurs de x, de $x=1$ à $x=h>1$, la meilleure représentation du radical

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

par une fonction de la forme

$$A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}$$

sera celle, pour laquelle les rapports

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}},\quad \frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

s'écartent le moins possible de 1 entre $x=1$, $x=h$.

*) T. I, p. 273—378.

Nous pouvons trouver une telle représentation du radical

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

au moyen du théorème mentionnée ci-dessus, en l'appliquant à la détermination des valeurs

$$A,\ B_1,\ B_2,\ldots B_n,\ C_1,\ C_2,\ldots C_n,$$

pour lesquelles le logarithme du rapport

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}$$

ou

$$\frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

s'écarte le moins de 0, x variant de $x=1$ à $x=h$. Supposant que dans l'intervalle $x=1$, $x=h$ les valeurs extrêmes de ces rapports soient

$$l,\ \frac{1}{l}>l,$$

nous nous convainquons, en vertu du théorème mentionné, de la possibilité d'approcher ces limites à 1 par un changement convenable des $2n+1$ quantités

$$A,\ B_1,\ B_2,\ldots B_n,\ C_1,\ C_2,\ldots C_n,$$

qui figurent dans la fonction

$$y=\frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}=\sqrt{x}\left[A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}\ldots+\frac{B_n}{C_n+x}\right],$$

si, dans l'intervalle de $x=1$ à $x=h$, elle atteint les valeurs extrêmes

$$l,\ \frac{1}{l}$$

moins de $2n+2$ fois.

Il en résulte que la plus grande approximation des limites

$$l,\ \frac{1}{l}$$

à l'unité ne peut avoir lieu que pour de telles valeurs

$$A,\ B_1,\ B_2,\ldots B_n,\ C_1,\ C_2,\ldots C_n,$$

pour lesquelles la fonction

$$(1)\qquad y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n+x}\right]$$

dans l'intervalle

$$x = 1,\quad x = h$$

atteint au moins $2n+2$ fois les valeurs l, $\frac{1}{l}$, sans les franchir.

Nous allons montrer maintenant comment d'après cela se détermine la quantité l et la fonction y, qui donnent la solution de nôtre problème.

§ 2. Comme la fonction y, se réduisant à l ou $\frac{1}{l}$ pour une valeur de x entre $x = 1$ et $x = h$ qui ne rend pas

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

et qui est différente de

$$x = 1,\quad x = h,$$

dépassera évidemment les limites l, $\frac{1}{l}$, ils doivent exister, d'après ce qui précède, au moins $2n+2$ différentes valeurs de x, dans l'intervalle de $x = 1$ à $x = h$, susceptibles à vérifier l'équation

$$(l^2 - y^2)\,(1 - l^2 y^2) = 0$$

en même temps que l'équation

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 x\,(1-x)\,(h-x) = 0,$$

dont les premiers membres représentent d'après (1) des fractions rationnelles au dénominateur commun

$$(C_1+x)^4\ (C_2+x)^4\ldots(C_n+x)^4$$

et aux numérateurs de degré $4n+2$.

Or d'après la constitution de ces équations il est clair que leurs racines communes autres que

$$x = 1,\ x = h,$$

doivent être racines multiples; par conséquent ces équations ne peuvent avoir lieu simultanément pour $2n+2$ différentes valeurs de x, sans avoir $4n+2$ racines communes, égales ou inégales, ce qui suppose leur identité, car d'après ce qui précède, elles se réduisent à des équations de degré $4n+2$.

Or ces équations ne peuvent être identiques que sous la condition

$$(l^2 - y^2)\,(1 - l^2 y^2) = C\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 x\,(1-x)\,(h-x),$$

où C est une constante; d'où il résulte l'équation différentielle:

(2) $$\sqrt{C}\frac{\partial y}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}=\frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}.$$

Parmi les diverses fonctions y, qui satisfont à cette équation pour des valeurs quelconques des constantes l et C, il est facile de distinguer celle qui donne la solution de nôtre problême.

Remarquons dans ce but que d'après (1) l'égalité

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

se réduit à une équation de degré $2n$, et par conséquent la dérivée $\frac{\partial y}{\partial x}$ ne peut s'annuler plus de $2n$ fois, depuis $x=0$ jusqu'à $x=+\infty$.

Or d'après ce qui précède elle se réduit à zéro au moins $2n$ fois dans l'intervalle

$$x=1,\ x=h;$$

donc elle ne peut point s'annuler dans les intervalles

$$x=0,\quad x<1,$$
$$x>h,\quad x=+\infty,$$

tandis que dans l'intervalle

$$x=1,\quad x=h$$

elle doit s'annuler $2n$ fois.

En vertu de cela, l'équation (2) donne entre les intégrales définies

$$\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}},\quad \int_1^h\frac{\partial x}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}},$$

$$\int_0^l\frac{\partial y}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}},\quad \int_l^{\frac{1}{l}}\frac{\partial y}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}},$$

la relation suivante

(3) $$\frac{\displaystyle\int_0^l\frac{\partial y}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}}{\displaystyle\int_l^{\frac{1}{l}}\frac{\partial y}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}}=(2n+1)\frac{\displaystyle\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\displaystyle\int_1^h\frac{\partial x}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}.$$

§ 3. A l'aide de cette égalité il est facile de calculer la valeur de l d'après la valeur du rapport des intégrales

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}, \quad \int_1^h \frac{\partial x}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}.$$

Parmi les diverses formules, dont on peut faire usage, nous allons choisir dans le cas actuel celle qui suit:

$$(4) \qquad l^4 = 1 - 16\, q^{2n+1} \left(\frac{1+q^{4n+2}+q^{12n+6}+\ldots}{1+q^{2n+1}+q^{6n+2}+\ldots}\right)^8$$

$$= 1 - 16\, q^{2n+1} \left(\frac{\sum\limits_{i=+\infty}^{i=-\infty} q^{2(2n+1)\, i\,(2i+1)}}{\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{(2n+1)\, i\,(2i+1)}}\right)^8,$$

où

$$q = e^{-\pi \frac{\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\int_1^h \frac{\partial x}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}}.$$

Cette formule fait bien voir avec quelle rapidité, lorsque le nombre n augmente, les quantités l, $\frac{1}{l}$ s'approchent de l'unité, et par suite l'erreur relative de la formule

$$A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n+x},$$

qui donne la valeur approchée du radical

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

dans l'intervalle de $x=1$ à $x=h$, diminue.

Désignant par θ une quantité moyenne entre 0 et 1, nous trouvons pour représenter toutes les quantités renfermées entre l, $\frac{1}{l}$ la formule $l^{2\theta-1}$; par conséquent, d'après ce que nous avons montré à l'égard de la fonction

$$y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n+x}\right],$$

on aura l'équation suivante pour la détermination du radical $\sqrt{\frac{1}{x}}$:

$$(5) \qquad \sqrt{\frac{1}{x}} = l^{1-2\theta}\left[A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n+x}\right].$$

§ 4. Les quantités

$$A,\ B_1,\ B_2, \ldots B_n,\ C_1,\ C_2, \ldots C_n,$$

qui figurent dans cette formule se déduisent facilement de l'expression de l'intégrale de l'équation (2), qu'on obtient supposant que l'équation (3) ait lieu.

Représentant cette intégrale sous la forme

$$\sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\right],$$

nous trouvons que les quantités

$$A,\ B_1,\ B_2, \ldots B_n,\ C_1,\ C_2, \ldots C_n,$$

se déterminent à l'aide des fonctions elliptiques au module

(6) $$k = \sqrt{1 - \frac{1}{h}},$$

et

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

par les formules suivantes

$$A = \frac{1}{l\sqrt{h}\left[1 + 2\,dn\frac{2K}{2n+1} + 2\,dn\frac{4K}{2n+1} + \ldots + 2\,dn\frac{2nK}{2n+1}\right]},$$

$$B_m = \frac{2\sqrt{h}\,dn\,\frac{2mK}{2n+1}}{l\,sn^2\frac{2mK}{2n+1}\left[1 + 2\,dn\frac{2K}{2n+1} + \ldots + 2\,dn\frac{2nK}{2n+1}\right]},\quad C_m = \frac{cn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}{sn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}\,h.$$

Remarquant que la fonction

$$dn\,\frac{2mK}{2n+1}$$

se réduit à l'unité pour $m = 0$ et ne change pas par le changement de m en $-m$ nous pouvons représenter la somme

$$1 + 2dn\,\frac{2K}{2n+1} + 2dn\,\frac{4K}{2n+1} + \ldots + 2dn\,\frac{2nK}{2n+1}$$

sous la forme

$$\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1},$$

le signe de la somme étant étendu sur les valeurs

$$m = -n,\ -(n-1), \ldots -1,\ 0,\ 1, \ldots n-1,\ n.$$

D'après cela nous aurons

$$A = \frac{1}{l\sqrt{h}\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}}, \quad B_m = \frac{2\sqrt{h}\,dn\,\frac{2mK}{2n+1}}{lsn^2\,\frac{2mK}{2n+1}\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}}$$

et

$$\frac{B_m}{C_m + x} = \frac{2\sqrt{h}\,dn\,\frac{2mK}{2n+1}}{lsn^2\,\frac{2mK}{2n+1}\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{cn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}{sn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}\,h + x}$$

$$= \frac{2dn\,\frac{2mK}{2n+1}}{l\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{h}}{xsn^2\,\frac{2mK}{2n+1} + hcn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Comme l'expression

$$\frac{dn\,\frac{2mK}{2n+1}}{l\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{h}}{xsn^2\,\frac{2mK}{2n+1} + hcn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}$$

se réduit pour $m = 0$ à

$$\frac{1}{l\sqrt{h}\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}},$$

ce qui est égal à A, et ne change pas de valeur par le changement du signe de m, on voit qu'en prenant la somme de ces expressions pour les valeurs suivantes de m:

$$m = -n,\ -(n-1), \ldots,\ -1,\ 0,\ 1, \ldots,\ n-1,\ n,$$

on obtient l'expression de la somme

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}.$$

Par conséquent, d'après (5) on aura la formule suivante pour l'évaluation du radical

$$\sqrt{\frac{1}{x}},$$

x ne dépassant pas les limites $x = 1$ et $x = h$:

$$(7) \qquad \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sum \frac{\sqrt{h}\,dn\,\frac{2mK}{2n+1}}{xsn^2\,\frac{2mK}{2n+1} + hcn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta}\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}}.$$

§ 5. L'égalité que nous avons obtenue donne le moyen de déduire facilement une formule qui fournit les limites de la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\, du$$

à l'aide des intégrales contenant la fonction V hors du signe du radical.

Il est nécessaire pour cela que les fonctions U, V restent positives pour toutes les valeurs de la variable sur lesquelles s'étend l'intégration.

Désignant par

$$M, \ M_0 < M$$

les limites que la fonction V ne peut franchir, nous remarquons que l'expression

$$\frac{V}{M_0}$$

restera entre les limites

$$1, \ \frac{M}{M_0},$$

et par conséquent entre les limites

$$1, \ h,$$

si

$$h = \frac{M}{M_0}.$$

D'où l'on voit que pour les valeurs de u, sur lesquelles s'étend l'intégrale

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\, du,$$

l'égalité (7) est applicable à

$$x = \frac{V}{M_0},$$

en supposant

$$h = \frac{M}{M_0}.$$

En substituant ces valeurs de x et h dans l'égalité (7) nous obtenons

$$\sqrt{\frac{M_0}{V}} = \frac{\sum \dfrac{\sqrt{M_0 M}\, dn \dfrac{2mK}{2n+1}}{V sn^2 \dfrac{2mK}{2n+1} + M cn^2 \dfrac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta} \sum dn \dfrac{2mK}{2n+1}},$$

ce qui donne après la réduction du facteur commun $\sqrt{M_0}$:

$$\sqrt{\frac{1}{V}}=\frac{\sum\frac{\sqrt{M}\,dn\,\frac{2mK}{2n+1}}{Vsn^2\,\frac{2mK}{2n+1}+Mcn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta}\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}}.$$

D'ailleurs la fonction U restant, par supposition, positive pour les valeurs de u sur lesquelles s'étend l'intégrale

$$\int\frac{U\partial u}{\sqrt{V}},$$

on aura, d'après l'égalité précédente, où θ est une quantité inconnue entre 0 et 1, la formule

$$(8)\qquad \int\frac{U\partial u}{\sqrt{V}}=\frac{\sum\int\frac{\sqrt{M}\,dn\,\frac{2mK}{2n+1}\,U\partial u}{Vsn^2\,\frac{2mK}{2n+1}+Mcn^2\,\frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta}\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Cette formule a été obtenue en supposant

$$h=\frac{M}{M_0};$$

par suite d'après (6) nous aurons

$$(9)\qquad M_0=M\,(1-k^2).$$

Ce qui nous donne une relation entre les quantités M, M_0 que la fonction V ne doit dépasser dans les limites de l'intégration, et le module k, dont on se sert pour former la formule (8) et l'équation (4).

Désignant pour abréger

$$sn\,\frac{2mK}{2n+1}$$

par s_m nous trouvons

$$cn\,\frac{2mK}{2n+1}=\sqrt{1-s_m^2};\quad dn\,\frac{2mK}{2n+1}=\sqrt{1-k^2\,s_m^2},$$

$$\sum dn\,\frac{2mK}{2n+1}=1+2\sqrt{1-k^2\,s_1^2}+2\sqrt{1-k^2\,s_2^2}+\ldots+2\sqrt{1-k^2\,s_n^2},$$

et d'après cela, en posant

$$(10)\quad S=1+2\sqrt{1-k^2\,s_1^2}+2\sqrt{1-k^2\,s_2^2}+\ldots+2\sqrt{1-k^2\,s_n^2}$$

et

$$(11) \qquad F(s) = \frac{\sqrt{M}\sqrt{1-k^2 s^2}}{S} \int \frac{U\partial u}{\sqrt{Vs^2 + M(1-s^2)}},$$

nous aurons en vertu de (8):

$$(12) \qquad \int \frac{U\partial u}{\sqrt{V}} = \frac{1}{l^{2\theta}} \left[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)\right].$$

La quantité θ étant comprise entre 0 et 1, cette égalité donnera pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$ les deux limites de la valeur de l'intégrale $\int \frac{U}{\sqrt{V}} \partial u$:

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du \overline{\gtrless} F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n),$$

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du \overline{\lessgtr} \frac{1}{l^2} \left[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)\right],$$

où l est une quantité déterminée par l'égalité (4) dont la composition montre que l s'approche rapidement de l'unité lorsque le nombre n augmente.

§ 6. Passant aux applications des formules que nous avons déduites, commençons par le cas:

$$U = 1, \quad V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u,$$

où $\lambda < 1$. En prenant 0 pour limite inférieure dans l'intégrale

$$\int \frac{U\partial u}{\sqrt{V}} = \int \frac{\partial u}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}},$$

nous trouvons que la plus grande valeur de la fonction

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$$

dans les limites de l'intégration est 1, et par suite d'après notre notation nous pouvons prendre

$$M = 1.$$

Pour cette valeur de M l'équation (9) donne

$$M_0 = 1 - k^2,$$

M_0 étant la limite inférieure de la quantité

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u,$$

que celle-ci ne doit dépasser pour que la formule (12) soit appliquable.

Or la fonction V ne devant pas franchir la limite M_0 pour toutes les valeurs de u sur lesquelles s'étend l'intégrale

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

pour toutes ces valeurs de u, on doit avoir

$$1-\lambda^2 \sin^2 u \overline{\gtrless} 1-k^2,$$

et par conséquent

$$\sin u \overline{\gtrless} \frac{k}{\lambda}.$$

Si

$$\lambda \leqq k,$$

cette condition sera évidemment remplie pour toutes les valeurs réelles de u; donc dans le cas de

$$\lambda \leqq k$$

on pourra appliquer la formule (12) à l'intégrale

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

u étant aussi grand qu'on le veut.

Quant au cas de

$$\lambda > k$$

la condition précédente ne sera remplie que pour des valeurs de u qui ne surpassent pas

$$\arcsin \frac{k}{\lambda};$$

par conséquent dans le cas actuel nos formules ne sont applicables à l'intégrale

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}$$

que sous la condition

$$u \overline{\gtrless} \arcsin \frac{k}{\lambda}.$$

Substituant dans la formule (11)

$$U=1,\ \ V=1-\lambda^2 \sin^2 u,\ \ M=1,$$

et prenant 0 pour limite inférieure de l'intégration, nous trouvons que dans le cas considéré

$$F(s) = \frac{\sqrt{1-k^2 s^2}}{S} \int_0^u \frac{\partial u}{(1-\lambda^2 \sin^2 u) s^2 + 1 - s^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-k^2 s^2}}{S \sqrt{1-\lambda^2 s^2}} \text{ arc tang } \left(\sqrt{1-\lambda^2 s^2} \text{ tang } u\right).$$

A l'aide de cette fonction et les quantités

$$s_1, \; s_2, \ldots s_n, \; S,$$

qui se déterminent (§ 5) par la fonction elliptique au module k, nous obtenons d'après (12) une équation donnant les limites de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

qui se rapprochent rapidement lorsque le nombre n augmente.

§ 7. En nous arrêtant à la supposition particulière

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

nous trouvons

$$q = e^{-\pi},$$

et par conséquent l'équation (4), qui détermine la valeur de l pour diverses valeurs de n, se réduit à la suivante:

$$l^4 = 1 - 16 e^{-(2n+1)\pi} \left(\frac{1 + e^{-(4n+2)\pi} + e^{-(12n+6)\pi} + \ldots}{1 + e^{-(2n+1)\pi} + e^{-(6n+8)\pi} + \ldots} \right)^8.$$

Cette équation pour

$$n = 1, 2, \ldots,$$

donne

$$l^2 = 0{,}9993546;$$

$$l^2 = 0{,}9999988;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où l'on voit avec quelle rapidité se rapprochent, pour des valeurs croissantes de n, les deux limites de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

fournies par la formule (12).

En posant dans cette formule $n = 1$, nous obtenons

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}} \left[F(0) + 2F(s_1)\right].$$

L'équation qui détermine S se réduisant pour

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad n = 1$$

à l'égalité

$$S = 1 + 2\sqrt{1 - \frac{1}{2} s_1^2},$$

et

$$sn\, \frac{2K}{3} = s_1 = 0{,}9002272,$$

nous trouvons

$$S = 2{,}5424598,$$

en vertu de quoi, d'après (11), pour $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ il résulte

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} s^2} \operatorname{arc\,tang} \left(\sqrt{1-\lambda^2 s^2} \operatorname{tang} u\right)}{2{,}5424598 \sqrt{1-\lambda^2 s^2}}.$$

En faisant ici

$$s = 0, \quad s = s_1 = 0{,}9002272,$$

nous trouvons

$$F(0) = 0{,}3933199\, u,$$

$$F(s_1) = \frac{0{,}3033401 \operatorname{arc\,tang} \left(\sqrt{1 - 0{,}8104089\, \lambda^2} \operatorname{tang} u\right)}{\sqrt{1 - 0{,}8104089\, \lambda^2}},$$

ce qui, étant substitué dans l'égalité (12), donne la formule suivante pour l'évaluation de l'intégrale

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}:$$

$$\frac{1}{l^{2\theta}} \left[0{,}3933199\, u + \frac{0{,}6066801 \operatorname{arc\,tang} \left(\sqrt{1 - 0{,}8104089\, \lambda^2} \operatorname{tang} u\right)}{\sqrt{1 - 0{,}8104089\, \lambda^2}}\right].$$

Posant $n = 2$, nous trouvons que dans le cas considéré l'égalité (12) se réduit à la suivante:

$$\int_0^u \frac{\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}} \left[Au + \frac{B_1}{R_1} \operatorname{arc\,tang} (R_1 \operatorname{tang} u) + \frac{B_2}{R_2} \operatorname{arc\,tang} (R_2 \operatorname{tang} u)\right],$$

où

$$A = 0{,}2360679;\quad B_1 = 0{,}4188063;\quad B_2 = 0{,}3451258;$$

$$R_1 = \sqrt{1 - 0{,}4262988\,\lambda^2};\quad R_2 = \sqrt{1 - 0{,}9313131\,\lambda^2}.$$

Des formules semblables par rapport à l'intégrale

$$\int_0^u \frac{1 + p \sin^2 u}{1 + q \sin^2 u} \frac{\partial u}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

s'obtiennent de l'égalité (12) en y posant

$$U = \frac{1 + p \sin^2 u}{1 + q \sin^2 u},\quad V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u.$$

§ 8. En substituant dans l'égalité (12) au lieu de U et V diverses fonctions, nous obtenons des formules qui donnent les limites des valeurs des intégrales de la forme

$$\int \frac{U \partial u}{\sqrt{V}},$$

dont l'évaluation présente souvent de grandes difficultés.

Ainsi, posant

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u;\quad U = \Phi\,(\text{tang}\ u),$$

où $\Phi(\text{tg}\ u)$ est une fonction qui conserve le signe $+$ dans les limites de l'intégration, nous trouvons

$$\int_0^u \frac{\Phi\,(\text{tang}\ u)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} \partial u = \frac{1}{l^{2\theta}} \left[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)\right],$$

où

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int_0^u \frac{\Phi\,(\text{tang}\ u)\,\partial u}{1 - \lambda^2 s^2 \sin^2 u}.$$

Ces formules, d'après ce qu'on a remarqué dans le § 6, auront lieu pour toutes les valeurs de u, si

$$\lambda \leqq k.$$

En supposant cette condition remplie et prenant $\frac{\pi}{2}$ pour la limite supérieure de l'intégration, nous tirons de ces formules:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi\,(\text{tang}\ u)\,\partial u}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}} \left[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)\right],$$

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi\,(\text{tang}\ u)\,\partial u}{1 - \lambda^2 s^2 \sin^2 u}.$$

Posant dans la dernière intégrale

$$\operatorname{tang} u = s,$$

nous trouvons qu'elle se transforme en

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(s)\, \partial s}{1+(1-\lambda^2 s^2)\, s^2};$$

en vertu de quoi l'égalité (11), qui détermine la fonction $F(s)$ dans le cas considéré, se réduit à la suivante

$$F(s) = \frac{\sqrt{1-k^2 s^2}}{S} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(s)\, \partial s}{1+(1-\lambda^2 s^2)\, s^2}.$$

D'où l'on voit que la formule qu'on obtient pour l'évaluation de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\, \partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

ne contiendra que des intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(s)\, \partial s}{1+(1-\lambda^2 s^2)\, s^2},$$

dont la valeur est connue pour certaines formes particulières de la fonction $\Phi(s)$.

Ainsi, dans le cas où

$$\Phi(s) = s^{p-1}, \quad 0 < p < 1,$$

nous trouvons

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(s)\, \partial s}{1+(1-\lambda^2 s^2)\, s^2} = \int_0^{\infty} \frac{s^{p-1}\, \partial s}{1+(1-\lambda^2 s^2)\, s^2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{p\pi}{2} \left(1-\lambda^2 s^2\right)^{\frac{p}{2}}};$$

et d'après cela, en déterminant l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\, \partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\, \partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}}$$

au moyen de l'égalité (12), nous aurons

$$F(s) = \frac{\pi \sqrt{1-k^2 s^2}}{2 \sin \frac{p\pi}{2} \left(1-\lambda^2 s^2\right)^{\frac{p}{2}} S};$$

par conséquent cette egalité donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{\pi}{2} \frac{1+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_1^2}{(1-\lambda^2 s_1^2)^p}}+\ldots+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_n^2}{(1-\lambda^2 s_n^2)^p}}}{l^{2\theta} S \sin\frac{p\pi}{2}};$$

d'où, en substituant la valeur de S, tirée de (10), nous obtenons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta} \sin\frac{p\pi}{2}} \frac{1+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_1^2}{(1-\lambda^2 s_1^2)^p}}+\ldots+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_n}{(1-\lambda^2 s_n^2)^p}}}{1+2\sqrt{1-k^2 s_1^2}+\ldots+2\sqrt{1-k^2 s_n^2}}.$$

Dans le cas particulier, où l'on prend $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $n=1$, cette égalité, en y portant la valeur

$$s_1 = sn\,\frac{2K}{8} = 0{,}9002272,$$

donnera pour la détermination de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

pour $\lambda \overline{\gtrless} \sqrt{\frac{1}{2}}$, la formule suivante:

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta} \sin\frac{p\pi}{2}} \left[0{,}3933199 + \frac{0{,}6066801}{\left(1-0{,}8104089\,\lambda^2\right)^{\frac{p}{2}}}\right],$$

où $l^2 = 09993549$.

Posant $n=2$, pour la même valeur du module k, nous trouverons pour l'évaluation de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u}},$$

pour $\lambda \overline{\gtrless} \sqrt{\frac{1}{2}}$, la formule:

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta} \sin\frac{p\pi}{2}} \left[0{,}2360679 + \frac{0{,}4188063}{\left(1-0{,}4262988\,\lambda^2\right)^{\frac{p}{2}}} + \frac{0{,}3451258}{\left(1-0{,}9313131\,\lambda^2\right)^{\frac{p}{2}}}\right],$$

où $l^2 = 0{,}9999988$.

27.

SUR LES SOMMES COMPOSÉES DES VALEURS DE MONÔMES SIMPLES MULTIPLIÉS PAR UNE FONCTION QUI RESTE TOUJOURS POSITIVE.

(TRADUIT PAR D. SÉLIVANOFF.)

(Lu le 9 octobre 1890.)

О суммахъ, составленныхъ изъ значеній простѣйшихъ одночленовъ, умноженныхъ на функцію, которая остается положительною.

(Приложеніе къ LXIV-му тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 7, 1891 г.)

Sur les sommes composées des valeurs de monômes simples multipliés par une fonction qui reste toujours positive.

§ 1. En développant une fonction $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de la différence

$$x - X,$$

on obtient une formule servant à exprimer approximativement la fonction $f(x)$ sous la forme d'un polynôme dont les coefficients se déterminent par les valeurs de la fonction primitive

$$f(x)$$

et ses dérivées

$$f'(x), \quad f''(x), \ldots .$$

pour $x = X$. En développant $f(x)$ en une série de forme plus compliquée

$$(1) \qquad K_0 U_0 + K_1 U_1 + K_2 U_2 + \ldots,$$

où

$$U_0, \; U_1, \; U_2, \ldots .$$

sont des fonctions de la variable x indépendantes de $f(x)$, on obtient pour la détermination des coefficients

$$K_0, \; K_1, \; K_2, \ldots .$$

des formules pouvant généralement être présentées sous la forme suivante

$$K_0 = \sum \varphi_0(x_i) f(x_i), \quad K_1 = \sum \varphi_1(x_i) f(x_i) \ldots .$$

Les fonctions

$$\varphi_0(x), \; \varphi_1(x), \; \varphi_2(x), \ldots ,$$

qui y entrent, et les valeurs de la variable x, aux quelles s'étendent les sommes, dépendent de la nature des fonctions

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ldots,$$

servant à la formation de la série (1).

Dans les cas singulièrement simples, quand les fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots$$

sont des polynômes des degrés

$$0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

ces sommes se décomposent en sommes élémentaires

$$(2)\qquad \sum x_i^0 f(x_i),\quad \sum x_i f(x_i),\quad \sum x_i^2 f(x_i),\ldots;$$

et alors les expressions approximatives de $f(x)$ données par la formule

$$(3)\qquad f(x) = K_0 U_0 + K_1 U_1 + K_2 U_2 + \ldots$$

s'obtiennent à l'aide des sommes (2) formées avec les valeurs de monômes

$$x_i^0,\ x_i,\ x_i^2,\ldots,$$

multipliées par $f(x_i)$.

Les expressions approchées de la fonction $f(x)$ ainsi obtenues diffèrent essentiellement de celles qu'on déduit par le développement de la fonction $f(x)$ suivant les puissances de la différence $x - X$ et qui donnent des polynômes les plus rapprochés à $f(x)$ dans le voisinage de $x = X$.

Ayant un moindre degré de précision, quand il s'agit de calculer $f(x)$ dans le voisinage de $x = X$, ces expressions approchées donnent en certains cas une meilleure représentation de la fonction $f(x)$ pour les valeurs de x variant entre des limites plus ou moins étendues.

Ainsi il résulte de notre Mémoire *«Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés»* *), que la série (3) avec les fonctions

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ldots,$$

déterminées par le développement de la somme

$$\sum \frac{1}{x - x_i}$$

en fraction continue, et avec les coefficients

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ldots$$

*) T. I, p. 473—498.

composés linéairement à l'aide des sommes

$$\sum x_i^0 f(x_i),\quad \sum x_i f(x_i),\quad \sum x_i^2 f(x_i),\ldots,$$

donne l'expression approchée de la fonction $f(x)$ sous forme d'un polynôme du degré plus ou moins élevé se distinguant de tous les autres polynômes du même degré par la moindre valeur de la somme qu'on obtient en additionnant les carrés des écarts des valeurs de ce polynôme des valeurs de $f(x_i)$ servant à développer $f(x)$ en série (3). En passant à la limite, quand toutes ces valeurs $f(x_i)$ se confondent avec $f(X)$, ce polynôme se réduit à l'expression approchée de la fonction $f(x)$ qu'on obtient en développant cette fonction en série suivant les puissances ascendantes de la différence $x - X$. Cette expression représente $f(x)$ avec la plus grande approximation pour x infiniment voisin de X.

On obtient une formule plus générale pour le calcul approché de la fonction $f(x)$ au moyen des sommes

$$\sum x_i^0 f(x_i),\quad \sum x_i f(x_i),\quad \sum x_i^2 f(x_i),\ldots,$$

par la méthode que nous avons indiquée dans le Mémoire «*Sur les fractions continues*» *). Cette formule se présente sous forme d'une fraction

$$\frac{F(x)}{F_0(x)},$$

dont le dénominateur $F_0(x)$ est une fonction arbitraire positive pour toutes les valeurs $x = x_i$; le numérateur $F(x)$ est un polynôme du degré plus ou moins élevé. La fraction ainsi obtenue pour l'expression approchée de la fonction $f(x)$ se distingue de toutes les autres fractions ayant le même dénominateur $F_0(x)$ et le numérateur $F(x)$ du même degré par la moindre valeur de la somme

$$\sum \left(f(x_i) - \frac{F(x_i)}{F_0(x_i)}\right)^2 F_0(x_i).$$

Il en résulte que les sommes

$$\sum x_i^0 f(x_i),\quad \sum x_i f(x_i),\quad \sum x_i^2 f(x_i),\ldots,$$

de même que les dérivées

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ldots,$$

peuvent servir à déterminer la valeur approchée de la fonction $f(x)$ pour les valeurs de la variable x contenues entre des limites plus ou moins éloignées.

---

*) T. I, pag. 203—230.

D'après ce que nous avons indiqué*) sur les intégrales

$$\int f(x)\,dx,\quad \int x f(x)\,dx,\quad \int x^2 f(x)\,dx, \ldots,$$

aux quelles se réduisent en limite les sommes

$$\sum x_i^0 f(x_i),\quad \sum x_i f(x_i),\quad \sum x_i^2 f(x_i), \ldots,$$

on voit que ces sommes, de même que les dérivées

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \ldots,$$

peuvent servir à la résolution des questions concernant la fonction $f(x)$, essentiellement différentes du calcul par approximation des valeurs de la fonction pour les différentes valeurs de la variable x. Les résultats obtenus ont lieu aussi pour la fonction discontinue $f(x)$; il est cependant nécessaire que cette fonction ne devienne pas négative pour les valeurs considérées de la variable x. Cette condition se trouve réalisée dans plusieurs questions des Mathématiques pures et appliqués présentant, à cause de la discontinuité, des difficultés insurmontables pour l'application du calcul différentiel.

Pour cette raison les sommes

$$\sum x_i^0 f(x_i),\quad \sum x_i f(x_i),\quad \sum x_i^2 f(x_i), \ldots,$$

formées des produits des quantités positives

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2), \ldots f(x_{n-1})$$

et des différentes puissances des quantités réelles

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},$$

sont bien dignes d'attention. Nous allons montrer maintenant, comment, en connaissant les valeurs de ces sommes, on peut déterminer la limite inférieure de la plus grande des quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1},$$

et la limite supérieure de la plus petite de ces quantités.

En supposant données les limites entre lesquelles sont contenues les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1}$$

---

*) *Sur les valeurs limites des intégrales.* T. II, pag. 183—185. *Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par les résidus intégraux.* T. II, pag. 421—440. *Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales.* T. II, pag. 443—478. *Sur les sommes composées des coéfficients des séries à termes positifs.* A la fin du T. II.

dans les sommes

$$\sum_0^n x_i^0 f(x_i),\quad \sum_0^n x_i f(x_i),\ldots\sum_0^n x_i^{l-1} f(x_i)$$

nous ferons voir, comment par les valeurs de ces sommes on peut déterminer les maxima des sommes qu'on obtient par addition des termes de la série

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ldots f(x_{n-1}),$$

correspondant aux termes consécutifs de la série

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},$$

n'atteignant pas plus ou moins l'une de ses limites. D'après les formules pour ces maxima on obtient facilement les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^u f(x)\, dx$$

dans le cas, où l'on connait les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(x)\, dx,\quad \int_a^b x f(x)\, dx,\ldots\ \int_a^b x^{l-1} f(x)\, dx,$$

la fonction $f(x)$ ne devenant pas négative entre $x=a$ et $x=b$ et la quantité u étant supérieure à a et inférieure à b.

§ 2. En posant

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2,\ldots,\ f(x_{n-1})=y_{n-1},$$

$$\sum_0^n x_i^0 f(x_i)=C_0,\ \sum_0^n x_i f(x_i)=C_1,\ \sum_0^n x_i^2 f(x_i)=C_2,\ldots\sum_0^n x_i^{l-1} f(x_i)=C_{l-1},$$

on trouve que les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},$$

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots y_{n-1}$$

sont liées par l relations

$$(4)\quad \sum_0^n x_i^0 y_i=C_0,\ \sum_0^n x_i y_i=C_1,\ \sum_0^n x_i^2 y_i=C_2,\ldots\sum_0^n x_i^{l-1} y_i=C_{l-1},$$

où, d'après le § précedent, les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots.x_{n-1}$$

ne sont pas imaginaires et les quantités

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ldots.y_{n-1}=f(x_{n-1})$$

ne sont pas négatives.

En développant la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x-x_i}$$

suivant les puissances descendantes de x, on obtient l'égalité

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x-x_i}=\frac{1}{x}\sum_0^n x_i^0 y_i+\frac{1}{x^2}\sum_0^n x_i y_i\ldots+\frac{1}{x^l}\sum_0^n x_i^{l-1}\ y_i+\frac{1}{x^{l+1}}\sum_0^n x_i^l y_i\ldots,$$

qui prend, au moyen des équations (4), la forme suivante

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x-x_i}=\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\ldots.+\frac{C_{l-1}}{x^l}+\frac{1}{x^{l+1}}\sum_0^n x_i^l\ y_i+\ldots.$$

Il en résulte clairement que pour satisfaire aux équations (4) par des valeurs de

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots.x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots.y_{n-1}$$

il est nécessaire et suffisant que la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x-x_i},$$

soit égale à l'expression

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots.+\frac{C_{l-1}}{x^l}$$

au terme contenant $\frac{1}{x^l}$ près.

D'autre part, à cause des propriétés indiquées des quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots.x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots.y_{n-1},$$

la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x-x_i}$$

dans l'intervalle de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ devient infinie pour n valeurs

$$x_0, \; x_1, \; x_2, \ldots . x_{n-1},$$

en passant toujours de $-\infty$ à $+\infty$.

En se servant de la notation de Cauchy*) on obtient

$$\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathcal{J}}} \; \sum_{0}^{n} \frac{y_i}{x - x_i} = n.$$

En appliquant la méthode de Cauchy pour la détermination de l'indice

$$\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathcal{J}}} \; \sum_{0}^{n} \frac{y_i}{x - x_i}$$

et remarquant que la somme

$$\sum_{0}^{n} \frac{y_i}{x - x_i}$$

se réduit à une fraction avec le dénominateur du degré n, on conclut que cet indice pour les limites $x = -\infty$ et $x = \infty$ ne peut atteindre la valeur n, égale au degré du dénominateur, que si dans la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \cdots}}},$$

provenant du développement de cette somme, tous les quotients incomplets

$$q_1, \; q_2, \; q_3, \ldots$$

sont des fonctions linéaires de x avec des coefficients positifs.

Donc la condition nécessaire et suffisante, pour qu'aucune des quantités

$$x_0, \; x_1, \; x_2, \ldots . x_{n-1}$$

ne fût imaginaire et les quantités

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \ldots . y_{n-1}$$

fûssent positives, peut être représenter par l'égalité

$$\sum_{0}^{n} \frac{y_i}{x - x_i} = \cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}}}$$

*) Journal de l'École Polytechnique. Cahier 25.

réunie avec les inégalités

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0, \ldots . \alpha_n > 0.$$

Il résulte de ce que nous avons dit plus haut sur les équations (4), que les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots . x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots . y_{n-1}$$

ne peuvent satisfaire à ces équations que dans le cas, où la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \ldots . - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}}},$$

provenant du développement de la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i},$$

représente l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots . + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

au terme de l'ordre $\frac{1}{x^l}$ près.

Par cette raison, en connaissant le développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots . + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{q^{(\prime)} - \cfrac{1}{q^{(\prime\prime)} - \cfrac{1}{q^{(\prime\prime\prime)} - \ldots}}}$$

il est facile de déterminer les premiers quotients incomplets de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \ldots . - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}}},$$

qui résulte du développement de la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i},$$

si les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots . x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots . y_{n-1},$$

y contenues, satisfont aux équations (4).

§ 3. En désignant par k le nombre entier obtenu par la division de l par 2 et arrêtant la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\dots\cfrac{}{\dots-\cfrac{1}{\alpha_n x+\beta_n}}}}$$

au quotient incomplet

$$\alpha_k x+\beta_k,$$

on obtient pour elle l'expression approchée

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\dots\cfrac{}{\dots-\cfrac{1}{\alpha_k x+\beta_k}}}},$$

exacte au terme de l'ordre $\frac{1}{x^{2k}}$ près.

Avec le même degré de précision la fraction ci-dessus représente l'expression

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\dots\dots+\frac{C_{l-1}}{x^l};$$

car, d'après ce que nous avons dit, cette expression ne diffère pas de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\dots\cfrac{}{\dots-\cfrac{1}{\alpha_n x+\beta_n}}}}$$

par les termes de l'ordre plus élevé que $\frac{1}{x^{l+1}}$, l étant égale à $2k$ ou $2k+1$, suivant que l est divisible par 2 ou non.

Il en résulte que la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\dots\cfrac{}{-\cfrac{1}{\alpha_k x+\beta_k}}}},$$

avec k quotients incomplets doit donner l'expression

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\dots\dots+\frac{C_{l-1}}{x^l}=\cfrac{1}{q^{(\prime)}-\cfrac{1}{q^{(\prime\prime)}-\cfrac{1}{q^{(\prime\prime\prime)}-\dots}}}$$

exacte jusqu'aux termes de l'ordre $\frac{1}{x^{2k}}$ inclusivement; cela suppose les relations suivantes

$$(5)\qquad\begin{cases} q^{(\prime)}=\alpha_1\ x+\beta_1, \\ q^{(\prime\prime)}=\alpha_2\ x+\beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ q^{(k)}=\alpha_k\ x+\beta_k. \end{cases}$$

Si toutes ces équations ont lieu, la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \dots - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}}$$

donne l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \dots + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

exacte jusqu'aux termes de l'ordre $\frac{1}{x^{2k}}$ inclusivement, quels que soient les quotiens incomplets qui suivent

$$q^{(k)},\ \alpha_k x + \beta_k$$

dans les fractions continues provenant du développement de cette expression et de la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i}.$$

Pour l pair, d'après ce que nous avons dit sur le nombre k, on a

$$\frac{1}{x^{2k}} = \frac{1}{x^l}.$$

Il en résulte que pour un tel l la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \dots - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}},$$

provenant du développement de la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i},$$

donne l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \dots + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

exacte jusqu'au terme de l'ordre $\frac{1}{x^l}$ inclusivement et par cette raison, d'après le § 2, les équations (4) doivent êtres satisfaites par les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \dots x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2, \dots y_{n-1},$$

contenues dans la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i}.$$

§ 4. En passant au cas de l impair, quand $l = 2k + 1$, on remarque que, à cause des relations (5), la différence des fractions continues

$$\frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots - \frac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}}, \quad \frac{1}{q^{(\prime)} - \frac{1}{q^{(\prime\prime)} - \frac{1}{q^{(\prime\prime\prime)} - \cdots}}},$$

provenant du développement des fonctions

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i}, \quad \frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \cdots + \frac{C_{l-1}}{x^l},$$

sera du même degré que l'expression

$$\frac{q^{(k+1)} - \alpha_{k+1} x - \beta_{k+1}}{x^{l+1}}.$$

Il en résulte que cette différence peut être du degré moins élevé que $-l$, comme cela doit être d'après le § 2 pour satisfaire aux équations (4), seulement dans le cas, où la différence

$$q^{(k+1)} - \alpha_{k+1} x - \beta_{k+1}$$

est du degré zéro et par conséquent, quand le quotient incomplet $q^{(k+1)}$ contient x en première puissance avec le coefficient égal à α_{k+1}.

Si cela a lieu et si les relations (5) sont satisfaites, la différence des expressions

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i}, \quad \frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \cdots + \frac{C_{l-1}}{x^l},$$

pour l impair $= 2k + 1$ est du degré inférieur à $-l$ et par conséquent, d'après le § 2, les équations (4) sont satisfaites.

Ainsi par le développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \cdots + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

en fraction continue

$$\frac{1}{q^{(\prime)} - \frac{1}{q^{(\prime\prime)} - \frac{1}{q^{(\prime\prime\prime)} - \cdots}}}$$

on détermine les premiers quotients incomplets de la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots - \frac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}},$$

égale à la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i},$$

les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots . x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots . y_{n-1}$$

satisfaisant aux équations (4). Mais pour qu'aucune des quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots . x_{n-1}$$

ne fût imaginaire et que toutes les quantités

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots . y_{n-1}$$

fûssent positives, il faut et il suffit, comme nous avons vu (§ 2), que les quantités

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots ,\ \alpha_n$$

soient plus grandes que zéro.

En parlant des solutions des équations (5), nous avons supposé que la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} - \ldots \ldots - \frac{1}{\alpha_n x + \beta_n},$$

provenant du développement de la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i},$$

contient le quotient incomplet

$$\alpha_k x + \beta_k,$$

pour l pair $= 2k$, et le quotient incomplet

$$\alpha_{k+1} x + \beta_{k+1},$$

pour l impair $= 2k + 1$. Puisque le nombre des équations (4) est l, égal à $2k$ ou $2k + 1$, et le nombre des inconnues

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots . x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots . y_{n-1}$$

est $2n$, cette condition a toujours lieu, si l, le nombre des équations (4), ne surpasse pas $2n$, le nombre des inconnues y contenues.

Dans le cas contraire ces équations ne sont possibles que si les valeurs

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\dots .C_{l-1},$$

satisfont aux certaines conditions. Pour déduire ces conditions et indiquer les singularités que présentent dans ce cas les solutions des équations (4), nous remarquons que, d'après le § 2, ces équations étant satisfaites, la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1}-\frac{1}{\alpha_2 x+\beta_2}-\dots\dots-\frac{1}{\alpha_n x+\beta_n},$$

provenant du développement de la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x-x_i},$$

doit produire l'expression

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\dots .+\frac{C_{l-1}}{x^l}$$

exacte jusqu'au terme de l'ordre $\frac{1}{x^l}$ inclusivement.

Cela n'est possible pour $n<\frac{l}{2}$ que si l'expression ci-dessus est développable en fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1}-\frac{1}{\alpha_2 x+\beta_2}-\dots\dots-\frac{1}{\alpha_n x+\beta_n}-\frac{1}{q^{(n+1)}}-\dots\dots,$$

la quantité $q^{(n+1)}$ étant du degré supérieur à $l-2n$. C'est précisément la condition de possibilité des équations (4) pour $l>2n$. Puisque dans ce cas se déterminent complètement et le nombre n, et les quotients incomplets

$$\alpha_1 x+\beta_1,\ \alpha_2 x+\beta_2,\dots ,\ \alpha_n x+\beta_n$$

de la fraction continue provenant du développement de la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x-x_i},$$

les équations (4) auront une solution unique.

Dans tout autre cas ces équations, si elles sont possibles, admettent une infinité de solutions se distinguant et par le nombre des inconnus

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\dots .x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2,\dots .y_{n-1}$$

et par les limites entre lesquelles les quantités

$$x_0, x_1, \ldots . x_{n-1}.$$

sont contenues.

§ 5. En supposant les quantités

$$x_0, x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}$$

rangées dans l'ordre croissant, nous indiquerons maintenant, de quelle manière on obtient les solutions des équations (4), dans lesquelles x_0 a la plus grande valeur ou x_{n-1} la plus petite valeur.

En désignant par

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots, \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}, \ldots$$

les réduites qu'on obtient en arrêtant la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n - \ldots}}}$$

au 1-er, 2-me, 3-me ...., n-me, ... quotient incomplet, on aura

$$\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)} = \cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}}.$$

Par cette raison, les équations (4) à $2n$ inconnues

$$x_0, x_1, x_2, \ldots . x_{n-1},$$

$$y_0, y_1, y_2, \ldots . y_{n-1}$$

étant résolues, l'équation

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i} = \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}. \tag{6}$$

sera satisfaite d'après le § 2.

Il en résulte que dans cette solution les inconnues

$$x_0, x_1, x_2, \ldots . x_{n-1}$$

sont racines de l'équation

$$\psi_n(x) = 0;$$

par conséquent la moindre racine de cette équation donne la valeur de x_0 et la plus grande celle de x_{n-1}. Pour obtenir les conditions dans lesquelles

x_0 atteint la plus grande valeur ou x_{n-1} la plus petite, nous remarquons que, d'après les propriétés des réduites, les fonctions

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots \psi_m(x),\ \psi_{m+1}(x), \ldots,$$

dans le cas considéré, sont déterminées par les équations

$$\psi_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1,$$
$$\psi_2(x) = (\alpha_2 x + \beta_2)\ \psi_1(x) - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(6) $$\psi_m(x) = (\alpha_m x + \beta_m)\ \psi_{m-1}(x) - \psi_{m-2}(x),$$

(7) $$\psi_{m+1}(x) = (\alpha_{m+1} x + \beta_{m+1})\ \psi_m(x) - \psi_{m-1}(x),$$

et d'après le § 2 on a

(8) $$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \ldots \alpha_m > 0,\ \alpha_{m+1} > 0.$$

La première de ces équations fait voir que l'équation

$$\psi_1(x) = 0$$

a une solution

$$x = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

En portant cette quantité dans la seconde équation et remarquant que

$$\psi_1\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) = 0,$$

on obtient

$$\psi_2\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) = -1.$$

Mais en posant consécutivement

$$x = -\infty,\ x = +\infty,$$

et remarquant que d'après les conditions (8)

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,$$

on trouve

$$\psi_2(-\infty) = +,\ \psi_2(+\infty) = +.$$

On voit d'après ces valeurs de la fonction $\psi_2(x)$ pour

$$x = -\infty,\ x = -\frac{\beta_1}{\alpha_1},\ x = +\infty$$

que $x = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, racine de l'équation

$$\psi_1(x) = 0,$$

est contenue entre la plus grande et la plus petite racine de l'équation

$$\psi_2(x) = 0.$$

Pour étendre ce raisonnement à toutes les équations formées au moyen de deux fonctions consécutives de la série

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots . \psi_{m-1}(x),\ \psi_m(x),\ \psi_{m+1}(x), \ldots ,$$

nous allons maintenant démontrer que toutes les racines de l'équation

$$\psi_m(x) = 0$$

sont contenues entre la plus grande et la plus petite racine de l'équation

$$\psi_{m+1}(x) = 0$$

si cette propriété a lieu par rapport aux équations

$$\psi_{m-1}(x) = 0,\ \psi_m(x) = 0.$$

En effet, en désignant par h_0 la plus petite racine de l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

et par h la plus grande racine et supposant démontré que toutes les racines de l'équation

$$\psi_{m-1}(x) = 0$$

sont contenues entre la plus petite et la plus grande racine de l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

on remarque que l'équation

$$\psi_{m-1}(x) = 0$$

ne contient pas de racines ni entre $x = -\infty$, $x = h_0$, ni entre $x = +\infty$, $x = h$ et que par conséquent les valeurs

$$\psi_{m-1}(h_0),\ \psi_{m-1}(h)$$

sont de même signe que

$$\psi_{m-1}(-\infty),\ \psi_{m-1}(\infty).$$

Cela etant, de l'équation (7), en y posant successivement

$$x = h_0,\ x = h,$$

et remarquant que

$$\psi_m(h_0) = 0, \ \psi_m(h) = 0,$$

d'après la définition des quantités h_0 et h, on trouvera les valeurs de

$$\psi_{m+1}(h_0), \ \psi_{m+1}(h)$$

avec des signes contraires à ceux de

$$\psi_{m-1}(-\infty), \ \psi_{m-1}(\infty).$$

Puisque ces quantités, d'après les relations (6), (7), (8), ont les mêmes signes que les quantités

$$\psi_{m+1}(-\infty), \ \psi_{m+1}(\infty),$$

on conclut que dans l'hypothèse admise la fonction $\psi_{m+1}(x)$ change son signe entre $x = -\infty$ et $x = h_0$, ainsi que dans l'intervalle $x = h$ et $x = \infty$; par conséquent, l'équation

$$\psi_{m+1}(x) = 0$$

a une racine inférieure à h_0, la plus petite racine de l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

et une racine supérieure à h, la plus grande racine de cette dernière équation. Il en résulte que toutes les racines de l'équation

$$\psi_m(x) = 0$$

sont contenues entre la plus petite et la plus grande racine de l'équation

$$\psi_{m+1}(x) = 0,$$

si cette propriété a lieu par rapport aux équations

$$\psi_{m-1}(x) = 0, \ \psi_m(x) = 0.$$

Cela posé, en passant successivement des équations

$$\psi_1(x) = 0, \ \psi_2(x) = 0$$

aux équations

$$\psi_2(x) = 0, \ \psi_3(x) = 0,$$
$$\psi_3(x) = 0, \ \psi_4(x) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

on remarque que généralement avec l'augmentation de l'indice ν la plus petite racine de l'équation

$$\psi_\nu(x) = 0$$

diminue et la plus grande racine augmente.

§ 6. Cette propriété de l'équation

$$\psi_\nu(x) = 0$$

permet sans difficulté d'indiquer la condition dans laquelle, en résolvant les équations (4), on obtient la plus petite valeur pour x_{n-1} ou la plus grande valeur pour x_0.

Nous avons vu (§ 3) que dans la résolution des équations (4) il est nécessaire de distinguer deux cas: le cas de l pair et celui de l impair.

Dans le cas de l pair, en posant $l=2k$, nous avons montré que les solutions des équations (4) résultent de l'égalité

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x-x_i} = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}}, \tag{9}$$

où les k premiers quotients incomplets

$$\alpha_1 x + \beta_1,\ \alpha_2 x + \beta_2, \ldots\ \alpha_k x + \beta_k$$

sont les mêmes qu'on obtient en dévéloppant l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

en fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_k x + \beta_k}}},$$

le nombre des autres quotients incomplets et leurs valeurs restant arbitraires; d'après le § 2 il est cependant nécessaire que tous les quotients incomplets soient des fonctions linéaires en x, aux coefficients de x positifs.

Il en résulte que dans le cas considéré le nombre n ne peut pas être inférieur à k.

Puisque d'après le § 3 la quantité x_0 est la plus petite racine de l'équation

$$\psi_n(x) = 0$$

et x_{n-1} la plus grande racine, et puisque, comme nous l'avons démontré tout à l'heure, x_0 diminue et x_{n-1} augmente, lorsque n augmente, on obtient la solution des équations (4), où x_0 a la plus grande valeur et x_{n-1} a la plus petite valeur, en admettant que n a la plus petite valeur possible, qui est égale à k, comme nous l'avons vu. Cela posé, en désignant par M_0 la plus petite racine de l'équation

$$\psi_k(x) = 0,$$

et par M la plus grande racine, on a dans les solutions considérées des équations (4)

$$x_0 \overline{\lesssim} M_0, \quad x_{n-1} \overline{\gtrsim} M,$$

quel que soit le nombre n.

En passant au cas de l impair, on remarque, d'après le § 3, que pour $l = 2k + 1$ la fraction continue, servant à obtenir les solutions des équations (4), ne peut pas être arrêtée au quotient incomplet

$$\alpha_k x + \beta_k.$$

Pour cette raison, d'après ce que nous avons dit sur la détermination des quantités

$$x_0, \quad x_{n-1}$$

et sur la variation des racines limites de l'équation

$$\psi_n(x) = 0,$$

quand n augmente, dans le cas considéré, où $n > k$, auront lieu les inégalités

$$x_0 < M_0, \quad x_{n-1} > M.$$

Il est facile de démontrer en outre que pour $l = 2k + 1$ les quantités x_0, x_{n-1} satisfont à l'inégalité

$$(10) \qquad \frac{1}{x_{n-1} - x_0} \left[\frac{\psi_{k-1}(x_{n-1})}{\psi_k(x_{n-1})} - \frac{\psi_{k-1}(x_0)}{\psi_k(x_0)}\right] - \alpha_{k+1} \leqq 0.$$

Pour cela remarquons que d'après le § 5 pour $n \overline{\gtrsim} k + 1$ ni l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0,$$

ni l'équation

$$\psi_k(x) = 0$$

n'ont pas de racines hors des limites des racines de l'équation

$$\psi_n(x) = 0.$$

Puisque la plus petite racine de cette équation est x_0 et la plus grande x_{n-1}, les équations

$$\psi_{k+1}(x) = 0, \quad \psi_k(x) = 0$$

n'ont pas de racines ni entre $x = -\infty$, $x = x_0$, ni entre $x = x_{n-1}$, $x = \infty$; par conséquent, la fraction

$$\frac{\psi_{k+1}(x)}{\psi_k(x)}$$

pour

$$x = x_0, \quad x = x_{n-1}$$

a les mêmes signes que pour

$$x = -\infty, \quad x = \infty.$$

Mais, en posant dans les formules (7), (8) $m=k$, $x=-\infty$, $x=+\infty$, on trouve, que cette fraction est négative pour $x=-\infty$ et positive pour $x=\infty$; par conséquent, on a

$$\frac{\psi_{k+1}(x_0)}{\psi_k(x_0)} \leqq 0, \quad \frac{\psi_{k+1}(x_{n-1})}{\psi_k(x_{n-1})} \geqq 0.$$

En y portant les valeurs

$$\psi_{k+1}(x_0), \quad \psi_{k+1}(x_{n-1}),$$

déduites de l'équation (7) dans l'hypothèse $m=k$, $x=x_0$, $x=x_{n-1}$, on obtient les inégalités

$$\alpha_{k+1} x_0 + \beta_{k+1} - \frac{\psi_{k-1}(x_0)}{\psi_k(x_0)} \leqq 0,$$

$$\alpha_{k+1} x_{n-1} + \beta_{k+1} - \frac{\psi_{k-1}(x_{n-1})}{\psi_k(x_{n-1})} \geqq 0;$$

d'où, en soustrayant la seconde inégalité de la première et divisant par $x_{n-1} - x_0$, on obtient l'inégalité indiquée plus haut. Cette inégalité a lieu pour $l = 2k+1$, quel que soit le nombre n dans la solution considérée des équations (4).

§ 7. Nous avons considéré jusqu'à présent les sommes

$$\sum_0^n x_i^0 y_i, \quad \sum_0^n x_i y_i, \quad \sum_0^n x_i^2 y_i, \ldots \quad \sum_0^n x_i^{l-1} y_i,$$

en nous bornant au cas particulier, quand toutes les quantités

$$y_0, \ y_1, \ y_2, \ldots y_{n-1}$$

sont positives. En passant au cas plus général, quand parmi ces quantités se rencontrent des zéros, nous supposerons, qu'on obtient la série des quantités

$$y_0, \ y_1, \ y_2, \ldots y_{n-1},$$

contenues dans les sommes, que nous avons considérées, en chassant de la série des carrés des quantités réelles

$$u_0^2, \ u_1^2, \ u_2^2, \ldots u^2_{p-1}$$

les termes égaux à zéro. En supposant que

(11) $$u^2_{s_0} = y_0, \ u^2_{s_1} = y_1, \ u^2_{s_2} = y_2, \ldots u^2_{s_{n-1}} = y_{n-1}$$

et que

$$z_0, z_1, z_2, \ldots . z_{p-1}$$

est une série croissante de quantités réelles, où

(12) $$z_{s_0} = x_0, \; z_{s_1} = x_1, \; z_{s_2} = x_2, \ldots . z_{s_{n-1}} = x_{n-1},$$

on remarque que les sommes

$$\sum_0^p z_i^0 u_i^2, \quad \sum_0^p z_i u_i^2, \quad \sum_0^p z_i^2 u_i^2, \ldots . \quad \sum_0^p z_i^{l-1} u_i^2$$

se réduisent à

$$\sum_0^n x_i^0 y_i, \quad \sum_0^n x_i y_i, \quad \sum_0^n x_i^2 y_i, \ldots . \quad \sum_0^n x_i^{l-1} y_i,$$

et par conséquent les équations (4) donnent

(13) $$\sum_0^p z_i^0 u_i^2 = C_0, \; \sum_0^p z_i u_i^2 = C_1, \; \sum_0^p z_i^2 u_i^2 = C_2, \ldots . \; \sum_0^p z_i^{l-1} u_i^2 = C_{l-1}.$$

Il en résulte que ce que nous avons démontré dans les paragraphes antérieurs peut nous servir pour étudier les équations (13), dans lesquelles

$$u_0, u_1, u_2, \ldots . u_{p-1}$$

sont des quantités réelles quelconques, égales ou non à zéro, et

$$z_0, z_1, z_2, \ldots . z_{p-1}$$

est une série de quantités croissantes.

En désignant par k le nombre entier contenu dans $\frac{l}{2}$, par

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \; \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots . \; \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}, \ldots .$$

les réduites de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots . + \frac{C_{l-1}}{x^l},$$

développée en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots . - \cfrac{1}{\alpha_k x + \beta_k - \cdots .}}},$$

par M_0 la plus petite racine de l'équation

$$\psi_k(x) = 0,$$

et par M la plus grande racine, nous avons démontré que les équations (4) ne peuvent être satisfaites que dans le cas, où

(14) $$x_0 \overline{\overline{<}} M_0;\ x_{n-1} \overline{\overline{>}} M.$$

Puisque la somme

$$\sum_{q+1}^{p} u_i^2 = u^2_{q+1} + u^2_{q+2} + u^2_{q+3} + \ldots . + u^2_{p-1}$$

pour $q < s_{n-1}$ contient le terme

$$u^2{}_{s_{n-1}},$$

et la somme

$$\sum_{0}^{q_1} u_i^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots . + u^2_{q_1-1}$$

pour $q_1 > s_0$ contient le terme

$$u^2{}_{s_0},$$

et ces termes, d'après (11), sont égaux à y_{n-1}, y_0, quantités que nous avons supposées supérieures à zéro, les sommes

$$\sum_{q+1}^{p} u_i^2, \quad \sum_{0}^{q_1} u_i^2$$

ne peuvent se reduire à zéro que dans le cas

$$q \geqq s_{n-1},\ q_1 \leqq s_0,$$

ce qui suppose

$$z_q \geqq z_{s_{n-1}},\ z_{q_1} \leqq z_{s_0},$$

parce que les quantités

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots . z_{n-1}$$

forment une série croissante.

En remplaçant, d'après (12), les quantités

$$z_{s_{n-1}},\ z_{s_0}$$

par

$$x_{n-1},\ x_0,$$

nous réduisons ces relations à la forme suivante

$$z_q \geqq x_{n-1},\ z_{q_1} \leqq x_0,$$

et d'après (14) on aura

$$z_q \geqq M,\ z_{q_1} \leqq M_0.$$

Donc les sommes

$$\sum_{q+1}^{p} u_i^2, \quad \sum_{0}^{q_1} u_i^2$$

surpassent le zéro, si

$$z_q < M, \quad z_{q_1} > M_0,$$

et par conséquent, d'après les égalités

$$\sum_{0}^{q+1} u_i^2 = \sum_{0}^{p} u_i^2 - \sum_{q+1}^{p} u_i^2,$$

$$\sum_{q_1}^{p} u_i^2 = \sum_{0}^{p} u_i^2 - \sum_{0}^{q_1} u_i^2,$$

pour ces valeurs de z_q, z_{q_1} les sommes

$$\sum_{0}^{q+1} u_i^2, \quad \sum_{q_1}^{p} u_i^2$$

ne peuvent pas atteindre leur limite

$$\sum_{0}^{p} u_i^2.$$

Maintenant nous allons nous occuper de la détermination de la limite supérieure des sommes

$$\sum_{0}^{q+1} u_i^2, \quad \sum_{q_1}^{p} u_i^2,$$

lorsqu'elles restent inférieures à la somme

$$\sum_{0}^{p} u_i^2.$$

Ces limites diffèrent plus ou moins de cette dernière somme selon les valeurs

$$z_q, \; z_{q_1}$$

des termes de la série

$$z_0, \; z_1, \; z_2, \ldots . z_{p-1},$$

correspondants aux termes

$$u^2_q, \; u^2_{q_1}$$

de la série

$$u_0^2, \; u_1^2, \; u_2^2, \ldots . u^2_{p-1},$$

lesquels avec les valeurs

$$u_0^2,\ u^2_{p-1}$$

représentent les termes-limites des sommes considérées.

Nous désignerons les valeurs des termes z_q, z_{q_1}, par v, w, en posant

$$(15) \qquad z_q = v,\ z_{q_1} = w;$$

nous poserons en même temps

$$(15)^{bis} \qquad z_0 = a,\ z_{p-1} = b,$$

a et b étant des quantités données. Pour la possibilité des équations (4) et (12) dans les conditions posées il faut que les quantités a, b, comme limites entre lesquelles sont contenues les quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots . x_{n-1},$$

satisfassent aux inégalités

$$a \leqq M_0,\ b \geqq M;$$

mais les quantités v, w, étant, d'après (15), contenues dans la série

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots . z_{p-1},$$

ne peuvent pas sortir hors des limites $z_0 = a$ et $z_{p-1} = b$.

§ 8. Pour obtenir la limite supérieure de la somme

$$\sum_0^{q+1} u_i^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots . + u_q^2$$

dans les conditions supposées, nous chercherons, parmi tous les systèmes de quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots . u_{p-1},$$

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots . z_{p-1},$$

satisfaisant aux équations (13) et aux conditions

$$z_0 = a,\ z_q = v,\ z_{p-1} = b,$$

$$z_0 < z_1 < z_2 < \ldots . < z_{p-1},$$

celui pour lequel la somme

$$\sum_0^{q+1} u_i^2 = v_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots . + u_q^2$$

atteint la plus grande valeur. Dans cette recherche nous ne ferons aucune hypothèse particulière sur les nombres p, q; ces nombres, comme nous verrons, se déterminent complètement dans la recherche du maximum de la somme

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_q^2,$$

si seulement dans la série

$$u_0^2,\ u_1^2,\ u_2^2, \ldots u_{p-1}^2$$

tous les termes

$$u_1^2,\ u_2^2, \ldots u_{p-2}^2$$

diffèrent de zéro. Cette condition peut être toujours réalisée dans la formation de la série

$$u_0^2,\ u_1^2,\ u_2^2, \ldots u_{p-1}^2,$$

comme cela est indiqué dans le § 7. De cette manière on éloigne la possibilité d'augmenter infiniment les nombres p, q en ajoutant à cette série les termes égaux à zéro.

Pour obtenir la plus grande valeur de la somme

$$\sum_0^{q+1} u_i^2 = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_q^2$$

dans les conditions supposées, appliquons la méthode connue pour la recherche du maximum relatif et remarquons que les inconnues

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_q,\ u_{q+1}, \ldots u_{p-1}$$

$$z_1,\ z_2, \ldots z_{q-1},\ z_{q+1}, \ldots z_{p-2}$$

et les données

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots C_{l-1},$$

$$z_0 = a,\ z_q = v,\ z_{p-1} = b$$

sont liées par l équations (13). En introduisant l quantités auxiliaires

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_{l-1},$$

et posant pour abrégé

$$(16)\quad \sum_0^{q+1} u_i^2 = X,\quad \sum_0^{p} z_i^0\, u_i^2 = S_0,\quad \sum_0^{p} z_i\, u_i^2 = S_1, \ldots \sum_0^{p} z_i^{l-1}\, u_i^2 = S_{l-1},$$

on obtient pour la détermination des quantités

$$u_0,\ u_1, \ldots u_q,\ u_{q+1}, \ldots u_{p-1},$$

$$z_1,\ z_2, \ldots z_{q-1},\ z_{q+1}, \ldots z_{p-2},$$

donnant le maximum cherché, les équations suivantes

$$\lambda_0 \frac{\partial S_0}{\partial u_0} + \lambda_1 \frac{\partial S_1}{\partial u_0} + \lambda_2 \frac{\partial S_2}{\partial u_0} + \ldots + \lambda_{l-1} \frac{\partial S_{l-1}}{\partial u_0} - \frac{\partial X}{\partial u_0} = 0,$$

$$\lambda_0 \frac{\partial S_0}{\partial u_1} + \lambda_1 \frac{\partial S_1}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial S_2}{\partial u_1} + \ldots + \lambda_{l-1} \frac{\partial S_{l-1}}{\partial u_1} - \frac{\partial X}{\partial u_1} = 0,$$

. . . .

$$\lambda_0 \frac{\partial S_0}{\partial u_{p-1}} + \lambda_1 \frac{\partial S_1}{\partial u_{p-1}} + \lambda_2 \frac{\partial S_2}{\partial u_{p-1}} + \ldots + \lambda_{l-1} \frac{\partial S_{l-1}}{\partial u_{p-1}} - \frac{\partial X}{\partial u_{p-1}} = 0,$$

$$\lambda_0 \frac{\partial S_0}{\partial z_1} + \lambda_1 \frac{\partial S_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial S_2}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_{l-1} \frac{\partial S_{l-1}}{\partial z_1} - \frac{\partial X}{\partial z_1} = 0,$$

. . . .

$$\lambda_0 \frac{\partial S_0}{\partial z_{q-1}} + \lambda_1 \frac{\partial S_1}{\partial z_{q-1}} + \lambda_2 \frac{\partial S_2}{\partial z_{q-1}} + \ldots + \lambda_{l-1} \frac{\partial S_{l-1}}{\partial z_{q-1}} - \frac{\partial X}{\partial z_{q-1}} = 0,$$

$$\lambda_0 \frac{\partial S_0}{\partial z_{q+1}} + \lambda_1 \frac{\partial S_1}{\partial z_{q+1}} + \lambda_2 \frac{\partial S_2}{\partial z_{q+1}} + \ldots + \lambda_{l-1} \frac{\partial S_{l-1}}{\partial z_{q+1}} - \frac{\partial X}{\partial z_{q+1}} = 0,$$

. . . .

$$\lambda_0 \frac{\partial S_0}{\partial z_{p-2}} + \lambda_1 \frac{\partial S_1}{\partial z_{p-2}} + \lambda_2 \frac{\partial S_2}{\partial z_{p-2}} + \ldots + \lambda_{l-1} \frac{\partial S_{l-1}}{\partial z_{p-2}} - \frac{\partial X}{\partial z_{p-2}} = 0;$$

mais au moyen des équations (16) on trouve

$$\frac{\partial S_\eta}{\partial z_i} = \eta z_i^{\eta-1} u_i^2, \text{ pour } \eta = 0,\ 1,\ 2, \ldots l-1,$$

$$i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, q-1,\ q+1,\ q+2, \ldots p-2,$$

$$\frac{\partial S_\eta}{\partial u_i} = 2 z_i^\eta u_i, \text{ pour } \eta = 0,\ 1,\ 2, \ldots l-1,\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots p-1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_i} = 2u_i, \text{ pour } i = 0,\ 1,\ 2, \ldots q,$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_i} = 0, \text{ pour } i = q+1,\ q+2, \ldots p-1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial z_i} = 0, \text{ pour } i = 1,\ 2, \ldots q-1,\ q+1,\ q+2, \ldots p-2;$$

donc les équations qu'on vient d'écrire prennent la forme suivante

$$2\,(\lambda_0 + \lambda_1 z_i + \lambda_2 z_i^2 + \ldots + \lambda_{l-1} z_i^{l-1} - 1)\, u_i = 0,$$

pour

$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots q,$$

$$2\,(\lambda_0 + \lambda_1 z_i + \lambda_2 z_i^2 + \ldots + \lambda_{l-1} z_i^{l-1})\, u_i = 0,$$

pour

$$i = q+1,\ q+2, \ldots p-1,$$

et enfin

$$(1 . \lambda_1 + 2\lambda_2 z_i + \ldots + (l-1)\, \lambda_{l-1} z_i^{l-2})\, u_i^2 = 0,$$

pour

$$i = 1,\ 2, \ldots q-1,\ q+1,\ q+2 \ldots p-2,$$

ce qu'on peut abréger de la manière suivante

$$2\,(\theta\,(z_i)-1)\,u_i=0,\ \text{pour}\ i=0,\ 1,\ 2,\ldots.q,$$
$$2\,\theta\,(z_i)\,u_i=0,\ \text{pour}\ i=q+1,\ q+2,\ldots.p-1,$$
$$\theta'\,(z_i)\,u_i^2=0,\ \text{pour}\ i=1,\ 2,\ldots.q-1,\ q+1,\ldots.p-2,$$

en désignant par $\theta(z_i)$ la fonction entière

$$(17)\qquad \theta\,(z)=\lambda_{l-1}\,z^{l-1}+\lambda_{l-2}\,z^{l-2}+\ldots.+\lambda_2\,z^2+\lambda_1\,z+\lambda_0.$$

Supposant, comme nous l'avons fait ci-dessus, qu'aucune des quantités

$$u_1,\ u_2,\ldots.u_{p-2}$$

n'est égale à zéro, et supprimant $2u_i$ et u_i^2, on déduit de ces équations

$$\theta\,(z_i)-1=0,\ \text{pour}\ i=1,\ 2,\ldots.q,$$
$$\theta\,(z_i)=0,\ \text{pour}\ i=q+1,\ q+2,\ldots.p-2,$$
$$\theta'(z_i)=0,\ \text{pour}\ i=1,\ 2,\ldots.q-1,\ q+1,\ldots.p-2.$$

Mais dans le cas $i=0$ ou $i=p-1$, quand u_i peut être nulle, ces équations donnent

$$[\theta\,(z_0)-1]\,u_0=0,\ \theta\,(z_{p-1})\,u_{p-1}=0.$$

Il en résulte que

$$\theta\,(z_0)-1=0,$$

si u_0 est différente de zéro, et

$$\theta\,(z_{p-1})=0,$$

si u_{p-1} est différente de zéro.

§ 9. Au moyen des égalités obtenues on peut indiquer, comment la limite inférieure du nombre des racines de l'équation

$$\theta'(z)=0$$

dépend du nombre p, ce qui donne le moyen d'obtenir la limite supérieure de ce nombre.

Remarquons pour cela que, d'après le § 8, les équations

$$\theta\,(z)-1=0,\ \theta\,(z)=0,$$

outre les racines égales à

$$z_1,\ z_2,\ldots.z_q,$$
$$z_{q+1},\ z_{q+2},\ldots.z_{p-2},$$

peuvent avoir des racines égales à

$$z_0,\ z_{p-1}.$$

Pour embrasser tous les cas possibles, nous désignerons par σ le nombre 1 ou 0, suivant que l'équation

$$\theta(z) - 1 = 0$$

a une racine égale à z_0 ou non, et par σ_1 le nombre 1 ou 0, suivant que l'équation

$$\theta(z) = 0$$

est satisfaite par $z = z_{p-1}$ ou non. Au moyen des quantités σ, σ_1 le nombre des différentes racines de l'équation

$$\theta(z) - 1 = 0,$$

contenues dans la série

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots . z_q,$$

s'exprime par la somme

$$q + \sigma,$$

et le nombre des différentes racines de l'équation

$$\theta(z) = 0,$$

contenues dans la série

$$z_{q+1},\ z_{q+2}, \ldots . z_{p-2},\ z_{p-1},$$

s'exprime par la somme

$$(p - 2 - q) + \sigma_1.$$

En remarquant que la dérivée $\theta'(z)$ doit se réduire à zéro entre deux racines consécutives de l'une et de l'autre équation, on conclut que dans les intervalles entre deux termes des séries

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots . z_q,$$

$$z_{q+1},\ z_{q+2}, \ldots . z_{p-2},\ z_{p-1}$$

on aura au moins

$$q + \sigma - 1 + p - 2 - q + \sigma_1 - 1 = p + \sigma + \sigma_1 - 4$$

différentes racines de l'équation

$$\theta'(z) = 0.$$

Puisque, d'après le § 8, à cette équation satisfont encore $p - 3$ quantités

$$z_1,\ z_2, \ldots . z_{q-1},\ z_{q+1}, \ldots . z_{p-2},$$

elle doit avoir au moins

$$p+\sigma+\sigma_1-4+p-3=2p+\sigma+\sigma_1-7$$

racines différentes, et par conséquent son degré ne peut pas être inférieur à ce nombre, ce qui d'après (17) suppose

$$l-2 \geqq 2p+\sigma+\sigma_1-7;$$

il en résulte

(18) $$2p \leqq l-\sigma-\sigma_1+5,$$

p étant, d'après notre notation, le nombre des quantités

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots . z_{p-1},$$

pour lesquelles on obtient le maximum cherché de la somme

$$\sum_0^{q+1} u_i^2,$$

les nombres σ, σ_1 signifiant 1 ou 0, suivant que $z=z_0$ satisfait à l'équation

$$\theta(z)-1=0,$$

et $z=z_{p-1}$ à l'équation

$$\theta(z)=0,$$

ou non. Puisque d'après le § 8 l'égalité

$$\theta(z_0)-1=0$$

peut ne pas avoir lieu que dans le cas $u_0=0$, et l'égalité

$$\theta(z_{p-1})=0$$

dans le cas $u_{p-1}=0$, on conclut que l'égalité

$$\sigma=0$$

suppose

$$u_0=0,$$

et l'égalité

$$\sigma_1=0$$

suppose

$$u_{p-1}=0.$$

D'après la formule (18), en désignant par le symbole E la partie entière de la fraction, on trouve

$$p \leqq E\,\frac{l-\sigma-\sigma_1+5}{2}.$$

Cette formule détermine la limite supérieure de p, du nombre d'inconnues

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots.u_{p-1}.$$

Puisque le cas de p plus grand comprend tous les cas où p a une valeur plus petite, nous supposerons que p ait la plus grande valeur possible, donnée par la formule

(19) $$p = E\,\frac{l-\sigma-\sigma_1+5}{2}.$$

§ 10. En s'arrêtant au cas de l pair et posant $l = 2k$, on trouve d'après la formule (19)

(20) $$p = E\,\frac{2k-\sigma-\sigma_1+5}{2},$$

les nombres σ, σ_1 ayant, comme nous avons vu, les valeurs 0, 1.

En supposant $\sigma = 0$, $\sigma_1 = 0$, on obtient d'après cette formule

$$p = E\,\frac{2k+5}{2} = k + 2;$$

mais, d'après ce que nous avons dit dans le § 9 sur les égalités

$$\sigma = 0,\ \sigma_1 = 0,$$

on conclut que dans le cas considéré les quantités u_0, u_{p-1} s'annullent; par conséquent le nombre de termes de la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots.u_{p-2},\ u_{p-1},$$

différents de zéro, est

$$p - 2 = k.$$

Pour cette raison les équations (13), en y supprimant les termes avec les facteurs u_0, u_{p-1} égals à zéro et en y remplaçant

$$u_1^2,\ u_2^2,\ldots.u_k^2,$$
$$z_1,\ z_2,\ldots.z_k$$

par

$$y_0,\ y_1,\ldots.y_{k-1},$$
$$x_0,\ x_1,\ldots.x_{k-1},$$

se réduisent aux équations (4) dont le nombre est $n = k$. Pour cette valeur de n ces équations n'ont d'après le § 5 qu'une solution, dans laquelle

$$x_0,\ x_1,\ldots,x_{n-1}$$

satisfont à l'équation

$$\psi_k(x) = 0.$$

En remarquant, d'après la formule (15), que

$$z_q = v$$

est une des quantités

$$x_0,\ x_1, \ldots . x_{k-1},$$

on conclut que l'hypothèse considérée

$$\sigma = 0,\ \sigma_1 = 0$$

ne peut avoir lieu que dans le cas, lorsque la quantité donnée v est égale à une des racines de l'équation

$$\psi_k(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous devons chercher la solution de notre problème en faisant d'autres hypothèses sur les nombres σ, σ_1.

Supposant

$$\sigma = 1,\ \sigma_1 = 1,$$

on trouve d'après la formule (20)

$$p = E\,\frac{2k+3}{2} = k+1.$$

Il en résulte que dans cette hypothèse les équations (13) contiendront $2(k+1)$ inconnues

$$z_0,\ z_1, \ldots . z_k,$$
$$u_0^2,\ u_1^2 \ldots . u_k^2;$$

par conséquent ces équations, lorsqu'on y remplaçe

$$z_0,\ z_1, \ldots . z_k,$$
$$u_0^2,\ u_1^2, \ldots . u_k^2$$

par

$$x_0,\ x_1, \ldots . x_k,$$
$$y_0,\ y_1, \ldots . y_k,$$

se ramènent aux équations (4) dont le nombre est $n = k+1$.

En résolvant ces équations, d'après le § 5 on trouve que les quantités

$$z_0 = x_0,\ z_1 = x_1, \ldots . z_q, = x_q, \ldots . z_k = x_k$$

doivent satisfaire à l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0,$$

et, puisque d'après le formules (15) et (15)^{bis} on a

$$z_0 = a, \; z_q = v, \; z_{p-1} = z_k = b,$$

cela suppose les égalités

$$\psi_{k+1}(a) = 0, \; \psi_{k+1}(v) = 0, \; \psi_{k+1}(b) = 0.$$

Pour indiquer à quoi se réduisent ces égalités, nous y portons l'expression de la fonction $\psi_{k+1}(x)$ par les fonctions $\psi_k(x)$ et $\psi_{k-1}(x)$ qu'on obtient de la formule (7) pour $m = k$. De cette manière on trouve trois équations

(21) $$(\alpha_{k+1}\, a + \beta_{k+1})\, \psi_k(a) - \psi_{k-1}(a) = 0,$$

(22) $$(\alpha_{k+1}\, v + \beta_{k+1})\, \psi_k(v) - \psi_{k-1}(v) = 0,$$

(23) $$(\alpha_{k+1}\, b + \beta_{k+1})\, \psi_k(b) - \psi_{k-1}(b) = 0.$$

Il suit de l'équation (22) que

(24) $$\beta_{k+1} = \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)} - \alpha_{k+1}\, v.$$

En portant cette valeur de β_{k+1} dans les équations (21) et (23) et les resolvant par rapport à α_{k+1}, on obtient deux formules pour la détermination de ce coefficient

(25) $$\alpha_{k+1} = \frac{1}{a - v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right],$$

(26) $$\alpha_{k+1} = \frac{1}{b - v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right].$$

Il en résulte que l'hypothèse considérée

$$\sigma = 1, \; \sigma_1 = 1$$

ne peut pas avoir lieu, si les deux valeurs de α_{k+1} obtenues par ces formules sont différentes entre elles.

§ 11. Passant à l'hypothèse

$$\sigma = 0, \; \sigma_1 = 1,$$

on obtient d'après la formule (20)

$$p = k + 2;$$

mais il résulte de l'égalité

$$\sigma = 0$$

que (§ 9)

$$u_0 = 0.$$

Donc pour

$$\sigma = 0 \;\; \sigma_1 = 1$$

le nombre de quantités

$$u_0, u_1, \ldots u_{p-1}$$

différentes de zéro est $k+1$; par conséquent, les équations (13), en y supprimant le terme avec le facteur u_0^2 égal à zéro, ne contiendront que $2(k+1)$ inconnues

$$z_1, z_2, \ldots z_{k+1},$$
$$u_1^2, u_2^2, \ldots u_{k+1}^2.$$

En posant

$$z_1 = x_0, \; z_2 = x_1, \ldots z_q = x_{q-1}, \ldots z_{k+1} = x_k,$$
$$u_1^2 = y_0, \; u_2^2 = y_1, \ldots u_q^2 = y_{q-1}, \ldots u_{k+1}^2 = y_k,$$

on ramène ces équations au système (4), dans lequel $n = k+1$, et par conséquent d'après le § 5 les quantités

$$x_0, x_1, \ldots x_k$$

sont racines de l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0.$$

Puisque d'après les formules (15) et (15)^{bis} on a

$$z_q = v, \; z_{n-1} = z_{k+1} = b,$$

à cette équation doivent satisfaire les quantités

$$x = v, \; x = b,$$

ce qui suppose les égalités

$$\psi_{k+1}(v) = 0, \; \psi_{k+1}(b) = 0.$$

En y portant l'expression de la fonction $\psi_{k+1}(x)$ par $\psi_k(x)$, $\psi_{k-1}(x)$ donnée par la formule (7) pour $m = k$, on obtient les équations identiques aux (22), (23) donnant, comme nous avons vu, pour la détermination des constantes inconnues

$$\alpha_{k+1}, \; \beta_{k+1},$$

contenues dans la fonction $\psi_{k+1}(x)$, les formules suivantes

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right], \quad \beta_{k+1} = \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)} - \alpha_{k+1}\, v.$$

D'après ce que nous avons dit dans le § 5 et le § 7, la quantité α_{k+1} doit surpasser zéro et aucune des quantités

$$z_1, z_2, \ldots z_{k+1}$$

ne peut être inférieure à a.

La première condition suppose que la formule obtenue donne

$$\alpha_{k+1} > 0;$$

de la deuxième condition il résulte que l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0,$$

ayant les racines

$$z_1,\ z_2, \ldots z_{k+1},$$

n'a pas de racines entre $x = -\infty$ et $x = a$.

Il n'est pas difficile de démontrer que, quand la première condition est remplie, la seconde ne peut avoir lieu que dans le cas

$$\frac{\psi_{k+1}(a)}{\psi_k(a)} < 0.$$

Pour démontrer cela, remarquons que d'après la formule (7) dans le cas

$$\alpha_{k+1} > 0,$$

la fraction

$$\frac{\psi_{k+1}(x)}{\psi_k(x)}$$

a une valeur négative pour $x = -\infty$; mais son signe ne peut pas changer entre $x = -\infty$, $x = a$, si l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0$$

n'a pas de racine inférieure à a, car en même temps d'après le § 5 l'équation

$$\psi_k(x) = 0$$

n'a pas non plus de racine inférieure à a.

Donc l'hypothèse considérée sur les nombres σ, σ_1 ne peut avoir lieu que si la condition

$$\frac{\psi_{k+1}(a)}{\psi_k(a)} < 0$$

est remplie.

En y portant, d'après la formule (7), l'expression de la fonction $\psi_{k+1}(x)$ par $\psi_k(x)$, $\psi_{k-1}(x)$ et, d'après la formule (24), la valeur de la constante β_{k+1}, on ramène cette inégalité à la suivante

$$\alpha_{k+1}(a - v) < \frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}.$$

Puisque v est contenue entre a et $b > a$, la différence $a - v$ est négative; par conséquent, après avoir divisé la dernière inégalité par $a - v$, on obtient

$$\alpha_{k+1} > \frac{1}{a - v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right].$$

En remarquant que le second membre de cette formule a la même valeur que dans l'équation (25), on conclut que l'hypothèse

$$\sigma = 0, \ \sigma_1 = 1$$

peut convenir aux demandes de notre problème seulement dans le cas, quand la formule (26) donne pour α_{k+1} une valeur, qui ne serait pas inférieure à celle qu'on obtient par la formule (25).

En considérant de la même manière la solution de notre problème dans l'hypothèse

$$\sigma = 1, \ \sigma_1 = 0,$$

quand d'après le § 9

$$u_{p-1} = 0,$$

on ramène les équations (13) aux équations (4), en posant

$$z_0 = x_0, \ z_1 = x_1, \ldots . \ z_q = x_q, \ldots . \ z_{k+1} = x_{k+1},$$
$$u_0^2 = y_0, \ u_1^2 = y_1, \ldots . u_q^2 = y_q, \ldots . u^2_{k+1} = y_{k+1}.$$

En répétant ce que nous avons fait en considérant le cas

$$\sigma = 0, \ \sigma_1 = 1,$$

nous déduisons que la constante α_{k+1} doit se déterminer par l'équation (25) et qu'elle ne doit pas être inférieure à celle, qu'on obtient par la formule (26).

Il en résulte que l'une des deux hypothèses

$$\sigma = 0, \ \sigma_1 = 1,$$
$$\sigma = 1, \ \sigma = 0$$

peut satisfaire aux demandes de notre problème, suivant que l'équation (25) ou (26) donne la plus grande valeur de α_{k+1}. Dans le cas particulier, quand ces équations donnent la même valeur de α_{k+1}, les formules, qui déterminent la fonction

$$\psi_{k+1}(x),$$

se ramènent à celles que nous avons obtenues en posant

$$\sigma = 1, \ \sigma_1 = 1.$$

Quant à l'hypothèse

$$\sigma = 0, \ \sigma_1 = 0,$$

elle n'est possible que si

$$\psi_k(v) = 0;$$

sous cette condition les deux équations (25) et (26) donnent

$$\alpha_{k+1} = \infty;$$

par conséquent, la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_{k+1} x + \beta_{k+1}}}}$$

se réduit à la fraction

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_k x + \beta_k}}},$$

servant, d'après ce que nous avons dit, à la solution de notre problème dans l'hypothèse

$$\sigma = 0, \ \ \sigma_1 = 0.$$

§ 12. D'après ce que nous avons démontré sur la détérmination des valeurs de

$$z_0, \ z_1, \ldots . z_{p-1},$$

qui donnent le maximum cherché de la somme

$$u_0^2 + u_1^2 + \ldots . + u_q^2$$

pour l paire $= 2k$, on voit que, malgré la possibilité de différentes hypothèses sur les nombres σ, σ_1, ils ne peuvent pas exister deux systèmes différents de valeurs

$$z_0, \ z_1, \ldots . z_{p-1},$$

satisfaisant aux demandes de notre problème.

En remarquant, d'après la forme de la somme

$$u_0^2 + u_1^2 + \ldots . + u_q^2,$$

que sous les conditions posées elle doit avoir un *maximum*, on conclut que ce maximum aura lieu pour les valeurs

$$z_0, \ z_1, \ldots . z_{p-1}$$

données par les formules obtenues.

Par ces formules, comme nous avons vu, on obtient les valeurs

$$z_0, \ z_1, \ldots . z_{p-1}$$

au moyen de la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\frac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\cdots-\frac{1}{\alpha_k x+\beta_k-\frac{1}{\alpha_{k+1} x+\beta_{k+1}}}}},$$

où

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ldots.\alpha_k,\ \beta_k$$

se déterminent par le developpement de l'expression

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots.+\frac{C_{l-1}}{x^l}$$

en fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\frac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\cdots-\frac{1}{\alpha_k x+\beta_k-\cdots}}},$$

où le coéfficient α_{k+1} est égal à la plus grande des quantités

$$\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)}-\frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right],\ \frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)}-\frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right],$$

et le nombre β_{k+1} se détermine par l'égalité

$$\beta_{k+1}=\frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}-\alpha_{k+1}\,v.$$

En désignant par

$$\frac{\varphi_{k+1}(x)}{\psi_{k+1}(x)}$$

la fraction ordinaire égale à la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\frac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\cdots-\frac{1}{\alpha_k x+\beta_k-\frac{1}{\alpha_{k+1} x+\beta_{k+1}}}}},$$

et par

$$x_0,\ x_1,\ldots.x_k$$

les racines de l'équation

$$\psi_{k+1}(x)=0,$$

disposées en ordre croissant, on aura, d'après le § 11, ou

$$z_0=a,\ z_1=x_0,\ldots.z_q=x_{q-1},\ldots.z_k=x_{k-1},\ z_{k+1}=x_k,$$

avec l'égalité

$$u_0=0,$$

ou

$$z_0=x_0,\ z_1=x_1,\ldots.z_q=x_q,\ldots.z_k=x_k,\ z_{k+1}=b,$$

avec l'égalité

$$u_{k+1} = 0.$$

D'après ce que nous avons dit sur les quantités

$$u_0^2,\ u_1^2, \ldots . u^2_{p-1},\quad y_0,\ y_1, \ldots . y_{n-1},$$

on voit que dans le premier cas on aura

$$u_0^2 = 0,\ u_1^2 = y_0, \ldots . u_q^2 = y_{q-1}, \ldots . u_k^2 = y_{k-1},\ u^2_{k+1} = y_k,$$

et dans le second

$$u_0^2 = y_0,\ u_1^2 = y_1, \ldots . u_q^2 = y_q, \ldots . u_k^2 = y_k,\ u^2_{k+1} = 0.$$

En remarquant que d'après notre notation

$$X = u_0^2 + u_1^2 + \ldots . + u_q^2$$

et que d'après la formule (15)

$$x_q = v,$$

on obtient que dans le premier cas auront lieu les relations

$$X = y_0 + y_1 + \ldots . + y_{q-1},\ x_{q-1} = v,$$

et dans le second cas les relations

$$X = y_0 + y_1 + \ldots . + y_q,\ x_q = v.$$

En posant dans le premier cas $q - 1 = \mu$, et dans le second $q = \mu$, on aura dans les deux cas

(27) $$X = y_0 + y_1 + \ldots . + y_\mu,\ x_\mu = v.$$

Pour déterminer les quantités

$$y_0,\ y_1, \ldots . y_\mu,$$

contenues dans cette formule, on remarque que, d'après le § 5 pour $n = k + 1$, on aura

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i} = \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\psi_{k+1}(x)},$$

d'où il résulte que

$$y_i = \frac{\varphi_{k+1}(x_i)}{\psi'_{k+1}(x_i)}.$$

En déterminant par cette formule les quantités

$$y_0,\ y_1, \ldots . y_\mu$$

et les portant dans l'égalité

$$X = y_0 + y_1 + \dots + y_\mu,$$

on trouve que cette somme se compose des valeurs de la fraction

$$\frac{\varphi_{k+1}(x)}{\psi'_{k+1}(x)}$$

pour

$$x = x_0,\ x_1, \dots x_\mu,$$

racines successives de l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0,$$

la plus grande de ces racines x_μ, d'après la formule (27), étant égale à v, et la plus petite x_0 (d'après le § 8) étant $\geqq a$; cette somme au moyen du symbole $\mathcal{E}$, introduit par Cauchy, se représente par la formule

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\psi_{k+1}(x)},$$

où ω est une quantité positive infiniment petite*). Ainsi, pour déterminer la valeur du maximum cherché pour $l = 2k$, on obtient l'égalité

$$X = \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\psi_{k+1}(x)}.$$

§ 13. Passons au cas de l impaire et posons $l = 2k+1$; par la formule (19) on trouve

$$p = E\,\frac{2k+6-\sigma-\sigma_1}{2},$$

où, comme nous avons vu,

$$\sigma = 0 \text{ ou } 1,\quad \sigma_1 = 0 \text{ ou } 1.$$

En s'arrêtant à l'hypothèse

$$\sigma = 0,\quad \sigma_1 = 0,$$

on obtient d'après cette formule

$$p = k + 3;$$

d'après ce que nous avons dit dans le § 9 sur le cas

$$\sigma = 0,\quad \sigma_1 = 0,$$

---

*) Pour simplifier nos formules nous n'indiquons pas près du signe $\mathcal{E}$ les limites de la partie imaginaire de x, comme le faisait Cauchy; dans les questions que nous traitons les parties imaginaires de x sont nulles.

on a

$$u_0 = 0,\ u_{p-1} = u_{k+2} = 0.$$

Pour ces valeurs de

$$p,\ u_0,\ u_{p-1},$$

après la réduction des termes multipliés par $u_0 = 0$, $u_{p-1} = u_{k+2} = 0$ et après le remplacement des inconnues

$$z_1,\ z_2, \ldots z_q, \ldots z_{k+1},\ u_1^2, u_2^2, \ldots u_q^2, \ldots u_{k+1}^2$$

par les inconnues

$$x_0,\ x_1, \ldots x_{q-1}, \ldots x_k,\ y_0,\ y_1, \ldots y_{q-1}, \ldots y_k,$$

on ramène les équations (13) aux équations (4), dans lesquelles $n = k+1$. Dans la solution de ces équations, comme nous avons démontré dans le § 5, les quantités

$$x_0,\ x_1, \ldots x_{p-1}, \ldots x_k$$

sont les racines de l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0,$$

cette fonction $\psi_{k+1}(x)$ se détermine, comme nous avons dit dans le § 4 dans le cas $l = 2k+1$, par l'égalité

$$\frac{\varphi_{k+1}(x)}{\psi_{k+1}(x)} = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \dfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \ldots - \dfrac{1}{\alpha_k x + \beta_k - \dfrac{1}{\alpha_{k+1} x + \gamma}}}},$$

où

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2, \ldots \alpha_k,\ \beta_k,\ \alpha_{k+1}$$

sont les mêmes que dans la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \dfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \ldots - \dfrac{1}{\alpha_k x + \beta_k - \dfrac{1}{\alpha_{k+1} x + \beta_{k+1} - \ldots}}}},$$

et γ est une constante inconnue.

Pour déterminer la quantité γ et la fonction $\psi_{k+1}(x)$ qui contient γ, on remarque que la série de quantités

$$x_0 = z_1,\ x_1 = z_2, \ldots x_{q-1} = z_q, \ldots x_k = z_{k+1}$$

contiendra la quantité

$$x_{q-1} = z_q,$$

égale à v, d'après la formule (15); par conséquent, l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0$$

doit être satisfaite par $x = v$, ce qui suppose l'égalité

$$\psi_{k+1}(v) = 0.$$

Par cette raison, pour déterminer γ, on remarque que l'équation (7) pour $\beta_{m+1} = \gamma$, $m = k$ donne

$$\psi_{k+1}(x) = (\alpha_{k+1}\, x + \gamma)\, \psi_k(x) - \psi_{k-1}(x), \tag{28}$$

ce qui fournit, en vertu de l'égalité qu'on vient d'écrire,

$$(\alpha_{k+1}\, v + \gamma)\, \psi_k(v) - \psi_{k-1}(v) = 0;$$

d'où l'on obtient

$$\gamma = \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)} - \alpha_{k+1}\, v.$$

En portant cette valeur de γ dans la formule (28), on trouve

$$\psi_{k+1}(x) = \left[\alpha_{k+1}(x - v) + \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] \psi_k(x) - \psi_{k-1}(x). \tag{29}$$

Cette formule donne le premièr membre de l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0,$$

qui détermine les quantités

$$x_0 = z_1,\ x_1 = z_2, \ldots . x_{q-1} = z_q, \ldots . x_k = z_{k+1}.$$

Puisque d'après le § 7 les quantités

$$z_0,\ z_1, \ldots . z_{k+2}$$

forment une série ascendante, où, d'après la formule $(15)^{\text{bis}}$,

$$z_0 = a,\ z_{k+2} = z_{p-1} = b,$$

l'hypothèse considérée

$$\sigma = 0,\ \sigma_1 = 0$$

est impossible, si l'équation $\psi_{k+1}(x) = 0$ a une racine hors des limites $x = a$, $x = b$; mais cela aura lieu, comme il n'est pas difficile de démontrer, si la fraction

$$\frac{\psi_{k+1}(a)\ \psi_k(b)}{\psi_k(a)\ \psi_{k+1}(b)}$$

a une valeur positive.

En effet, si toutes les racines de l'équation

$$\psi_{k+1}(x) = 0$$

sont contenues entre $x=a$, $x=b$, la même propriété a lieu, d'après le § 5, par rapport à l'équation

$$\psi_k(x) = 0;$$

par conséquent, les quantités

$$\psi_{k+1}(a),\ \psi_k(a),\ \psi_{k+1}(b),\ \psi_k(b)$$

ont les mêmes signes que

$$\psi_{k+1}(-\infty),\ \psi_k(-\infty),\ \psi_{k+1}(\infty),\ \psi_k(\infty),$$

et, à cause de cela, la fraction

$$\frac{\psi_{k+1}(-x)\ \psi_{k+1}(x)}{\psi_k(-x)\cdot\psi_k(x)}$$

doit avoir pour $x = \infty$ le même signe que la quantité

$$\frac{\psi_{k+1}(a)\ \psi_k(b)}{\psi_k(a)\ \psi_{k+1}(b)}.$$

Mais d'après la formule (7) on voit que cette fraction pour $x = \infty$ se réduit à -1.

De cette manière nous nous persuadons que pour la possibilité de l'hypothèse

$$\sigma = 0,\ \sigma_1 = 0$$

dans la solution de notre problème, il est nécessaire que la fraction

$$\frac{\psi_{k+1}(a)\ \psi_k(b)}{\psi_k(a)\ \psi_{k+1}(b)}$$

soit négative.

En y portant l'expression de la fonction $\psi_{k+1}(x)$ par la formule (29), on trouve que cette fraction est égale à

$$\frac{\alpha_{k+1}(a-v) + \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)} - \frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)}}{\alpha_{k+1}(b-v) + \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)} - \frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)}}.$$

En décomposant cette expression en deux facteurs

$$\frac{a-v}{b-v},\quad \frac{\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}}{\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}},$$

et remarquant que le premier facteur pour

$$a < v < b$$

a une valeur négative, on conclut que l'hypothèse

$$\sigma = 0,\ \sigma_1 = 0$$

pour

$$l = 2k + 1$$

ne peut avoir lieu que dans le cas, où

$$\frac{\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}}{\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}} > 0.$$

§ 14. En passant à l'hypothèse

$$\sigma = 1, \ \sigma_1 = 1,$$

pour

$$l = 2k + 1,$$

on trouve, d'après la formule (19),

$$p = E\,\frac{2k+4}{2} = k + 2.$$

Il en résulte que dans le cas considéré les équations (13) contiendront $2(k+2)$ inconnues

$$z_0, \ z_1, \ldots . z_q, \ldots . z_{k+1},$$
$$u_0^2, \ u_1^2, \ldots . u_q^2, \ldots . u^2_{k+1},$$

et que ces équations se ramènent aux équations (4), le nombre n étant égal à $k+2$, si l'on pose

$$z_0 = x_0, \ z_1 = x_1, \ldots . \ z_q = x_q, \ldots . \ z_{k+1} = x_{k+1},$$
$$u_0^2 = y_0, \ u_1^2 = y_1, \ldots . u_q^2 = y_q, \ldots . u^2_{k+1} = y_{k+1}.$$

Mais dans la solution de ces équations, d'après le § 5, comme nous avons vu, les inconnues

$$x_0, \ x_1, \ldots . x_q, \ldots . x_{k+1}$$

sont les racines de l'équation

$$\psi_{k+2}(x) = 0,$$

la fonction $\psi_{k+2}(x)$ étant le dénominateur de la fraction ordinaire, à laquelle se réduit la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots \cdot - \cfrac{1}{\alpha_k x + \beta_k - \cfrac{1}{\alpha_{k+1} x + \gamma - \cfrac{1}{\gamma_1 x + \gamma_2}}}}}.$$

Dans cette fraction continue les quantités

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots . \alpha_k, \ \alpha_{k+1}, \ \beta_1, \ \beta_2, \ldots . \beta_k$$

se déterminent d'après le § 4 par le développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots+\frac{C_{l-1}}{x^l}$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\ldots\ldots-\cfrac{1}{\alpha_k x+\beta_k-\cfrac{1}{\alpha_{k+1} x+\beta_{k+1}-\ldots}}}}$$

et

$$\gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2$$

sont trois constantes inconnues qu'il faut déterminer.

Pour obtenir les équations qui déterminent ces constantes, nous remarquons que parmi les quantités

$$x_0=z_0,\ x_1=z_1,\ldots x_q=z_q,\ldots x_{k+1}=z_{k+1},$$

satisfaisant à l'équation

$$\psi_{k+2}(x)=0,$$

se trouvent les quantités

$$z_0,\ z_q,\ x_{n-1}=z_{p-1}=z_{k+1},$$

égales, d'après le § 7, à

$$a,\ v,\ b;$$

par conséquent, auront lieu les égalités

$$\psi_{k+2}(a)=0,\ \psi_{k+2}(v)=0,\ \psi_{k+2}(b)=0, \tag{30}$$

où $\psi_{k+2}(x)$ est la fonction, dont on obtient facilement l'expression par $\psi_k(x)$ et $\psi_{k-1}(x)$ au moyen de l'équation (7).

En effet, en posant dans cette équation

$$m=k,\ \beta_{k+1}=\gamma,$$

on trouve

$$\psi_{k+1}(x)=(\alpha_{k+1}\,x+\gamma)\ \psi_k(x)-\psi_{k-1}(x),$$

mais en posant

$$m=k+1,\ \alpha_{k+2}=\gamma_1,\ \beta_{k+2}=\gamma_2,$$

on obtient

$$\psi_{k+2}(x)=(\gamma_1\,x+\gamma_2)\ \psi_{k+1}(x)-\psi_k(x);$$

il en résulte après l'élimination de $\psi_{k+1}(x)$:

$$\psi_{k+2}(x)=\left[(\gamma_1\,x+\gamma_2)\ (\alpha_{k+1}\,x+\gamma)-1\right]\ \psi_k(x)-(\gamma_1\,x+\gamma_2)\ \psi_{k-1}(x).$$

En déterminant par cette formule les valeurs

$$\psi_{k+2}(a),\ \psi_{k+2}(v),\ \psi_{k+2}(b)$$

et les portant dans les égalités (30), on obtient les trois équations suivantes:

$$[(\gamma_1 a + \gamma_2)(\alpha_{k+1} a + \gamma) - 1]\,\psi_k(a) - (\gamma_1 a + \gamma_2)\,\psi_{k-1}(a) = 0,$$
$$[(\gamma_1 v + \gamma_2)(\alpha_{k+1} v + \gamma) - 1]\,\psi_k(v) - (\gamma_1 v + \gamma_2)\,\psi_{k-1}(v) = 0,$$
$$[(\gamma_1 b + \gamma_2)(\alpha_{k+1} b + \gamma) - 1]\,\psi_k(b) - (\gamma_1 b + \gamma_2)\,\psi_{k-1}(b) = 0.$$

Mais en résolvant ces équations par rapport à

$$\gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2,$$

on obtient pour la détermination de ces quantités les formules qu'on peut présenter de la manière suivante:

$$\gamma = \frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{(b-a)\rho\rho_1}{1-\rho} - \alpha_{k+1} a,\quad \gamma_1 = \frac{(1-\rho)^2}{(b-a)^2\rho\rho_1},\quad \gamma_2 = \frac{(1-\rho)(a\rho - b)}{(b-a)^2\rho\rho_1},$$

où

$$\rho = \frac{\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}}{\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)}\right] - \alpha_{k+1}.$$

En comparant la dernière formule avec l'inégalité (10) et remarquant que

$$x_0 = a,\ x_{n-1} = b,$$

on conclut que

$$\rho_1 \overline{\overline{<}}\, 0,$$

et, à cause de cela, d'après la formule qui détermine la constante γ_1, cette quantité aura le signe contraire à celui de la quantité ρ, égale, comme nous avons vu, à la fraction

$$\frac{\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}}{\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}}.$$

En remarquant que γ_1, étant le coefficient de x dans un des quotients incomplets de la fraction continue résultante du développement de la somme

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i},$$

doit, d'après le § 2, avoir une valeur positive, on conclut que pour la possibilité de l'hypothèse considérée

$$\sigma = 1,\ \sigma_1 = 1$$

cette fraction doit être inférieure à zéro, ce qui est directement contraire au resultat obtenu dans l'hypothèse

$$\sigma = 0,\ \sigma_1 = 0.$$

Quant aux hypothèses

$$\sigma = 0,\ \sigma_1 = 1,$$
$$\sigma = 1,\ \sigma_1 = 0,$$

on aura pour ces valeurs de σ, σ_1 et pour $l = 2k+1$, d'après la formule (19),

$$p = E\,\frac{2k+5}{2} = k+2.$$

Il en résulte que dans ces hypothèses les équations (13) contiendront le même nombre d'inconnues que dans l'hypothèse

$$\sigma = 1,\ \sigma_1 = 1;$$

par conséquent, leurs solutions, si elles sont seulement possibles, s'obtiendront par les formules que nous avons trouvées pour le cas

$$\sigma = 1,\ \sigma_1 = 1.$$

§ 15. On voit, de ce que nous avons démontré, que dans le cas de l impair ils n'existent pas non plus deux systèmes différents de quantités

$$z_0,\ z_1, \ldots .\ z_q, \ldots .\ z_{p-1},$$
$$u_0^2,\ u_1^2, \ldots .\ u_q^2, \ldots .\ u^2_{p-1},$$

satisfaisant aux demandes de notre problème; par conséquent, les valeurs de ces inconnues obtenues par les formules démontrées doivent donner le maximum cherché de la somme

$$X = u_0^2 + u_1^2 + \ldots . + u^2_q.$$

D'après ces formules, pour $l = 2k+1$, la résolution des équations (13) se ramène, comme nous avons vu, aux équations (4), le nombre n étant égal ou à $k+1$, ou à $k+2$. Le premier cas a lieu, si la valeur de la fraction

$$\frac{\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}}{\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right] - \alpha_{k+1}}$$

est plus grande que zéro, le second cas, si elle est inférieure à zéro. Dans le premier cas on a

$$z_0 = a,\ \ z_1 = x_0, \ldots .\ z_q = x_{q-1}, \ldots .\ z_{k+1} = x_k,\ \ z_{k+2} = b,$$
$$u_0^2 = 0,\ \ u_1^2 = y_0, \ldots .\ u_q^2 = y_{q-1}, \ldots .\ u^2_{k+1} = y_k,\ \ u^2_{k+2} = 0;$$

dans le second

$$z_0 = x_0,\ z_1 = x_1, \ldots.\ z_q = x_q, \ldots.\ z_{k+1} = x_{k+1},$$
$$u_0^2 = y_0,\ u_1^2 = y_1, \ldots. u_q^2 = y_q, \ldots. u^2_{k+1} = y_{k+1},$$

où pour

$$n = k + 1,$$

de même que pour

$$n = k + 2,$$

on détermine les quantités

$$x_0,\ x_1, \ldots. x_{q-1},\ x_q, \ldots. x_{n-1},$$
$$y_0,\ y_1, \ldots. y_{q-1},\ y_q, \ldots. y_{n-1}$$

par l'égalité

$$\sum_0^n \frac{y_i}{x - x_i} = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots . - \frac{1}{\alpha_{n-1} x + \beta_{n-1} - \frac{1}{\alpha_n x + \beta_n}}}}.$$

Dans cette égalité les quantités

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots. \alpha_k,\ \alpha_{k+1},\ \beta_1,\ \beta_2, \ldots. \beta_k$$

sont égales à celles, qui sont contenues dans la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots . - \frac{1}{\alpha_k x + \beta_k - \frac{1}{\alpha_{k+1} x + \beta_{k+1} - \cdots}}}},$$

résultante du développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots. + \frac{C_{l-1}}{x^l};$$

la détermination des autres quantités est différente, suivant que $n = k + 1$ ou $n = k + 2$. Dans le premier cas on a

$$\beta_n = \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)} - \alpha_{k+1} v;$$

dans le second cas

$$\beta_{n-1} = \frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{(b-a)\rho\rho_1}{1-\rho} - \alpha_{k+1} a,\quad \alpha_n = \frac{(1-\rho)^2}{(b-a)^2 \rho\rho_1},\quad \beta_n = \frac{(1-\rho)(a\rho - b)}{(b-a)^2 \rho\rho_1},$$

où les quantités auxiliaires ρ, ρ_1 sont déterminées par les formules indiquées dans le § 14.

En portant les quantités indiquées plus haut

$$u_0^2,\ u_1^2, \ldots. u_q^2,\ z_q$$

dans la formule

$$X = u_0^2 + u_1^2 + \ldots. + u_q^2$$

et dans l'équation (15), on aura dans le premier cas

$$X = y_0 + y_1 + \ldots + y_{q-1}, \quad x_{q-1} = v,$$

et dans le second cas

$$X = y_0 + y_1 + \ldots + y_q, \quad x_q = v.$$

En posant dans le premier cas

$$q - 1 = \mu,$$

et dans le second cas

$$q = \mu,$$

on conclut que dans les deux cas auront lieu les égalités

$$X = y_0 + y_1 + \ldots + y_\mu, \quad x_\mu = v;$$

il en résulte, comme cela était indiqué dans le § 12, la formule suivante pour la détermination de la somme X au moyen du symbole $\mathcal{E}$:

$$X = \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega} \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}.$$

§ 16. La méthode que nous avons employée pour déterminer le maximum de la somme

$$X = \sum_0^{q+1} u_i^2 = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_q^2$$

peut être aussi appliquée à la recherche de la plus grande valeur de la somme

$$\sum_{q_1}^{p} u_i^2 = u^2_{q_1} + u^2_{q_1+1} + \ldots + u^2_{p-1}.$$

En désignant la dernière somme par X_0, on a

$$X_0 = \sum_{q_1}^{p} u_i^2 = u^2_{q_1} + u^2_{q_1+1} + \ldots + u^2_{p-1}.$$

Cette somme, comme il n'est pas difficile de remarquer, se ramène à celle que nous avons considerée, en y mettant $p-i-1$ au lieu de i et posant

$$q_1 = p - q - 1.$$

Il en résulte que les formules obtenues antérieurement se ramènent à celles, qui ont lieu pour la nouvelle somme, en y effectuant tous les changements produits par le remplacement de i par $p-i-1$.

En posant

$$z_i = Z_{p-i-1}, \quad u_i = U_{p-i-1}, \quad q_1 = p - q - 1,$$

on trouve, que la somme

$$X_0=\sum_{q_1}^{p} u_i^2 = u^2_{q_1} + u^2_{q_1+1} + \ldots + u^2_{p-1}$$

se ramène à la somme

$$X_0 = U_0^2 + U_1^2 + \ldots + U_q^2,$$

ayant la même forme que la somme

$$X = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_q^2;$$

les équations (15) donnent

$$Z_q = w;$$

les équations (15)^{bis} deviennent

$$Z_{p-1} = a, \quad Z_0 = b,$$

mais les équations (13) conservent leur forme avec le seul changement de z, u en Z, U.

Il en résulte qu'en changeant a en b, b en a et v en w dans les formules obtenues pour

$$z_0, \; z_1, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0^2, \; u_1^2, \ldots u^2_{p-1},$$

donnant le maximum de la somme

$$X = u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_q^2$$

pour

$$z_q = v,$$

on obtient les formules, qui donnent les valeurs

$$Z_0, \; Z_1, \ldots \; Z_{p-1},$$
$$U_0^2, \; U_1^2, \ldots U^2_{p-1},$$

correspondant au maximum de la somme

$$X_0 = U_0^2 + U_1^2 + \ldots + U_q^2$$

pour

$$Z_q = w.$$

Puisqu'il est clair d'après la composition des formules obtenues dans les §§ 8, 9, 10, 11, 12, 13, que les équations qui déterminent les quantités

$$z_0, \; z_1, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0^2, \; u_1^2, \ldots u^2_{p-1}$$

restent invariables, quand on y change a en b, b en a, on conclut que tout

ce que nous avons dit sur la détermination de ces quantités est aussi applicable à la détermination des quantités

$$Z_0,\ Z_1, \ldots . Z_{p-1},$$
$$U_0^2,\ U_1^2, \ldots . U^2_{p-1}.$$

Pour cette raison les valeurs des inconnues donnant le maximum cherché pour $l=2k$ ou $l=2k+1$ seront déterminées au moyen de la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1 - \dfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2 - \ldots}},$$

résultante du développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots .+\frac{C_{l-1}}{x^l}.$$

Cette fraction, comme nous avons montré dans les §§ 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, détermine la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 x+\beta_1 - \dfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2 - \ldots \ldots - \dfrac{1}{\alpha_n x+\beta_n}}},$$

donnant la solution de notre problème, n étant égal à $k+1$ ou $k+2$.

En désignant par

$$\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$$

la fraction simple égale à la fraction continue, on obtient l'équation

$$\psi_n(x)=0$$

servant à déterminer

$$Z_0,\ Z_1, \ldots . Z_{p-1}$$

et la formule

$$U_i^2=\frac{\varphi(Z_i)}{\psi'(Z_i)}$$

pour la détermination de U_i^2.

Passant à la détermination de la somme

$$X_0=U_0^2+U_1^2+\ldots .+U_q^2,$$

et remarquant, d'après ce que nous avons dit plus haut, que les quantités

$$Z_0,\ Z_1, \ldots . Z_q$$

forment une série décroissante, depuis $Z_0=b$ jusqu'à $Z_q=w$, on trouve au moyen de cette formule que le maximum cherché se présente à l'aide du symbole $\mathcal{E}$ de la manière suivante:

$$X_0=\mathop{\mathcal{E}}_{w-\omega}^{b+\omega}\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}.$$

28.

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTIONS CONTINUES DES SÉRIES PROCÉDANT SUIVANT LES PUISSANCES DÉCROISSANTES DE LA VARIABLE.

(TRADUIT PAR B. C. MLODZEJEVSKY.)

(Lu le 13 mai 1892.)

О разложеніи въ непрерывную дробь рядовъ, расположенныхъ по нисходящимъ степенямъ перемѣнной.

(Приложеніе къ LXXI-му тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 3.)

Sur le développement en fractions continues des séries procédant suivant les puissances décroissantes de la variable.

§ 1. D'après ce que nous avons montré au sujet des valeurs limites des intégrales et des sommes *), sous les signes desquelles la fonction inconnue ne devient pas inférieure à zéro, on voit que ces valeurs s'obtiennent au moyen des fractions réduites que l'on obtient en développant la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

en fraction continue.

Les coefficients

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots$$

dans cette série sont des quantités données, d'après lesquelles on cherche les valeurs limites des intégrales ou des sommes.

Lorsque le nombre des données augmente, la difficulté de déterminer les réduites nécessaires de la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

en la développant en fraction continue, croît rapidement; elle devient même insurmontable si l'on veut avoir des formules générales fournissant les limites cherchées pour un nombre des données arbitrairement grand.

Jusqu'à présent ces formules ne peuvent être trouvées que dans les cas exceptionnels, où, grâce à la forme des coefficients

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots,$$

---

*) *Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux.* T. II, pag. 421—440.

Sur les sommes composées des valeurs de monômes simples multipliés par une fonction qui reste toujours positive. T. II, pag. 561—610.

la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

appartient au petit nombre des expressions dont les réduites peuvent être obtenues, à l'état actuel de l'Analyse, sans le secours des fractions continues. Dans chacun de ces ces toutes les réduites de la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

peuvent être représentées par une formule unique dépendant d'un nombre entier positif arbitraire qui est détérminé par le degré du dénominateur. En prenant successivement pour ce nombre

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

nous trouvons au moyen de cette formule une série de fractions réduites qui peut être prolongée aussi loin qu'on le veut. En supposant que ces réduites, qui s'obtiennent par la formule générale unique, correspondent au cas particulier, où dans la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

les coefficients

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots$$

ont les valeurs

$$C_0=c_0,\ C_1=c_1,\ C_2=c_2,\ldots,$$

nous allons montrer ici, comment on pourra en faire usage pour détérminer les réduites de la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

lorsque les coefficients

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots$$

diffèrent plus ou moins de $c_0,\ c_1,\ c_2,\ldots$

En nous reportant à ce que nous avons montré sur les fractions continues provenant du développement des séries, qui se présentent dans la recherche des valeurs limites des sommes et des intégrales, nous supposerons que la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

pour

$$C_0=c_0,\ C_1=c_1,\ C_2=c_2,\ldots$$

peut être développée en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \cdots}}},$$

où

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,$$

En désignant par

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},\ \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},\ldots$$

les réduites, nous observons, d'après ce que nous avons montré dans les Mémoires cités, que les équations

$$\psi_1(x) = 0,\ \psi_2(x) = 0,\ \psi_3(x) = 0,\ldots$$

seront des degrés

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

que leurs racines seront réelles et qu'entre deux racines successives de l'équation

$$\psi_n(x) = 0$$

se trouvera une racine de l'équation

$$\psi_{n-1}(x) = 0$$

pour toute valeur de n.

Afin de simplifier nos formules, nous nous bornerons à la supposition que les racines de toutes ces équations sont toutes plus grandes que zéro, comme cela a lieu dans les cas les plus intéressants par leurs applications et comme cela peut être toujours réalisé par un changement convenable de la variable x. Dans cette supposition toutes les racines des équations

$$\psi_1(x) = 0,\ \psi_2(x) = 0,\ \psi_3(x) = 0,\ldots$$

auront des valeurs réelles positives, et par suite leurs premiers membres

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\ldots$$

seront des polynomes à termes alternés dont les premiers termes auront le signe $+$, puisque dans la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \cdots}}}$$

l'on a, comme nous l'avons dit plus haut,

$$(1) \qquad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_3 > 0,\ldots$$

D'après cela, en déterminant les signes des fonctions

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\ldots$$

pour

$$x=0,\ x=-h<0,\ x=-\infty,$$

nous trouvons que pour toutes les valeurs de n, l'on aura

(2) $(-1)^n\,\psi_n(0)>0;\ (-1)^n\,\psi_n(-h)>0;\ (-1)^n\,\psi_n(-\infty)>0.$

§ 2. Passant au cas, où les coefficients

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots$$

de la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots$$

diffèrent plus ou moins de

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ldots,$$

nous poserons

$$C_0=c_0-e_0,\ C_1=c_1+e_1,\ C_2=c_2-e_2,\ldots$$

et nous désignerons par W, W_0 les fonctions définies par les égalités

$$W=\frac{c_0}{x}+\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}+\ldots,$$

(3) $$W_0=\frac{e_0}{x}-\frac{e_1}{x^2}+\frac{e_2}{x^3}+\ldots,$$

d'ou il vient

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots=\frac{c_0-e_0}{x}+\frac{c_1+e_1}{x^2}+\frac{c_2-e_2}{x^3}+\ldots=W-W_0.$$

Pour déterminer celle des réduites de l'expression

$$W-W_0=\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

dont le dénominateur est du degré m (si une telle réduite existe), désignons-la par

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}.$$

Puisque, comme nous l'avons dit, les fonctions

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\ldots$$

sont des degrés

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,$$

la fonction

$$\Psi_m(x)$$

sera du meme degré que $\psi_m(x)$ et par conséquent nous aurons

(4) $$\Psi_m(x)=g_m\,\psi_m(x)+\theta_m(x),$$

g_m étant une constante différente de zéro et $\theta_m(x)$ un polynôme dont le degré ne dépasse pas $m-1$. Avec cette décomposition du dénominateur la réduite cherchée prendra la forme

$$\frac{\Omega_m(x)}{g_m\,\psi_m(x)+\theta_m(x)}.$$

En calculant la différence entre cette fraction et la fonction

$$W-W_0,$$

nous trouvons qu'elle est égale à l'expression fractionnaire

$$\frac{W\theta_m(x)-\Omega_m(x)-(g_m\,\psi_m(x)+\theta_m(x))\,W_0+g_m\,\psi_m(x)\,W}{g_m\,\psi_m(x)+\theta_m(x)}.$$

Comme le dénominateur est ici du degré m et que l'expression ellememe, représentant la différence entre la fonction

$$W-W_0$$

et sa réduite

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)},$$

doit être d'un degré inférieur à $-2m$, il s'ensuit que le degré du numérateur

$$W\theta_m(x)-\Omega_m(x)-(g_m\,\psi_m(x)+\theta_m(x))\,W_0+g_m\,\psi_m(x)\,W$$

doit être inférieur à $-m$; or, pour cela il faut et il suffit que la différence

$$W\theta_m(x)-\Omega_m(x)$$

donne l'expression de la fonction

$$(g_m\,\psi_m(x)+\theta_m(x))\,W_0-g_m\,\psi_m(x)\,W$$

exacte jusqu'aux termes en x^{-m} inclusivement. D'après cela, par les formules énoncées par nous dans une lettre au professeur Braschmann *) et démontrées dans un Mémoire intitulé: *Sur le développement des fonctions en séries au moyen des fractions continues* **), on peut trouver le développement du polynôme $\theta_m(x)$ suivant les fonctions

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ldots\psi_{m-1}(x).$$

En effet, en appliquant les formules obtenues dans le § 10 du Mémoire cité à la détermination du polynôme $\theta_m(x)$ de degré $m-1$ au plus, avec lequel l'expression

$$W\theta_m(x)-\Omega_m(x),$$

---

*) T. I, pag. 611—614.

**) T. I, pag. 617—636.

$\Omega_m(x)$ étant une fonction entière, puisse représenter le plus exactement possible une fonction quelconque $F(x)$ et en supposant que W se développe en fraction continue

$$\frac{1}{A_1 x + B_1 + \frac{1}{A_2 x + B_2 + \frac{1}{A_3 x + B_3 + \cdots}}},$$

dont les réduites soient

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \ldots,$$

nous trouvons

$$(5) \qquad \theta_m(x) = A_1 L_1 Q_1 - A_2 L_2 Q_2 + \ldots - (-1)^m A_m L_m Q_m,$$

où

$$L_1, \ L_2, \ldots L_m$$

designent les coefficients des termes en $\frac{1}{x}$ dans les produits

$$Q_1 F(x), \ Q_2 F(x), \ldots Q_m F(x).$$

Le polynôme $\theta_m(x)$ étant déterminé par cette formule et $\Omega_m(x)$ étant convenablement choisi, l'expression

$$W\theta_m(x) - \Omega_m(x)$$

représentera la fonction $F(x)$ avec la plus grande exactitude qui soit possible lorsque le degré de $\theta_m(m)$ ne dépasse pas $m-1$. Puisque la formule

$$W\theta_m(x) - \Omega_m(x)$$

donne la fonction

$$F(x)$$

au moins jusqu'au terme en x^{-m} inclusivement et puisque pour tout autre polynôme, dont le degré ne dépasse par $m-1$, l'exactitude de cette formule ne peut pas atteindre cette limite, nous concluons de ce qui a été dit sur la détermination du polynôme $\theta_m(x)$ entrant dans l'expression (4) de $\Psi(x)$ que $\theta_m(x)$ doit satisfaire à l'égalité (5) dans le cas, où

$$(6) \qquad F(x) = (g_m \psi_m(x) + \theta_m(x)) \ W_0 - g_m \psi_m(x) \ W$$

et

$$\frac{1}{A_1 x + B_1 + \frac{1}{A_2 x + B_2 + \frac{1}{A_3 x + B_3 + \cdots}}} = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \cdots}}}.$$

On voit de la dernière égalité que l'on a ici

$$A_1 = \alpha_1, \ A_2 = -\alpha_2, \ A_3 = \alpha_3, \ldots$$

et que les dénominateurs

$$Q_1, \ Q_2, \ Q_3, \ldots,$$

des réduites de la fraction continue

$$\frac{1}{A_1 x + B_1} + \frac{1}{A_2 x + B_2} + \frac{1}{A_3 x + B_3} + \cdots$$

ont les valeurs

$$Q_1 = \psi_0(x),\ Q_2 = \psi_1(x),\ Q_3 = -\psi_2(x),\ Q_4 = \psi_3(x)\ldots$$

En trouvant d'après cela

$$A_1 Q_1 = \alpha_1 \psi_0(x),\ A_2 Q_2 = -\alpha_2 \psi_1(x),\ A_3 Q_3 = -\alpha_3 \psi_2(x), \ldots,$$

nous concluons de la définition des quantités

$$L_1,\ L_2,\ L_3, \ldots$$

que les coefficients

$$A_1 L_1,\ A_2 L_2,\ A_3 L_3, \ldots$$

dans l'égalité (5) sont les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans les produits

$$\alpha_1 \psi_0(x)\, F(x),\ -\alpha_2 \psi_1(x)\, F(x),\ -\alpha_3 \psi_2(x)\, F(x), \ldots,$$

et qu'ils peuvent par conséquent être représentés par les expressions

$$A_1 L_1 = [\alpha_1 \psi_0(z) F(z)]_z,\ A_2 L_2 = -[\alpha_2 \psi_1(z) F(z)]_z\ A_3 L_3 = -[\alpha_3 \psi_2(z) F(z)]_z, \ldots,$$

si nous convenons de désigner le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement d'une fonction quelconque V suivant les puissances descendantes de z par

$$[V]_z.$$

En portant dans l'équation (5) ces valeurs des coefficients

$$A_1 L_1,\ A_2 L_2,\ A_3 L_3, \ldots\ .$$

ainsi que les expressions obtenues plus haut pour les fonctions $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$, nous trouvons que cette équation devient

$$\begin{aligned}\theta_m(x) = {} & [\alpha_1 \psi_0(z)\, F(z)]_z\, \psi_0(x) + [\alpha_2 \psi_1(z)\, F(z)]_z\, \psi_1(x) + \\ & [\alpha_3 \psi_2(z)\, F(z)]_z\, \psi_2(x) + \ldots + [\alpha_m\, \psi_{m-1}(z)\, F(z)]_z\, \psi_{m-1}(x) \\ = {} & \left[\left(\alpha_1 \psi_0(x)\, \psi_0(z) + \alpha_2 \psi_1(x)\, \psi_1(z) + \ldots + \alpha_m \psi_{m-1}(x)\, \psi_{m-1}(z)\right) F(z)\right]_z,\end{aligned}$$

et, en posant

$$(7)\qquad \Phi_m(x, z) = \alpha_1 \psi_0(x) \psi_0(z) + \alpha_2 \psi_1(x) \psi_1(z) + \ldots + \alpha_m \psi_{m-1}(x) \psi_{m-1}(z),$$

nous trouvons

$$(8)\qquad \theta_m(x) = [\Phi_m(x, z)\, F(z)]_z;$$

d'où, en y portant l'expression de la fonction $F(x)$ définie par la formule (6), nous obtenons pour détérminer le polynôme cherché $\theta_m(x)$ cette équation

$$\theta_m(x) = \left[\Phi_m(x, z)\left((g_m \psi_m(z) + \theta_m(z))\ W_0 - g_m \psi_m(z)\ W\right)\right]_z$$

ou bien

$$\theta_m(x) = [\Phi_m(x, z)\ (g_m \psi_m(z) + \theta_m(z))\ W_0]_z - [g_m\ \Phi_m(x, z)\ \psi_m(z)\ W]_z.$$

Dans cette égalité le produit

$$W\psi_m(z),$$

d'après la propriété des réduites, ne différera de la fonction entière $\varphi_m(z)$ que par les termes de degrés inférieurs à $-m$, tandis que la fonction $\Phi_m(x, z)$, d'après (7), est du degré $m-1$; donc l'expression

$$\Phi_m(x, z)\ \psi_m(z)\ W$$

ne contiendra pas de terme en $\frac{1}{z}$; par suite l'on aura

$$[g_m\ \Phi_m(x, z)\ \psi_m(z)\ W]_z = 0,$$

et l'équation que nous avons obtenue se réduira à celle-ci

$$(9) \qquad \theta_m(x) = [\Phi_m(x, z)\ (g_m \psi_m(z) + \theta_m(z))\ W_0]_z,$$

où, d'après la formule (7), la fonction $\Phi_m(x, z)$ est exprimée par

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x), \ldots \psi_{m-1}(x)$$

sous la forme d'une somme de m termes symétriques par rapport à x, z et dont les degrés par rapport à chacune de ces deux variables ne dépassent pas $m-1$.

Il n'est pas difficile de trouver l'expression de cette fonction sous la forme d'une fraction très simple ne contenant que $\psi_{m-1}(x)$, $\psi_m(x)$.

Pour cela nous observons que l'équation (7) multipliée par x donne

$$x\Phi_m(x, z) = \alpha_1 x\psi_0(x)\ \psi_0(z) + \alpha_2 x\psi_1(x)\ \psi_1(z) + \ldots + \alpha_m x\psi_{m-1}(x)\ \psi_{m-1}(z).$$

Comme les dénominateurs

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots \psi_{m-1}(x),\ \psi_m(x)$$

des réduites de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \cdots}}},$$

satisfont aux égalités

$$\psi_0(x) = 1,\ \psi_1(x) = (\alpha_1 x + \beta_1)\ \psi_0(x),\ \psi_2(x) = (\alpha_2 x + \beta_2)\ \psi_1(x) - \psi_0(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \psi_m(x) = (\alpha_m x + \beta_m)\ \psi_{m-1}(x) - \psi_{m-2}(x),$$

d'ou il résulte

$$\alpha_1 x\psi_0(x) = \psi_1(x) - \beta_1\psi_0(x),$$
$$\alpha_2 x\psi_1(x) = \psi_2(x) - \beta_2\psi_1(x) + \psi_0(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_m x\psi_{m-1}(x) = \psi_m(x) - \beta_m\psi_{m-1}(x) + \psi_{m-2}(x);$$

cette équation se réduit à la suivante

$$x\Phi_m(x, z) = [\psi_1(x) - \beta_1\psi_0(x)]\psi_0(z) + [\psi_2(x) - \beta_2\psi_1(x) + \psi_0(x)]\psi_1(z) + \dots$$
$$\dots + [\psi_m(x) - \beta_m\psi_{m-1}(x) + \psi_{m-2}(x)]\,\psi_{m-1}(z).$$

En calculant de même le produit

$$z\Phi_m(x, z),$$

nous trouvons

$$z\Phi_m(x, z) = [\psi_1(z) - \beta_1\psi_0(z)]\psi_0(x) + [\psi_2(z) - \beta_2\psi_1(z) + \psi_0(z)]\psi_1(x) + \dots$$
$$\dots + [\psi_m(z) - \beta_m\psi_{m-1}(z) + \psi_{m-2}(z)]\,\psi_{m-1}(x),$$

ce qui, retranché de l'égalite précédente, donne

$$(x - z)\,\Phi_m(x, z) = \psi_{m-1}(z)\,\psi_m(x) - \psi_m(z)\,\psi_{m-1}(x).$$

En divisant par $x - z$, nous obtenons pour déterminer la fonction $\Phi_m(x, z)$ la formule

(10) $$\Phi_m(x, z) = \frac{\psi_{m-1}(z)\,\psi_m(x) - \psi_m(z)\,\psi_{m-1}(x)}{x - z}.$$

§ 3. Passant aux applications des formules que nous venons d'obtenir, nous commencerons par le cas particulier où la série

$$W_0 = \frac{e_0}{x} - \frac{e_1}{x^2} + \frac{e_2}{x^3} - \dots$$

se réduit à la fraction

$$\frac{1}{H(x + h)},$$

ce qui a lieu pour

$$e_0 = \frac{1}{H}, \quad e_1 = \frac{h}{H}, \quad e_2 = \frac{h^2}{H}, \dots$$

Nous suppôserons la quantité h toujours positive et H quelconque.

En posant dans ce cas particulier dans la formule (9)

$$W_0 = \frac{1}{H(x + h)}$$

nous obtenons pour déterminer le polynôme $\theta_m(x)$ l'équation

$$\theta_m(x) = \left[\Phi_m(x, z)\ (g_m \psi_m(z) + \theta_m(z))\ \frac{1}{H(z+h)}\right]_z.$$

Pour en déduire l'expression du polynôme cherché $\theta_m(x)$, nous observons que la fonction

$$\frac{g_m \psi_m(z) + \theta_m(z)}{H(z+h)},$$

après que l'on en a retranché la partie entière

$$\frac{g_m \psi_m(z) + \theta_m(z) - g_m \psi_m(-h) - \theta_m(-h)}{H(z+h)},$$

qui n'influe pas sur la quantité

$$\left[\Phi_m(x, z)\ (g_m \psi_m(z) + \theta_m(z))\ \frac{1}{H(z+h)}\right]_z,$$

se réduit à la fraction

$$\frac{g_m \psi_m(-h) + \theta_m(-h)}{H(z+h)},$$

ce qui donne

$$\left[\Phi_m(x, z)\ \frac{g_m \psi_m(z) + \theta_m(z)}{H(z+h)}\right]_z = \frac{g_m \psi_m(-h) + \theta_m(-h)}{H} \left[\frac{\Phi_m(x, z)}{z+h}\right]_z.$$

Si de même nous retranchons ici de la fonction

$$\frac{\Phi_m(x, z)}{z+h}$$

sa partie entière

$$\frac{\Phi_m(x, z) - \Phi_m(x, -h)}{z+h},$$

nous aurons

$$\left[\Phi_m(x, z)\ (g_m \psi_m(z) + \theta_m(z))\ \frac{1}{H(z+h)}\right]_z = \frac{g_m \psi_m(-h) + \theta_m(-h)}{H} \left[\frac{\Phi_m(x, -h)}{z+h}\right]_z.$$

D'où, en vertu de l'égalité

$$\left[\frac{\Phi_m(x, -h)}{z+h}\right]_z = \Phi_m(x, -h),$$

il vient

$$\left[\Phi_m(x, z)\ (g_m \psi_m(z) + \theta_m(z))\ \frac{1}{H(z+h)}\right]_z = \frac{g_m \psi_m(-h) + \theta_m(-h)}{H}\ \Phi_m(x, -h);$$

par suite, l'expression du polynôme $\theta_m(x)$ que nous venons d'obtenir se réduit à celle-ci

$$\theta_m(x) = \frac{g_m \psi_m(-h) + \theta_m(-h)}{H}\ \Phi_m(x, -h).$$

Nous déterminerons la constante inconnue qui figure dans cette expression de la fonction $\theta_m(x)$, en observant que pour $x = -h$ elle donne l'équation

$$\theta_m(-h) = \frac{g_m \psi_m(-h) + \theta_m(-h)}{H}\ \Phi_m(-h, -h);$$

d'où l'on obtient

$$\theta_m(-h) = \frac{g_m \psi_m(-h)\, \Phi_m(-h, -h)}{H - \Phi_m(-h, -h)}.$$

En posant pour abréger

(11) $$\Phi_m(-h, -h) = H_m,$$

nous avons d'après cette formule

$$\theta_m(-h) = \frac{g_m \psi_m(-h)\, H_m}{H - H_m};$$

et l'expression obtenue pour $\theta_m(x)$ se réduit à la suivante

(12) $$\theta_m(x) = \frac{g_m \psi_m(-h)\, \Phi_m(x, -h)}{H - H_m}.$$

En portant cette expression du polynôme $\theta_m(x)$ dans l'égalité (4) qui détermine le dénominateur $\Psi_m(x)$ de la réduite

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

de l'expression

$$W - W_0,$$

dont le degré est égal à m, nous trouvons que dans le cas particulier que nous considérons, où

$$W_0 = \frac{1}{H(x+h)},$$

ce dénominateur est détérminé par la formule

(13) $$\Psi_m(x) = g_m \psi_m(x) + \frac{g_m \psi_m(-h)\, \Phi_m(x, -h)}{H - H_m}.$$

Quant au numérateur $\Omega_m(x)$ de cette fraction, nous le trouverons en multipliant $W - W_0$ par $\psi_m(x)$ et en négligeant dans le produit les termes de degrés négatifs.

§ 4. Les formules que l'on obtient de cette manière pour

$$\Psi_m(x),\ \Omega_m(x)$$

contiennent le facteur constant g_m qui reste indéterminé.

Comme c'est un facteur commun des fonctions

$$\Omega_m(x),\ \Psi_m(x),$$

il disparait dans la fraction

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)};$$

il reste donc complètement arbitraire, si, en determinant les fonctions

$$\Psi_m(x),\ \Omega_m(x)$$

on n'a en vue que de faire approcher le plus possible la fraction

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

de la fonction

$$W - \frac{1}{H(x+h)},$$

comme nous l'avons fait jusqu'ici. Passons maintenant à la supposition que la fraction que nous considérons

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

s'obtient du développement de la fonction

$$W - \frac{1}{H(x+h)}$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \dots}}},$$

où

$$q_1, q_2, q_3, \dots$$

sont des fonctions entières.

En désignant par

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots$$

ses réduites, où

(14) $$Q_0 = 1,\ Q_1 = q_1,\ Q_2 = Q_1 q_2 - Q_0, \dots,$$

nous observons que parmi elles il doit se trouver une fraction dont le dénominateur est du degré m, si la différence

$$H - H_m$$

n'est pas nulle. En effet, on pourra déterminer ici par la formule (13) un dénominateur du degré m tel que la fraction

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

donne l'expression de la fonction

$$W - \frac{1}{H(x+h)},$$

à la quantité

$$\frac{1}{\Psi_m^2(x)}$$

inclusivement près, et cela ne peut pas avoir lieu si la fraction

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

n'appartient pas à la série

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots$$

des réduites de la fonction

$$W - \frac{1}{H(x+h)},$$

obtenues par le développement de cette fonction en fraction continue

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3} - \dots$$

Il en résulte que, le facteur constant g_m étant convenablement choisi dans la formule (13), cette formule fournit la fonction $\Psi_m(x)$ égale à l'un des dénominateurs

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots$$

De là, en répétant le même raisonnement après avoir remplacé m par $1, 2, \dots m-1$, nous concluons que, les facteurs

$$g_1, g_2 \dots g_{m-1}, g_m$$

étant convenablement choisis, la formule (13) fera connaître les fonctions

$$\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots \Psi_{m-1}(x), \Psi_m(x),$$

qui ont leurs égales dans la série des denominateurs

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots,$$

lorsque aucune des équations

$$(15) \qquad H = H_1, \; H = H_2, \dots H = H_{m-1}, \; H = H_m$$

n'est satisfaite.

Puisque les degrés de ces dénominateurs forment une série croissante et que les fonctions

$$\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots \Psi_{m-1}(x), \Psi_m(x),$$

d'après la formule (13), sont des degrés

$$1, 2, \dots m-1, m,$$

les deux séries de fonctions ne peuvent coïncider que si l'on a

$$(16) \quad \Psi_1(x) = Q_1, \; \Psi_2(x) = Q_2, \dots \Psi_{m-1}(x) = Q_{m-1}, \; \Psi_m(x) = Q_m;$$

ces egalités nous serviront à déterminer les facteurs constants

$$g_1, g_2, \dots g_{m-1}, g_m,$$

qui entrent dans les expressions des fonctions

$$\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots \Psi_{m-1}(x), \Psi_m(x).$$

§ 5. Passant à la détermination de ces facteurs, nous observons que, d'après (14), les égalités (16) ne peuvent avoir lieu que dans le cas, où les quotients incomplets

$$q_1, q_2, \ldots q_m$$

contiennent x au premier degré et où, par conséquent, q_n est représenté par la formule

$$q_n = \rho_n x + \sigma_n,$$

ρ_n, σ_n étant des constantes. En portant cette expression de q_n dans l'équation

$$Q_n = Q_{n-1} q_n - Q_{n-2},$$

à laquelle d'après (14) doivent satisfaire les dénominateurs Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n, nous trouvons pour $n \leqq m$, la relation

$$Q_n = Q_{n-1} (\rho_n x + \sigma_n) - Q_{n-2},$$

qui donne d'après (16)

$$\Psi_n(x) = \Psi_{n-1}(x)(\rho_n x + \sigma_n) - \Psi_{n-2}(x).$$

Pour en déduire les équations qui déterminent les quantités

$$g_1, g_2, \ldots g_{m-1}, g_m,$$

introduisons-y les expressions des fonctions

$$\Psi_n(x), \Psi_{n-1}(x), \Psi_{n-2}(x)$$

que nous tirerons de (13), en y remplaçant

$$\Phi_n(x, -h), \Phi_{n-1}(x, -h), \Phi_{n-2}(x, -h)$$

par leurs expressions que nous obtiendrons de (10), en y posant $m = n$, $n-1$, $n-2$. Cela nous fournira l'équation

$$\begin{aligned} g_n &\left[\psi_n(x) + \frac{\psi_n(-h)}{H - H_n} \frac{\psi_{n-1}(-h)\psi_n(x) - \psi_n(-h)\psi_{n-1}(x)}{x+h}\right] \\ = g_{n-1}(\rho_n x + \sigma_n) &\left[\psi_{n-1}(x) + \frac{\psi_{n-1}(-h)}{H - H_{n-1}} \frac{\psi_{n-2}(-h)\psi_{n-1}(x) - \psi_{n-1}(-h)\psi_{n-2}(x)}{x+h}\right] \\ - g_{n-2} &\left[\psi_{n-2}(x) + \frac{\psi_{n-2}(-h)}{H - H_{n-2}} \frac{\psi_{n-3}(-h)\psi_{n-2}(x) - \psi_{n-2}(-h)\psi_{n-3}(x)}{x+h}\right]; \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par $x+h$, nous déduisons

$$\begin{aligned} &[g_n \psi_n(x) - g_{n-1}(\rho_n x + \sigma_n)\psi_{n-1}(x) + g_{n-2}\psi_{n-2}(x)](x+h) \\ &+ g_n \frac{\psi_n(-h)}{H - H_n} [\psi_{n-1}(-h)\psi_n(x) - \psi_n(-h)\psi_{n-1}(x)] \\ &- g_{n-1} \frac{\psi_{n-1}(-h)}{H - H_{n-1}} (\rho_n x + \sigma_n) [\psi_{n-2}(-h)\psi_{n-1}(x) - \psi_{n-1}(-h)\psi_{n-2}(x)] \\ &+ g_{n-2} \frac{\psi_{n-2}(-h)}{H - H_{n-2}} [\psi_{n-3}(-h)\psi_{n-2}(x) - \psi_{n-2}(-h)\psi_{n-3}(x)] = 0. \end{aligned}$$

Dans cette formule les fonctions

$$\psi_{n-2}(x),\ \psi_{n-1}(x),\ \psi_n(x),$$

étant les dénominateurs des réduites

$$\frac{\varphi_{n-2}(x)}{\psi_{n-2}(x)},\ \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\psi_{n-1}(x)},\ \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$$

de l'expression

$$W = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3 - \cdots}}},$$

sont liées par l'équation

$$(17)\qquad \psi_n(x) = (\alpha_n x + \beta_n)\,\psi_{n-1}(x) - \psi_{n-2}(x).$$

Par suite, le facteur qui multiplie $x+h$ devient par l'elimination de $\psi_n(x)$

$$(\alpha_n g_n - \rho_n g_{n-1})\,x\psi_{n-1}(x) + (\beta_n g_n - \sigma_n g_{n-1})\,\psi_{n-1}(x) + (g_{n-2} - g_n)\,\psi_{n-2}(x).$$

En observant que le produit du premier terme de cette expression par $x+h$ est du degré $n+1$ et que les degrés de tous les autres termes de l'égalité que nous considérons sont inférieurs à $n+1$, nous concluons que cette égalité ne peut avoir lieu que si ce terme disparait et que par conséquent on doit avoir

$$(18)\qquad \alpha_n g_n - \rho_n g_{n-1} = 0.$$

Cela posé, l'égalité dont ils'agit se réduit à celle-ci:

$$\left[\beta_n g_n - \sigma_n g_{n-1} - \frac{\rho_n g_{n-1}\,\psi_{n-1}(-h)\,\psi_{n-2}(-h)}{H - H_{n-1}}\right] x\psi_{n-1}(x)$$
$$+ \left[g_{n-2} - g_n + \frac{\rho_n g_{n-1}\,\psi^2_{n-1}(-h)}{H - H_{n-1}}\right] x\psi_{n-2}(x)$$
$$+ \left[h\,(\beta_n g_n - \sigma_n g_{n-1}) - \frac{g_n \psi_n^2(-h)}{H - H_n} - \frac{\sigma_n g_{n-1}\,\psi_{n-1}(-h)\,\psi_{n-2}(-h)}{H - H_{n-1}}\right] \psi_{n-1}(x)$$
$$+ \left[h\,(g_{n-2} - g_n) + \frac{\sigma_n g_{n-1}\,\psi^2_{n-1}(-h)}{H - H_{n-1}} + \frac{g_{n-2}\,\psi_{n-2}(-h)\,\psi_{n-3}(-h)}{H - H_{n-2}}\right] \psi_{n-2}(x)$$
$$+ \frac{g_n \psi_n(-h)\,\psi_{n-1}(-h)}{H - H_n}\,\psi_n(x) - \frac{g_{n-2}\,\psi^2_{n-2}(-h)}{H - H_{n-2}}\,\psi_{n-3}(x) = 0.$$

Pour en chasser les produits

$$x\psi_{n-1}(x),\ x\psi_{n-2}(x),$$

nous trouvons d'après (17)

$$x\psi_{n-1}(x) = \frac{\psi_n(x) - \beta_n \psi_{n-1}(x) + \psi_{n-2}(x)}{\alpha_n},$$

et, en remplaçant n par $n-1$,

$$x\psi_{n-2}(x) = \frac{\psi_{n-1}(x) - \beta_{n-1}\psi_{n-2}(x) + \psi_{n-3}(x)}{\alpha_{n-1}}.$$

En portant ces valeurs des produits

$$x\psi_{n-1}(x),\ x\psi_{n-2}(x)$$

dans l'égalité en question nous obtenons

$$\left[\beta_n g_n - \sigma_n g_{n-1} - \frac{\rho_n g_{n-1}\psi_{n-1}(-h)\psi_{n-2}(-h)}{H-H_{n-1}}\right]\frac{\psi_n(x)-\beta_n\psi_{n-1}(x)+\psi_{n-2}(x)}{\alpha_n}$$

$$+\left[g_{n-2}-g_n+\frac{\rho_n g_{n-1}\psi^2_{n-1}(-h)}{H-H_{n-1}}\right]\frac{\psi_{n-1}(x)-\beta_{n-1}\psi_{n-2}(x)+\psi_{n-3}(x)}{\alpha_{n-1}}$$

$$+\left[h(\beta_n g_n-\sigma_n g_{n-1})-\frac{g_n\psi^2_n(-h)}{H-H_n}-\frac{\sigma_n g_{n-1}\psi_{n-1}(-h)\psi_{n-2}(-h)}{H-H_{n-1}}\right]\psi_{n-1}(x)$$

$$+\left[h(g_{n-2}-g_n)+\frac{\sigma_n g_{n-1}\psi^2_{n-1}(-h)}{H-H_{n-1}}+\frac{g_{n-2}\psi_{n-2}(-h)\psi_{n-3}(-h)}{H-H_{n-2}}\right]\psi_{n-2}(x)$$

$$+\frac{g_n\psi_n(-h)\psi_{n-1}(-h)}{H-H_n}\psi_n(x)-\frac{g_{n-2}\psi^2_{n-2}(-h)}{H-H_{n-2}}\psi_{n-3}(x)=0.$$

Le premier membre de cette égalité est la somme algébrique des fonctions

$$\psi_n(x),\ \psi_{n-1}(x),\ \psi_{n-2}(x),\ \psi_{n-3}(x),$$

multipliées par des constantes qui doivent se réduire à zéro pour que cette somme formée des fonctions

$$\psi_n(x),\ \psi_{n-1}(x),\ \psi_{n-2}(x),\ \psi_{n-3}(x),$$

de degrés

$$n,\ n-1,\ n-2,\ n-3,$$

s'annule identiquement.

D'après cela, en rassemblant les termes en

$$\psi_n(x),\ \psi_{n-3}(x)$$

et en égalant leurs coefficients à zéro, nous obtenons ces deux équations

$$\frac{\beta_n g_n-\sigma_n g_{n-1}}{\alpha_n}-\frac{\rho_n g_{n-1}\psi_{n-1}(-h)\psi_{n-2}(-h)}{\alpha_n(H-H_{n-1})}+\frac{g_n\psi_n(-h)\psi_{n-1}(-h)}{H-H_n}=0,$$

$$\frac{g_{n-2}-g_n}{\alpha_{n-1}}+\frac{\rho_n g_{n-1}\psi^2_{n-1}(-h)}{\alpha_{n-1}(H-H_{n-1})}-\frac{g_{n-2}\psi^2_{n-2}(-h)}{H-H_{n-2}}=0.$$

En y mettant, d'après (18),

$$\frac{g_n}{g_{n-1}}\alpha_n$$

à la place de ρ_n, nous avons deux équations qui nous donnent

(19) $$\sigma_n=\frac{g_n}{g_{n-1}}\left[\beta_n+\alpha_n\psi_{n-1}(-h)\left(\frac{\psi_n(-h)}{H-H_n}-\frac{\psi_{n-2}(-h)}{H-H_{n-1}}\right)\right],$$

(20) $$\frac{g_n}{g_{n-2}}=\frac{H-H_{n-1}}{H-H_{n-2}}\,\frac{H-H_{n-2}-\alpha_{n-1}\psi^2_{n-2}(-h)}{H-H_{n-1}-\alpha_n\psi^2_{n-1}(-h)}.$$

Les quantités

$$H_n,\ H_{n-1},\ H_{n-2},\ \ldots$$

qui y entrent s'obtiendront par la formule (11) pour $m = n,\ n-1,\ n-2$. En portant dans cette formule l'expression (7) de la fonction

$$\Phi_m(x, z)$$

et en y posant $m = n$, nous trouvons que H_n est déterminé par la formule

$$(21)\qquad H_n = \alpha_1\psi_0^2(-h) + \alpha_2\psi_1^2(-h) + \ldots + \alpha_n\psi^2_{n-1}(-h).$$

En remplaçant ici n par $n-1$, $n-2$ et en comparant les expressions de H_n, H_{n-1}, H_{n-2} obtenues de ces formules, nous observons qu'elles satisfont aux équations

$$H_n = H_{n-1} + \alpha_n\psi^2_{n-1}(-h),\ H_{n-1} = H_{n-2} + \alpha_{n-1}\psi^2_{n-2}(-h),$$

qui donnent

$$\alpha_n\psi^2_{n-1}(-h) = H_n - H_{n-1};\ \alpha_{n-1}\psi^2_{n-2}(-h) = H_{n-1} - H_{n-2};$$

par conséquent l'expression du rapport

$$\frac{g_n}{g_{n-2}},$$

se réduit après l'élimination des quantités

$$\alpha_n\psi^2_{n-1}(-h),\ \alpha_{n-1}\psi^2_{n-2}(-h),$$

à celle qui suit:

$$\frac{g_n}{g_{n-2}} = \frac{(H - H_{n-1})^2}{(H - H_{n-2})(H - H_n)}.$$

En y posant successivement

$$n = m,\ m-2,\ m-4, \ldots m-2p+4$$

et en multipliant entre elles les égalités résultantes, nous obtenons, les réductions faites,

$$\frac{g_m}{g_{m-2p+2}} = \frac{(H-H_{m-1})^2(H-H_{m-3})^2\ldots(H-H_{m-2p+3})^2}{(H-H_m)(H-H_{m-2})^2(H-H_{m-4})^2\ldots(H-H_{m-2p+2})}.$$

En posant ici

$$m = 2p,\ m = 2p-1,$$

nous trouvons

$$\frac{g_{2p}}{g_2} = \frac{(H-H_{2p-1})^2(H-H_{2p-3})^2\ldots(H-H_3)^2}{(H-H_{2p})(H-H_{2p-2})^2(H-H_{2p-4})^2\ldots(H-H_2)},$$

$$\frac{g_{2p-1}}{g_1} = \frac{(H-H_{2p-2})^2(H-H_{2p-4})^2\ldots(H-H_2)^2}{(H-H_{2p-1})(H-H_{2p-3})^2(H-H_{2p-5})^2\ldots(H-H_1)}.$$

§ 6. Les quantités g_1, g_2, qui entrent dans ces formules sont déterminées, d'après (16), par les égalités

$$\Psi_1(x) = Q_1, \quad \Psi_2(x) = Q_2,$$

qui donnent d'après (13)

$$g_1 \psi_1(x) + g_1 \frac{\psi_1(-h)\,\Phi_1(x, -h)}{H - H_1} = Q_1,$$

$$g_2 \psi_2(x) + \frac{g_2 \psi_2(-h)\,\Phi_2(x, -h)}{H - H_2} = Q_2.$$

En observant que, d'après (7), les degrés des fonctions

$$\Phi_1(x, -h), \quad \Phi_2(x, -h)$$

sont inférieurs à ceux de

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x),$$

nous concluons de ces égalités

$$g_1 = \lim. \left[\frac{Q_1}{\psi_1(x)}\right]_{x=\infty}; \quad g_2 = \lim. \left[\frac{Q_2}{\psi_2(x)}\right]_{x=\infty}.$$

Cela montre que les quantités g_1, g_2 sont égales aux rapports des coefficients des plus hautes puissances de x dans les fonctions

$$Q_1, \quad \psi_1(x), \quad Q_2, \quad \psi_2(x),$$

que nous obtenons, d'après le § 4, en développant les fonctions

$$W = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots,$$

$$W - W_0 = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots - \frac{1}{H(x+h)}$$

en fractions continues.

Comme on a ici

$$W = \cfrac{1}{\frac{x}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} - \cfrac{1}{\frac{c_0^2}{c_0 c_2 - c_1^2}\, x + \ldots}};$$

$$W - W_0 = \cfrac{1}{\frac{Hx}{c_0 H - 1} - \frac{H(c_1 H + h)}{(c_0 H - 1)^2} - \cfrac{1}{\frac{(c_0 H - 1)^3}{H(c_0 H - 1)(c_2 H - h^2) - H(c_1 H + h)^2}\, x + \ldots}},$$

nous avons dans ce cas d'après nos notations

$$\alpha_1 = \frac{1}{c_0}; \quad \alpha_2 = \frac{c_0^3}{c_0 c_2 - c_1^2},$$

$$\psi_0(x) = 1; \quad \psi_1(x) = \frac{x}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2}; \quad \psi_2(x) = \frac{c_0^2}{c_0 c_2 - c_1^2}\, x^2 + \ldots;$$

$$Q_1 = \frac{Hx}{c_0 H - 1} - \frac{H(c_1 H + h)}{(c_0 H - 1)^2}; \quad Q_2 = \frac{(c_0 H - 1)^2 x^2}{H[(c_0 c_2 - c_1^2) H - c_0 h^2 - 2c_1 h - c_2]} + \ldots$$

D'où il vient, d'après ce que nous avons dit sur la détermination de g_1, g_2,

$$g_1 = \frac{c_0 H}{c_0 H - 1}; \quad g_2 = \frac{(c_0 H - 1)^2 (c_0 c_2 - c_1^2)}{c_0^2 H[(c_0 c_2 - c_1^2) H - c_0 h^2 - 2c_1 h - c_2]},$$

et d'après (21)

$$H_1 = \alpha_1 \psi_0^2(-h) = \frac{1}{c_0},$$

$$H_2 = \alpha_1 \psi_0^2(-h) + \alpha_2 \psi_1^2(-h) = \frac{1}{c_0} + \frac{(c_0 h + c_1)^2}{c_0 (c_0 c_2 - c_1^2)}.$$

En tirant de ces dernières égalités

$$c_0 = \frac{1}{H_1}; \quad c_0 h^2 + 2c_1 h + c_2 = (c_0 c_2 - c_1^2) H_2$$

et en portant ces expressions dans celles de g_1, g_2, nous aurons

$$g_1 = \frac{H}{H - H_1}; \quad g_2 = \frac{(H - H_1)^2}{H(H - H_2)};$$

après quoi les formules obtenues au § précédent pour les rapports $\frac{g_{2p}}{g_2}, \frac{g_{2p-1}}{g_1}$ donnent

$$(22) \quad \begin{cases} g_{2p} = \dfrac{1}{H(H - H_{2p})} \left(\dfrac{(H - H_{2p-1})(H - H_{2p-3}) \ldots (H - H_1)}{(H - H_{2p-2})(H - H_{2p-4}) \ldots (H - H_2)}\right)^2, \\ g_{2p-1} = \dfrac{H}{H - H_{2p-1}} \left(\dfrac{(H - H_{2p-2})(H - H_{2p-4}) \ldots (H - H_2)}{(H - H_{2p-3})(H - H_{2p-5}) \ldots (H - H_1)}\right)^2. \end{cases}$$

Ces formules déterminent les facteurs constants

$$g_1, \; g_2, \ldots g_m,$$

qui entrent dans les expressions (13) des fonctions

$$\Psi_1(x), \; \Psi_2(x), \ldots \Psi_m(x),$$

lorsque les réduites

$$\frac{\Omega_1(x)}{\Psi_1(x)}, \; \frac{\Omega_2(x)}{\Psi_2(x)}, \ldots \frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

de l'expression

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots - \frac{1}{H(x+h)}$$

se déduisent de son développement en fraction continue

$$\cfrac{1}{\rho_1 x + \sigma_1 - \cfrac{1}{\rho_2 x + \sigma_2 - \cdots - \cfrac{1}{\rho_m x + \sigma_m - \cdots}}}.$$

Quant à la détermination des quotients incomplets de cette fraction, nous tirons de (18) pour $m = 2p$, $m = 2p - 1$

$$\rho_{2p} = \alpha_{2p} \frac{g_{2p}}{g_{2p-1}}; \quad \rho_{2p-1} = \alpha_{2p-1} \frac{g_{2p-1}}{g_{2p-2}},$$

et il vient de (22)

$$\rho_{2p} = \alpha_{2p} \frac{(H - H_{2p-1})^3}{H^2 (H - H_{2p})} \left(\frac{(H - H_{2p-3}) \ldots (H - H_3)(H - H_1)}{(H - H_{2p-2}) \ldots (H - H_4)(H - H_2)}\right)^4$$

$$\rho_{2p-1} = \alpha_{2p-1} \frac{H^2 (H - H_{2p-2})^3}{H - H_{2p-1}} \left(\frac{(H - H_{2p-4}) \ldots (H - H_4)(H - H_2)}{(H - H_{2p-3}) \ldots (H - H_3)(H - H_1)}\right)^4.$$

Ayant ainsi déterminé le coefficient ρ_m dans le quotient incomplet

$$\rho_m x + \sigma_m,$$

nous trouverons σ_m par la formule

$$\sigma_m = \rho_m \left[\frac{\beta_m}{\alpha_m} + \psi_{m-1}(-h) \left(\frac{\psi_m(-h)}{H - H_m} - \frac{\psi_{m-1}(-h)}{H - H_{m-1}}\right)\right],$$

qui s'obtient de l'égalité (19), en y portant d'après (18) $\frac{\rho_n}{\alpha_n}$ à la place de $\frac{g_n}{g_{n-1}}$ et en remplaçant n par m.

§ 7. Dans le cas que nous considérons les quantités

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$$

sont positives, d'après le § 1; donc les formules que nous venons d'obtenir donnent, comme on le voit aisément,

$$\rho_1 > 0, \ \rho_2 > 0, \ldots \rho_m > 0,$$

si H a une valeur quelconque, négative ou positive, supérieure à

$$H_1, \ H_2, \ldots H_m.$$

En nous bornant à ces valeurs de H, nous concluons de ce qui a été dit au § 1 sur les fractions continues dont les quotients ne contiennent que la première puissance de x avec des coefficients positifs, que toutes les racines des équations

$$\Psi_1(x) = 0, \ \Psi_2(x) = 0, \ldots \Psi_m(x) = 0$$

sont réelles et qu'entre deux racines voisines de l'une quelconque d'entre elles

$$\Psi_n(x) = 0$$

se trouve une racine de l'équation

$$\Psi_{n-1}(x)=0.$$

On voit de là qu'aucune de ces équations n'aura de racines negatives si dans la dernière équation

$$\Psi_m(x)=0,$$

qui, d'après (13) et (10), se réduit à

$$(23)\qquad \psi_m(x)+\frac{\psi_m(-h)}{H-H_m}\,\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h}=0,$$

toutes les racines sont plus grandes que zéro.

Pour trouver les conditions sous lesquelles cela a lieu, nous observons que, d'après le § 1, entre deux racines voisines de l'équation

$$\psi_m(x)=0$$

se trouve toujours une racine de l'équation

$$\psi_{m-1}(x)=0,$$

et que par conséquent la fonction $\psi_{m-1}(x)$ doit changer de signe dans cet intervalle; mais comme la fonction $\psi_m(x)$ s'annule aux extrémités de l'intervalle et que $\psi_{m-1}(x)$ change de signe, le premier membre de l'équation (23) change évidemment de signe dans cet intervalle. Il en suit que dans chaque intervalle entre deux racines voisines de l'équation

$$\psi_m(x)=0$$

se trouvera au moins une racine de l'équation (23). Cela posé et eu égard à ce que l'équation

$$\psi_m(x)=0$$

a m racines qui sont toutes positives d'après le § 1, nous concluons que l'équation (23) a au moins $m-1$ racines positives; donc, étant du degré m, elle ne peut avoir qu'une racine négative. Mais l'équation (23) ne peut pas avoir une seule racine négative, si son premier membre a pour $x=-\infty$ le même signe que l'expression

$$\psi_m(0)+\frac{\psi_m(-h)}{H-H_m}\,\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}{h},$$

qui représente sa valeur pour $x=0$.

En observant d'après sa composition que pour $x=-\infty$ il a le même signe que son terme le plus élevé $\psi_m(x)$ et que, d'après (2), $\psi_m(-\infty)$ et

$\psi_m(0)$ ont le même signe, nous concluons que l'équation (23) n'a pas de racine négative, si le rapport des quantités

$$\psi_m(0),\ \psi_m(0)+\frac{\psi_m(-h)}{H-H_m}\,\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}{h}$$

est positif et si, par conséquent, a lieu l'inégalité

$$1+\frac{\psi_m(-h)}{(H-H_m)\,\psi_m(0)}\,\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}{h}>0.$$

Comme on a, d'après (2),

$$\frac{\psi_m(-h)}{\psi_m(0)}>0,$$

et que, d'après (7), (10), la fraction

$$\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}{h}$$

est égale à la somme

$$\alpha_1\psi_0(-h)\,\psi_0(0)+\alpha_2\psi_1(-h)\,\psi_1(0)+\ldots+\alpha_m\psi_{m-1}(-h)\,\psi_{m-1}(0),$$

dont tous les termes son positifs d'après (1), (2), on peut diviser cette inégalité par le produit

$$\frac{\psi_m(-h)}{\psi_0(0)}\,\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}{h};$$

après quoi elle donne, en transportant le premier terme au second membre,

$$(24)\qquad \frac{1}{H-H_m}>-\frac{\psi_m(0)}{\psi_m(-h)}\,\frac{h}{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}.$$

En observant que, lorsque cette inégalité est satisfaite, l'équation

$$\psi_m(x)+\frac{\psi_m(-h)}{H-H_m}\,\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h}=0$$

n'aura pas de racines négatives, nous concluons que pas une seule variation de signes dans l'équation

$$\psi_m(x)=0$$

ne sera perdue par l'addition au premier membre des termes qui forment le polynôme

$$\psi_m(-h)\,\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x)-\psi_m(-h)\,\psi_m(x)}{x+h},$$

multiplié par

$$\frac{1}{H-H_m},$$

si cette dernière quantité est plus grande que

$$-\frac{\psi_m(0)}{\psi_m(-h)}\,\frac{h}{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}.$$

§ 8. En revenant au cas général, lorsque les coefficients

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots$$

de la série

$$W_0 = \frac{e_0}{x} - \frac{e_1}{x^2} + \frac{e_2}{x^3} - \ldots$$

sont complètement indépendants entre eux, nous désignerons par

$$K_0^{(n)},\ K_1^{(n)},\ K_2^{(n)}, \ldots K_n^{(n)}$$

les valeurs absolues des coefficients qui multiplient

$$x^0,\ x^1,\ x^2, \ldots x^n$$

dans la fonction

$$\psi_n(x)$$

pour n quelconque.

Comme, d'après le § 1, dans les polynômes

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots$$

les termes ont alternativement les signes $+$ et $-$ et que les termes le plus élevés ont le signe $+$, la fonction $\psi_n(x)$ sera représentée pour une valeur quelconque de n par la formule

$$(25)\quad \psi_n(x) = K_n^{(n)} x^n - K_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + K_{n-2}^{(n)} x^{n-2} - \ldots \pm K_0^{(n)}$$
$$= \sum (-1)^{n-i} K_i^{(n)} x^i. \qquad (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n).$$

En calculant d'après cette formule les produits

$$\alpha_1 \psi_0(x)\, \psi_0(z),\ \alpha_2 \psi_1(x)\, \psi_1(z), \ldots \alpha_m \psi_{m-1}(x)\, \psi_{m-1}(z),$$

où, d'après (1), on a

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \ldots \alpha_m > 0,$$

nous observons qu'ils se réduisent à des sommes algébriques de termes qui contiennent x à des puissances inférieures à m et que le signe du terme en

$$x^{i_{,}}\ z^{i_{,,}}$$

est défini par le signe de

$$(-1)^{n-i_{,}} (-1)^{n-i_{,,}} = (-1)^{i_{,}+i_{,,}}.$$

D'où l'on voit qu'en portant les expressions de ces produits dans la formule (7), on obtiendra une équation que l'on pourra écrire ainsi

$$(26)\qquad \Phi_m(x, z) = \sum \sum (-1)^{i_{,}+i_{,,}} (i_{,},\ i_{,,})\, x^{i_{,}}\ z^{i_{,,}}$$
$$(i_{,} = 0,\ 1,\ 2, \ldots m-1;\ i_{,,} = 0,\ 1,\ 2, \ldots m-1),$$

en désignant par

$$(i_{,},\ i_{,,})$$

la valeur absolue du coefficient de $x^{i_,} x^{i_{,,}}$. Si nous portons cette expression de la fonction $\Phi_m(x, z)$ dans l'équation (9) et si nous observons que l'on a ici

$$W_0 = \frac{e_0}{x} - \frac{e_1}{x^2} + \frac{e_2}{x^3} - \ldots = \sum (-1)^{i'} e_{i'} x^{-i'-1},$$

$$\psi_m(x) = \sum (-1)^{m-i} K_i^{(m)} x^i,$$

$$(i' = 0,\ 1,\ 2, \ldots;\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots m),$$

nous trouverons

$$\theta_m(x) = \left[g_m \sum\sum\sum\sum (-1)^{i_,+i_{,,}+m-i+i'} (i_,, i_{,,})\, e_{i'} K_i^{(m)} x^{i_,} z^{i+i_{,,}-i'-1} \right]_z$$
$$+ \left[\sum\sum\sum (-1)^{i_,+i_{,,}+i'} (i_,, i_{,,})\, e_{i'}\, \theta_m(z)\, x^{i_,} z^{i_{,,}-i'-1} \right]_z.$$

Mais en représentant les coefficients du polynôme cherché $\theta_m(z)$ sous la forme

$$(-1)^{m-1} g_m Y_{m-1},\ (-1)^{m-2} g_m Y_{m-2}, \ldots,\ (-1)^0 g_m Y_0,$$

nous avons

$$(27) \qquad \theta_m(x) = g_m \sum (-1)^\eta Y_\eta x^\eta, \quad (\eta = 0,\ 1,\ 2, \ldots m-1),$$

ce qui, porté dans l'équation précédente, donne

$$\sum (-1)^\eta Y_\eta x^\eta =$$
$$= \left[\sum\sum\sum\sum (-1)^{i_,+i_{,,}+m-i+i'} (i_,, i_{,,})\, e_{i'} K_i^{(m)} x^{i_,} z^{i+i_{,,}-i'-1} \right]_z$$
$$+ \left[\sum\sum\sum\sum (-1)^{i_,+i_{,,}+\eta+i'} (i_,, i_{,,})\, e_{i'} Y_\eta x^{i_,} z^{\eta+i_{,,}-i'-1} \right]_z.$$

Pour trouver les valeurs des termes du second membre de cette égalité, nous observons que dans les sommes contenues sous les signes $[\ ]_z$ les termes en $\frac{1}{z}$ qui en déterminent les valeurs s'obtiennent dans la première somme

$$\sum\sum\sum\sum (-1)^{i_,+i_{,,}+m-i+i'} (i_,, i_{,,})\, e_{i'} K_i^{(m)} x^{i_,} z^{i+i_{,,}-i'-1}$$

pour $i' = i + i_{,,}$ et dans la seconde

$$\sum\sum\sum\sum (-1)^{i_,+i_{,,}+\eta+i'} (i_,, i_{,,})\, e_{i'} Y_\eta x^{i_,} z^{\eta+i_{,,}-i'-1}$$

pour $i' = \eta + i_{,,}$. Mais en écartant tous les termes pour lesquels ces relations n'ont pas lieu, nous trouvons que la formule que nous considérons se réduit à

$$\sum (-1)^\eta Y_\eta x^\eta = \sum\sum\sum (-1)^{m+i_,} (i_,, i_{,,})\, e_{i+i_{,,}} K_i^{(m)} x^{i_,}$$
$$+ \sum\sum\sum (-1)^{i_,} (i_,, i_{,,})\, e_{\eta+i_{,,}} Y_\eta x^{i_,}.$$

Les deux membres de cette formule sont des polynômes en x du degré $m-1$ qui doivent être identiques. En déterminant les termes en

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ldots x,\ x^0$$

dans les deux polynômes et en égalant entre eux les coefficients des puissances égales, nous obtenons les m équations suivantes

$$(28)\quad \begin{cases} Y_{m-1}=(-1)^m\sum\sum(m-1,i_{,,})\,e_{i+i_{,,}}\,K_i^{(m)}+\sum\sum(m-1,i_{,,})\,e_{\eta+i_{,,}}\,Y_\eta, \\ Y_{m-2}=(-1)^m\sum\sum(m-2,i_{,,})\,e_{i+i_{,,}}\,K_i^{(m)}+\sum\sum(m-2,i_{,,})\,e_{\eta+i_{,,}}\,Y_\eta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_1=(-1)^m\sum\sum(1,i_{,,})\,e_{i+i_{,,}}\,K_i^{(m)}+\sum\sum(1,i_{,,})\,e_{\eta+i_{,,}}\,Y_\eta, \\ Y_0=(-1)^m\sum\sum(0,i_{,,})\,e_{i+i_{,,}}\,K_i^{(m)}+\sum\sum(0,i_{,,})\,e_{\eta+i_{,,}}\,Y_\eta, \end{cases}$$

qui déterminent toutes les m inconnues

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2},\ldots Y_1,\ Y_0,$$

qui, d'après (27), figurent dans l'expression du polynôme cherché $\theta_m(x)$.

On voit d'après la composition de ces équations que si

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots e_{2m-1}$$

sont infiniment petits, les quantités

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2},\ldots Y_1,\ Y_0$$

auront également des valeurs infiniment petites dont l'ordre par rapport à

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots e_{2m-1}$$

ne sera pas inférieur à un; donc pour ces valeurs de

$$e_0,\ e_1,\ldots e_{2m-1}$$

les dimensions des derniers termes dans les équations précédentes ne seront pas inférieures à deux; par conséquent, en les écartant, nous obtiendrons de (28) ces expressions, exactes jusqu'aux termes du premier degré en

$$e_0,\ e_1,\ldots e_{2m-1}$$

inclusivement:

$$Y_{m-1} = (-1)^m \sum\sum (m-1, i_{,,})\, e_{i+i_{,,}} K_i^{(m)},$$

$$Y_{m-2} = (-1)^m \sum\sum (m-2, i_{,,})\, e_{i+i_{,,}} K_i^{(m)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Y_1 = (-1)^m \sum\sum (1, i_{,,})\, e_{i+i_{,,}} K_i^{(m)},$$

$$Y_0 = (-1)^m \sum\sum (0, i_{,,})\, e_{i+i_{,,}} K_i^{(m)}.$$

En portant ensuite ces valeurs approchées de

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2}, \dots Y_1,\ Y_0$$

dans les derniers termes des équations (28), nous obtenons pour exprimer ces inconnues des formules exactes jusqu'aux termes du deuxième ordre.

En poursuivant ces substitutions, nous pouvons trouver les expressions de

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2}, \dots Y_1,\ Y_0$$

exactes jusqu'à tel degré que nous voudrons.

§ 9. Mais au lieu de nous y arrêter, nous allons montrer à présent comment on pourra obtenir une limite supérieure des erreurs provenant de la suppression des derniers termes dans les équations (28), pourvu que les quantités

$$e_0,\ e_1,\ e_2, \dots e_{2m-1}$$

ne dépassent pas certaines limites, qui, comme nous le verrons, s'obtiennent aisément dans chaque cas particulier.

En désignant les valeurs absolues des sommes

$$\sum\sum (n, i_{,,})\, e_{i+i_{,,}} K_i^{(m)},\quad \sum\sum (n, i_{,,})\, e_{\eta+i_{,,}} Y_\eta$$

pour n quelconque par

$$T_n,\ U_n,$$

les valeurs absolues des inconnues

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2}, \dots Y_1,\ Y_0$$

par

$$M_{m-1},\ M_{m-2}, \dots M_1,\ M_0,$$

par M la limite supérieure de ces dernières quantités et par

$$Y_\nu$$

celle des inconnues

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2}, \dots Y_1,\ Y_0,$$

dont la valeur absolue atteint la limite M, nous observons que l'égalité

$$Y_\nu = (-1)^m \sum\sum (\nu, i_{,,}) e_{i+i_{,,}} K_i^{(m)} + \sum\sum (\nu, i_{,,}) e_{\eta+i_{,,}} Y_\eta,$$

que l'on obtient de (28), ne peut avoir lieu que si

(29) $$M \leqq T_\nu + U_\nu.$$

Comme, d'après le § 8, l'on a

$$(n, i_{,,}) \geqq 0,$$

la valeur absolue de la somme

$$\sum\sum (n, i_{,,}) e_{\eta+i_{,,}} Y_\eta$$

ne diminuera pas, si nous y mettons à la place de $e_{\eta+i_{,,}}$ sa valeur absolue et à la place de Y_η la quantité M, qui représente d'après nos notations la limite supérieure des valeurs absolues des inconnues

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2}, \ldots Y_1,\ Y_0.$$

Par conséquent nous avons

(30) $$U_n \leqq S_n M,$$

en désignant par S_n la somme

$$\sum\sum \pm (n, i_{,,}) e_{\eta+i_{,,}},$$

que l'on obtient lorsque des deux signes $\pm$ l'on garde celui pour lequel on a $\pm e_{\eta+i_{,,}} > 0$.

D'après cela, en désignant par

$$S,\ T$$

les limites supérieures de

$$S_{m-1},\ S_{m-1}, \ldots S_1,\ S_0,$$
$$T_{m-1},\ T_{m-2}, \ldots T_1,\ T_0,$$

nous avons

$$U_\nu \leqq SM; \quad T_\nu \leqq T;$$

ce qui donne d'après (29)

$$M \leqq T + SM.$$

De cette formule pour

$$S < 1$$

il vient

(31) $$M \leqq \frac{T}{1-S},$$

ce qui, d'après la signification de M, détermine la limite supérieure des valeurs absolues des inconnues

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2},\ldots Y_1,\ Y_0.$$

Quant à l'inégalité

$$S < 1,$$

dont, comme on l'a vu, nous avons supposé l'existence en déterminant la limite supérieure M, et où S est la limite supérieure des quantités

$$S_{m-1},\ S_{m-2},\ldots S_1,\ S_0,$$

cette inégalité aura lieu si les quantités

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots$$

ne dépassent pas les limites pour lesquelles

$$S_{m-1} < 1,\ S_{m-2} < 1,\ldots S_1 < 1,\ S_0 < 1.$$

Quant à ces dernières limites, elles peuvent être trouvées dans chaque cas particulier, puisque les sommes

$$S_{m-1},\ S_{m-2},\ldots S_1,\ S_0$$

s'annulent évidemment pour

$$e_0 = 0,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0,\ldots,\ e_{2m-1} = 0.$$

En supposant que les quantités $e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots$ ne dépassent pas ces limites nous aurons

$$M \leqq \frac{T}{1-S};$$

d'où l'on trouve d'après (30)

(32) $$U_n \leqq \frac{S_n T}{1-S}.$$

Comme d'après nos notations U_n désigne la valeur absolue de la somme

$$\sum\sum (n,\ i_{,,})\, e_{\eta+i_{,,}}\, Y_\eta,$$

cette somme sera contenue entre

$$-U_n,\ +U_n,$$

et par suite, d'après (32), entre

$$-\frac{S_n T}{1-S},\quad +\frac{S_n T}{1-S}.$$

Cela montre que l'équation

$$(33)\qquad Y_n = (-1)^m \sum\sum (n, i_{,,})\, e_{i+i_{,,}}\, K_i^{(m)} + \sum\sum (n, i_{,,})\, e_{\eta+i_{,,}}\, Y_\eta,$$

que l'on obtient de (28), donne

$$Y_n = (-1)^m \sum\sum (n, i_{,,})\, e_{i+i_{,,}}\, K_i^{(m)}$$

à

$$\pm \frac{S_n T}{1-S}$$

près. En posant successivement

$$n = m-1,\ m-2, \ldots 1,\ 0,$$

nous trouverons ainsi, pourvu que

$$e_0,\ e_1,\ e_2, \ldots$$

satisfassent à l'inégalité

$$S < 1,$$

les valeurs approchées des inconnues

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2}, \ldots Y_1,\ Y_0$$

et les limites de leurs erreurs. Nous concluons de là que sous cette condition l'on pourra satisfaire aux équations (28) par des valeurs finies de

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2}, \ldots Y_1,\ Y_0,$$

et que par suite, d'après le § 2, on pourra déterminer le polynôme

$$\Psi_m(x)$$

du degré m tel que la fraction

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)},$$

Ω_m étant convenablement choisi, représente la fonction

$$W - W_0 = \frac{c_0 - e_0}{x} + \frac{c_1 + e_1}{x^2} + \frac{c_2 - e_2}{x^3} + \ldots$$

jusqu'au terme en $\frac{1}{x^{2m}}$ inclusivement.

Cela montre que

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

sera une des réduites de cette expression; par suite, si

$$S < 1,$$

il doit se trouver dans la série de ces réduites une fraction dont le dénominateur sera du degré m.

§ 10. Nous allons nous occuper maintenant de l'application des formules obtenues au cas où les quantités

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\dots e_{2m-1}$$

sont renfermées entre les limites

$$-\frac{1}{H_0},\quad -\frac{h}{H_0},\quad -\frac{h^2}{H_0},\dots,\quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$+\frac{1}{H_0},\quad +\frac{h}{H_0},\quad +\frac{h^2}{H_0},\dots,\quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

H, h étant positifs. Nous admettrons que la condition

$$S<1$$

soit satisfaite, ce qui exige, comme nous le verrons, que la quantité H_0 ne soit pas inférieure à une certaine limite qui sera indiquée plus loin.

Comme, d'après le § 8, les quantités

$$(n,\ i_{\prime\prime}),\quad K_i^{(m)}$$

ne sont pas plus petites que 0, le maximum de la valeur absolue de la somme

$$\sum\sum (n,\ i_{\prime\prime})\, e_{i+i_{\prime\prime}}\, K_i^{(m)}$$

lorsque

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\dots e_{2m-1},$$

ne dépassent pas les limites

$$-\frac{1}{H_0},\quad -\frac{h}{H_0},\quad -\frac{h^2}{H_0},\dots,\quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$+\frac{1}{H_0},\quad +\frac{h}{H_0},\quad +\frac{h^2}{H_0},\dots,\quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

s'obtiendra pour

$$e_0=\frac{1}{H_0},\quad e_1=\frac{h}{H_0},\quad e_2=\frac{h^2}{H_0},\dots,\quad e_{2m-1}=\frac{h^{2m-1}}{H_0};$$

nous aurons donc d'après le § 9

$$T_n \leqq \sum\sum (n,\ i_{\prime\prime})\,\frac{h^{i+i_{\prime\prime}}}{H_0}\, K_i^{(m)},$$

ce qui donne

(34) $$T_n \leqq \frac{1}{H_0}\sum K_i^{(m)} h^i . \sum (n,\ i_{\prime\prime})\, h^{i_{\prime\prime}}.$$

Pour trouver la somme

$$\sum K_i^{(m)} h^i$$

observons que de l'équation (25) on obtient pour $n=m$, $x=-h$

$$\psi_m(-h)=(-1)^m \sum K_i^{(m)} h^i;$$

d'où il vient

$$\sum K_i^{(m)} h^i = (-1)^m \psi_m(-h).$$

Pour trouver la somme

$$\sum (n, i_{,,}) h^{i_{,,}},$$

posons $z = -h$ dans l'équation (7) et portons dans l'égalité résultante

$$\Phi_m(x, -h) = \alpha_1 \psi_0(-h) \psi_0(x) + \alpha_2 \psi_1(-h) \psi_1(x) + \ldots + \alpha_m \psi_{m-1}(-h) \psi_{m-1}(x)$$

les expressions (25) des fonctions

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x), \ldots \psi_{m-1}(x).$$

Nous trouvons ainsi

(35) $$\Phi_m(x, -h) = (-1)^{m-1} [L_{m-1}^{(m)} x^{m-1} - L_{m-2}^{(m)} x^{m-2} + L_{m-3}^{(m)} x^{m-3} - \ldots],$$

où l'on a posé pour abréger

(36) $$\begin{cases} L_{m-1}^{(m)} = (-1)^{m-1} \alpha_m \psi_{m-1}(-h) K_{m-1}^{(m-1)}, \\ L_{m-2}^{(m)} = (-1)^{m-1} [\alpha_m \psi_{m-1}(-h) K_{m-2}^{(m-1)} - \alpha_{m-1} \psi_{m-2}(-h) K_{m-2}^{(m-2)}], \\ L_{m-3}^{(m)} = (-1)^{m-1} [\alpha_m \psi_{m-1}(-h) K_{m-3}^{(m-1)} - \alpha_{m-1} \psi_{m-2}(-h) K_{m-3}^{(m-2)} \\ \qquad\qquad + \alpha_{m-2} \psi_{m-3}(-h) K_{m-3}^{(m-3)}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En observant que cette expression de la fonction $\Phi_m(x, -h)$ doit être identique à

$$\Phi_m(x, -h) = \sum \sum (-1)^{i_, + i_{,,}} (i_,, i_{,,}) (-h)^{i_{,,}} x^{i_,},$$

que l'on obtient de (26) pour $z = -h$, et que x^n entre dans ces expressions avec les coefficients

$$(-1)^n L_n^{(m)},\ (-1)^n \sum (n, i_{,,}) h^{i_{,,}},$$

nous obtenons l'égalité

(37) $$L_n^{(m)} = \sum (n, i_{,,}) h^{i_{,,}}.$$

En portant dans l'inégalité (34) les expressions qu'on vient de trouver pour les sommes

$$\sum K_i^{(m)} h^i,\quad \sum (n, i_{,,}) h^{i_{,,}},$$

nous obtenons

(38) $$T_n \leqq (-1)^m \psi_m(-h) \frac{L_n^{(m)}}{H_0};$$

d'où nous déduisons à fortiori

(38)bis $$T_n \leqq (-1)^m \psi_m(-h) \frac{L^{(m)}}{H_0},$$

en désignant par $L^{(m)}$ la limite supérieure des quantités

$$L_{m-1}^{(m)},\ L_{m-2}^{(m)}, \ldots L_1^{(m)},\ L_0^{(m)}.$$

En passant à la recherche du maximum de la somme

$$\sum\sum \pm (n, i_{,,})\, e_{\eta+i_{,,}}$$

dans le cas où

$$e_0,\ e_1,\ e_2, \ldots e_{2m-1}$$

ne sortent pas des limites

$$-\frac{1}{H_0},\quad -\frac{h}{H_0},\quad -\frac{h^2}{H_0}, \ldots,\quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$+\frac{1}{H_0},\quad +\frac{h}{H_0},\quad +\frac{h^2}{H_0}, \ldots,\quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0}$$

et où tous les termes de la somme sont pris avec les signes qui rendent leurs valeurs positives, remarquons que ce maximum s'obtient pour

$$e_0 = \frac{1}{H_0},\quad e_1 = \frac{h}{H_0},\quad e_2 = \frac{h^2}{H_0}, \ldots e_{2m-1} = \frac{h^{2m-1}}{H_0}$$

tous les signes étant $+$. Il s'ensuit que la quantité que nous avons désignée par S ne dépassera pas la somme

$$\sum\sum (n, i_{,,}) \frac{h^{\eta+i_{,,}}}{H_0},$$

et que par conséquent

$$S_n \leqq \frac{1}{H_0} \sum (n, i_{,,})\, h^{i_{,,}} \sum h^{\eta}.$$

Comme on a

$$\sum h^{\eta} = h^{m-1} + h^{m-2} + \ldots + h + h^0 = \frac{h^m - 1}{h - 1}$$

et que d'après (37)

$$\sum (n, i_{,,})\, h^{i_{,,}} = L_n^{(m)},$$

cette inégalité donne

(39) $$S_n \leqq \frac{L_n^{(m)}}{H_0} \frac{h^m - 1}{h - 1};$$

d'où, pour

$$n = m-1,\ m-2, \ldots 1,\ 0,$$

on obtient

$$S_{m-1} \leqq \frac{L_{m-1}^{(m)}}{H_0} \frac{h^m-1}{h-1},\quad S_{m-2} \leqq \frac{L_{m-2}^{(m)}}{H_0} \frac{h^m-1}{h-1}, \ldots\quad S_1 \leqq \frac{L_1^{(m)}}{H_0} \frac{h^m-1}{h-1},\quad S_0 \leqq \frac{L_0^{(m)}}{H_0} \frac{h^m-1}{h-1}.$$

Ces formules montrent que S, la plus grande des quantités

$$S_{m-1},\ S_{m-2}, \ldots S_1,\ S_0,$$

ne surpassera pas

$$\frac{L^{(m)}}{H_0}\,\frac{h^m-1}{h-1},$$

puisque d'après nos notations $L^{(m)}$ est la limite supérieure des quantités

$$L^{(m)}_{m-1},\ L^{(m)}_{m-2}, \ldots L_1^{(m)},\ L_0^{(m)}.$$

On a donc

(40) $$S \leqq \frac{L^{(m)}}{H_0}\,\frac{h^m-1}{h-1}.$$

On voit d'après cette formule que la condition

(41) $$S < 1,$$

dont il a été question plus haut, sera satisfaite si l'on a

(42) $$H_0 > L^{(m)}\,\frac{h^m-1}{h-1}.$$

Dans la discussion du cas qui nous occupe nous nous bornerons aux valeurs de H_0 qui satisfont à cette inégalité; nous aurons donc

$$S < 1.$$

§ 11. D'après le § 9, si l'on a

$$S < 1,$$

la limite supérieure des valeurs absolues des inconnues

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2}, \ldots Y_1,\ Y_0,$$

que nous avons désignée par M, satisfait à l'inégalité

$$M \leqq \frac{T}{1-S}.$$

En observant que cette inégalité n'est pas alterée lorsqu'on y remplace

$$T,\ S$$

par les quantités

$$(-1)^m\,\psi_m(-h)\,\frac{L^{(m)}}{H_0},\quad \frac{L^{(m)}}{H_0}\,\frac{h^m-1}{h-1},$$

qui, d'après $(38)^{\text{bis}}$, (40), ne peuvent pas être inférieures à T, S, nous en obtenons par cette substitution

$$M \leqq \frac{(-1)^m\,\psi_m(-h)\,L^{(m)}}{H_0-\frac{h^m-1}{h-1}\,L^{(m)}};$$

de là nous trouvons par (39)

$$S_n M \leq \frac{(-1)^m L^{(m)} L_n^{(m)} \psi_m(-h) \frac{h^m-1}{h-1}}{H_0\left(H_0 - \frac{h^m-1}{h-1} L^{(m)}\right)};$$

et d'après (30)

$$U_n \leq \frac{(-1)^m L^{(m)} L_n^{(m)} \psi_m(-h) \frac{h^m-1}{h-1}}{H_0\left(H_0 - \frac{h^m-1}{h-1} L^{(m)}\right)},$$

où U_n est, d'après nos notations (§ 9), la valeur absolue de la somme

$$\sum \sum (n, i_{,,}) e_{\eta+i_{,,}} Y_\eta.$$

En vertu de cette relation et de l'inégalité (38), d'après laquelle T_n, valeur absolue de la somme

$$\sum \sum (n, i_{,,}) e_{i+i_{,,}} K_i^{(m)},$$

ne dépasse pas

$$(-1)^m \psi_m(-h) \frac{L_n^{(m)}}{H_0},$$

nous concluons de l'équation (33) que la valeur absolue de Y_n ne dépasse pas la somme

$$\frac{(-1)^m L^{(m)} L_n^{(m)} \psi_m(-h) \frac{h^m-1}{h-1}}{H_0\left(H_0 - \frac{h^m-1}{h-1} L^{(m)}\right)} + (-1)^m \psi_m(-h) \frac{L_n^{(m)}}{H_0},$$

qui est égale à

$$\frac{(-1)^m \psi_m(-h) L_n^{(m)}}{H_0 - \frac{h^m-1}{h-1} L^{(m)}}.$$

Il s'ensuit que Y_n est contenue entre les limites suivantes

$$(43) \qquad -\frac{\psi_m(-h) L_n^{(m)}}{H_0 - \frac{h^m-1}{h-1} L^{(m)}}, \quad +\frac{\psi_m(-h) L_n^{(m)}}{H_0 - \frac{h^m-1}{h-1} L^{(m)}}.$$

En posant dans ces formules

$$n = m-1, \ m-2, \ldots 1, \ 0,$$

nous trouverons les limites entre lesquelles sont contenues les valeurs de toutes les m inconnues

$$Y_{m-1}, \ Y_{m-2}, \ldots Y_1, \ Y_0,$$

qui entrent dans les équations (28); d'où nous concluons que, la condition

$$S < 1$$

étant supposée satisfaite, les équations (28) auront dans le cas que nous traitons des solutions finies, et que par conséquent on pourra trouver le polynôme

$$\Psi_m(x) = g_m\, \psi_m(x) + \theta_m(x) =$$
$$= g_m\, [\psi_m(x) - (-1)^m (Y_{m-1}\, x^{m-1} - Y_{m-2}\, x^{m-2} + \ldots)]$$

du degré m, pour lequel la fraction

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)},$$

$\Omega_m(x)$ étant convenablement choisi, donne l'expression de

$$W - W_0$$

exacte jusqu'aux termes en $\frac{1}{x^{2m}}$ inclusivement. En observant que pour que cela soit ainsi, la fraction

$$\frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

doit avoir son égale dans la série des fractions réduites

$$\frac{P_1}{Q_1},\quad \frac{P_2}{Q_2},\quad \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$$

de l'expression $W - W_0$, obtenues par son développement en fraction continue, nous concluons que si H_0 satisfait à l'inégalité (42), il doit se trouver dans cette série une fraction dont le dénominateur est du degré m.

En répétant les mêmes raisonnements, après avoir remplacé m par les nombres

$$m-1,\; m-2, \ldots 1,$$

nous arrivons à la conclusion que dans la série

$$\frac{P_1}{Q_1},\quad \frac{P_2}{Q_2},\quad \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$$

des réduites de l'expression $W - W_0$ se trouvent nécessairement des fractions dont les dénominateurs sont des degrés

$$m,\; m-1,\; m-2, \ldots 1,$$

si H_0 satisfait aux inégalités

$$(44) \quad H_0 > L^{(m)} \frac{h^m - 1}{h-1},\; H_0 > L^{(m-1)} \frac{h^{m-1} - 1}{h-1}, \ldots,\; H_0 > L^{(1)} \frac{h-1}{h-1},$$

où, d'après notre notation,

$$L^{(m)},\; L^{(m-1)}, \ldots,\; L^{(1)}$$

sont les limites supérieures des quantités

$$L_n^{(m)},\; L_n^{(m-1)}, \ldots,\; L_n^{(1)},$$

que nous obtenons des équations (36), en les laissant d'abord sous leur forme actuelle et en remplaçant ensuite le nombre m par $m-1$, $m-2 \ldots 1$.

Puisque ces équations, en y remplaçant m par μ, $\mu - 1$, donnent

$$L_n^{(\mu)} = (-1)^{\mu-1} [\alpha_\mu \psi_{\mu-1}(-h) K_n^{(\mu-1)} - \alpha_{\mu-1} \psi_{\mu-2}(-h) K_n^{(\mu-2)} + \ldots],$$
$$L_n^{(\mu-1)} = (-1)^{\mu-2} [\alpha_{\mu-1} \psi_{\mu-2}(-h) K_n^{(\mu-2)} - \alpha_{\mu-2} \psi_{\mu-3}(-h) K_n^{(\mu-2)} + \ldots],$$

il en vient

$$L_n^{(\mu)} = L_n^{(\mu-1)} + (-1)^{\mu-1} \alpha_\mu \psi_{\mu-1}(-h) K_n^{(\mu-1)}.$$

Mais en observant, d'après (1), (2), que

$$\alpha_\mu > 0, \ (-1)^{\mu-1} \psi_{\mu-1}(-h) > 0,$$

nous déduisons de cette égalité

$$L_n^{(\mu)} > L_n^{(\mu-1)}.$$

Il en suit que $L^{(\mu)}$, limite supérieure des quantités

$$L_{\mu-1}^{(\mu)}, L_{\mu-2}^{(\mu)}, \ldots, L_0^{(\mu)},$$

ne peut pas être plus petite que $L^{(\mu-1)}$, limite supérieure des quantités

$$L_{\mu-2}^{(\mu-1)}, L_{\mu-3}^{(\mu-1)}, \ldots, L_0^{(\mu-1)},$$

et que par conséquent on aura

$$L^{(\mu)} \geq L^{(\mu-1)}.$$

De là et considérant que

$$\frac{h^\mu - 1}{h-1} = \frac{h^{\mu-1} - 1}{h-1} + h^{\mu-1} > \frac{h^{\mu-1} - 1}{h-1},$$

nous trouvons

$$L^{(\mu)} \frac{h^\mu - 1}{h-1} > L^{(\mu-1)} \frac{h^{\mu-1} - 1}{h-1}.$$

D'après cela les seconds membres des inégalités (44) forment une série décroissante; donc toutes ces inégalités seront satisfaites lorsque H_0 satisfait à la première d'entre elles

$$H_0 > L^{(m)} \frac{h^m - 1}{h-1},$$

et par conséquent, d'après ce qui précède, il doit se trouver pour cette valeur de H_0 des fractions aux dénominateurs des degrés

$$m, \ m-1, \ldots, 1$$

dans la série des réduites de l'expression

$$W - W_0,$$

tirées du développement

$$W - W_0 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3} - \ldots.$$

En remarquant que cela n'est possible que si

$$q_1, q_2, \ldots, q_m$$

sont du premier degré, nous en concluons que dans le cas que nous considérons, H_0 satisfaisant à l'inégalité (42), la fraction continue provenant du développement de l'expression

$$W - W_0,$$

sera de la forme

$$\frac{1}{\rho_1 x + \sigma_1} - \frac{1}{\rho_2 x + \sigma_2} - \ldots - \frac{1}{\rho_m x + \sigma_m} - \ldots.$$

Comme elle doit conserver cette forme pour toutes les variations de l'expression $W - W_0$ qui laissent subsister l'inégalité (41), les coefficients

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

ne peuvent ni s'annuler ni devenir infinies, tant que l'inégalité (41) reste satisfaite; par suite, étant des fonctions rationnelles des coefficients de l'expression $W - W_0$, ils ne peuvent pas changer de signe tant que H_0 ne dépasse pas la limite assignée par l'inégalité (41).

En remarquant que pour

$$H_0 = \infty$$

on obtient, d'après le § 10,

$$W_0 = 0, \quad W - W_0 = W,$$

et que par conséquent la fraction

$$\frac{1}{\rho_1 x + \sigma_1} - \frac{1}{\rho_2 x + \sigma_2} - \ldots - \frac{1}{\rho_m x + \sigma_m} + \ldots.$$

se transforme en

$$\frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} - \ldots,$$

où, d'après (1), l'on a

$$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_m > 0,$$

on voit de ce qui précède que, dans les suppositions que nous avons faites, les coefficients

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

auront des valeurs positives.

§ 12. Nous avons ainsi établi que lorsque

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots,\ e_{2m-1}$$

ne dépassent pas les limites

$$-\frac{1}{H_0},\quad -\frac{h}{H_0},\quad -\frac{h^2}{H_0},\ldots\quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$+\frac{1}{H_0},\quad +\frac{h}{H_0},\quad +\frac{h^2}{H_0},\ldots\quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0}$$

et qu'on admet

$$H_0 > L^{(m)}\frac{h^m-1}{h-1},$$

la série

$$W-W_0=\frac{c_0-e_0}{x}+\frac{c_1+e_1}{x^2}+\frac{c_2-e_2}{x^3}+\ldots$$

se laisse développer en la fraction continue

$$\cfrac{1}{\rho_1 x+\sigma_1-\cfrac{1}{\rho_2 x+\sigma_2-\ldots-\cfrac{1}{\rho_m x+\sigma_m-\ldots}}},$$

où

$$\rho_1>0,\ \rho_2>0,\ldots,\ \rho_m>0;$$

donc en désignant par

$$\frac{\Omega_1(x)}{\Psi_1(x)},\quad \frac{\Omega_2(x)}{\Psi_2(x)},\ldots,\quad \frac{\Omega_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

les réduites, nous voyons, d'après ce qui a été dit au § 1 sur les fractions continues de cette forme, que toutes les racines des équations

$$\Psi_1(x)=0,\ \Psi_2(x)=0,\ldots,\ \Psi_m(x)=0$$

ont des valeurs réelles et que ces valeurs sont toutes positives si l'équation

$$\Psi_m(x)=0$$

n'a pas de racine négative. Pour trouver la condition sous laquelle cette dernière circonstance a lieu, observons que l'équation

$$\Psi_m(x)=0$$

se réduit en vertu de (4) et (27) à celle-ci

$$\psi_m(x)+\sum(-1)^\eta\, Y_\eta\, x^\eta=0,$$

le coefficient

$$Y_\eta$$

étant, d'après (43), pour $\eta=n$ contenu entre les limites

$$-\frac{\psi_m(-h)\,L_n^{(m)}}{H_0-\frac{h^m-1}{h-1}L^{(m)}},\quad +\frac{\psi_m(-h)\,L_n^{(m)}}{H_0-\frac{h^m-1}{h-1}L^{(m)}}.$$

De là et considérant que d'après (35), (10) on a

$$\Phi_m(x, -h) = (-1)^{m-1}\,[L_{m-1}^{(m)}\,x^{m-1} - L_{m-2}^{(m)}\,x^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}\,L_0^{(m)}],$$

$$\Phi_m(x, -h) = \frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h},$$

nous arrivons à la conclusion que dans la somme

$$\sum (-1)^{\eta}\,Y_{\eta}\,x^{\eta}$$

les coefficients des différentes puissances de x sont contenus entre les coefficients des puissances correspondantes de x dans les fonctions

$$-\frac{\psi_m(-h)}{H_0 - \frac{h^m - 1}{h-1}\,L^{(m)}}\;\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h},$$

$$+\frac{\psi_m(-h)}{H_0 - \frac{h^m - 1}{h-1}\,L^{(m)}}\;\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h}.$$

En comparant ces fonctions avec la fonction

$$\frac{\psi_m(-h)}{H - H_m}\;\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h},$$

qui figure dans l'équation (23), et en observant que l'inégalité (24) dont le second membre est < 0 est satisfaite, si

$$\frac{1}{H - H_m}$$

ne sort pas des limites

$$-\frac{\psi_m(0)}{\psi_m(-h)}\;\frac{h}{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)},$$

$$+\frac{\psi_m(0)}{\psi_m(-h)}\;\frac{h}{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)},$$

nous concluons, d'après le § 7, que si

$$+\frac{1}{H_0 - \frac{h^m - 1}{h-1}\,L^{(m)}}, \qquad -\frac{1}{H_0 - \frac{h^m - 1}{h-1}\,L^{(m)}},$$

ne dépassent pas les limites

$$-\frac{\psi_m(0)}{\psi_m(-h)}\;\frac{h}{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)},$$

$$+\frac{\psi_m(0)}{\psi_m(-h)}\;\frac{h}{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)},$$

l'équation

$$\psi_m(x) + \sum (-1)^{\eta}\,Y_{\eta}\,x^{\eta} = 0$$

ne contiendra que des variations des signes et par suite ne pourra pas avoir de racines négatives.

Comme les quantités

$$+\frac{1}{H_0-\frac{h^m-1}{h-1}L^{(m)}}, \quad -\frac{1}{H_0-\frac{h^m-1}{h-1}L^{(m)}}$$

ne dépassent pas les limites indiquées ci-dessus pour

$$H_0>\frac{h^m-1}{h-1}L^{(m)}+\frac{\psi_m(-h)}{\psi_m(0)}\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}{h},$$

et que d'après (10), (35) on a

$$\Phi_m(0,-h)=L_0^{(m)}=\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(0)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(0)}{h},$$

nous concluons que si H_0 est plus grand que la somme

$$\frac{h^m-1}{h-1}L^{(m)}+\frac{\psi_m(-h)}{\psi_m(0)}L_0^{(m)},$$

l'équation

$$\psi_m(x)+\sum(-1)^\eta\, Y_\eta\, x^\eta=0$$

n'aura pas de racines négatives et qu'alors, comme nous l'avons vu, les équations

$$\Psi_m(x)=0,\ \Psi_{m-1}(x)=0,\ldots,\ \Psi_1(x)=0.$$

n'auront pas non plus de racines négatives.

De là, ainsi que des résultats des paragraphes précédents, en posant

$$c_0-e_0=C_0,\ c_1+e_1=C_1,\ldots,\ c_{2m-1}+e_{2m-1}=C_{2m-1},$$

nous obtenons le théorème suivant.

Théorème.

Si la série

$$\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}-\ldots$$

est développable en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\cdots-\cfrac{1}{\alpha_m x+\beta_m-\cdots}}};$$

où l'on a

$$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ldots,\ \alpha_m>0,$$

et si toutes les racines des équations

$$\psi_1(x)=0,\ \psi_2(x)=0,\ldots,\ \psi_{m-1}(x)=0,\ \psi_m(x)=0,$$

formées avec les dénominateurs des m de ses réduites

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},\ldots,\ \frac{\varphi_{m-1}(x)}{\psi_{m-1}(x)},\ \frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)}$$

ont des valeurs positives, la même propriété avec le même nombre m a lieu pour la fraction continue provenant du développement de la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots,$$

et pour ses m premières réduites, lorsque les coefficients

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots,\ C_{2m-1}$$

ne dépassent pas les limites

$$c_0-\frac{1}{H_0},\quad c_1-\frac{h}{H_0},\quad c_2-\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad c_{2m-1}-\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

$$c_0+\frac{1}{H_0},\quad c_1+\frac{h}{H_0},\quad c_2+\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad c_{2m-1}+\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

où h est une quantité positive quelconque et H_0 une quantité positive plus grande que la somme

$$\frac{h^m-1}{h-1}\,L^{(m)}+\frac{\psi_m(-h)}{\psi_m(0)}\,L_0^{(m)},$$

dans laquelle $L^{(m)}$ est la limite supérieure des valeurs absolues des coefficients du polynôme

$$\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x)-\psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h},$$

et L_0^m en est le terme constant.

§ 13. En passant à l'étude des racines de l'équation

$$\Psi_m(x)=0, \tag{45}$$

lorsque dans la série

$$\frac{c_0-e_0}{x}+\frac{c_1+e_1}{x^2}+\frac{c_2-e_2}{x^3}+\ldots$$

les quantités

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots$$

sont complètement indépendantes entre elles, nous observons que d'après le § 12 cette équation se reduit à l'équation

$$\psi_m(x)+\sum(-1)^\eta\,Y_\eta\,x^\eta=0, \tag{46}$$

dont les coefficients

$$Y_{m-1},\ Y_{m-2},\ldots,\ Y_1,\ Y_0$$

sont déterminés par les équations (28). En posant dans ces équations

$$e_0=0,\ e_1=0,\ e_2=0,\ldots,\ e_{2m-1}=0,$$

nous trouvons

$$Y_{m-1}=0,\ Y_{m-2}=0,\ldots,\ Y_1=0,\ Y_0=0;$$

après quoi l'équation (46) se change en l'équation

$$\psi_m(x) = 0.$$

Il en suit que les racines de l'équation (46) sont des fonctions des quantités

$$e_0, e_1, e_2, \ldots e_{2m-1},$$

qui pour

$$e_0 = 0, \ e_1 = 0, \ e_2 = 0, \ldots, \ e_{2m-1} = 0$$

sont égales aux racines de l'équation

$$\psi_m(x) = 0.$$

En désignant par

$$x_1, x_2, \ldots x_l, \ldots x_m$$

les racines de cette dernière équation disposées dans l'ordre croissant, et par

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_l^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$$

les racines de l'équation (46) disposées de manière qu'on ait

$$x_1^{(0)} \leqq x_2^{(0)} \leqq \ldots \leqq x_l^{(0)} \leqq \ldots \leqq x_m^{(0)}$$

pour

$$e_0 = 0 \ e_1 = 0, \ e_2 = 0, \ldots, \ e_{2m-1} = 0,$$

nous aurons pour ces valeurs de $e_0, e_1, e_2 \ldots e_n$, d'après ce que nous avons vu plus haut,

$$x_1^{(0)} = x_1, \ x_2^{(0)} = x_2, \ldots x_l^{(0)} = x_l, \ldots, \ x_m^{(0)} = x_m.$$

D'après (3) et (28) tous les coefficients des fonctions

$$W_0, \ \theta_m(x)$$

s'annullent pour

$$e_0 = 0, \ e_1 = 0, \ e_2 = 0, \ldots$$

et l'on a

$$\frac{\partial W_0}{\partial e_i} = \frac{(-1)^i}{z^{i+1}}.$$

Par conséquent, en différentiant l'équation (9) suivant e_i et en posant

$$e_0 = 0, \ e_1 = 0, \ e_2 = 0, \ldots,$$

nous obtenons dans le voisinage de ces valeurs de $e_0, e_1, e_2 \ldots$

$$\frac{\partial \theta_m(x)}{\partial e_i} = (-1)^i g_m \left[\frac{\Phi_m(x, z)\, \psi_m(z)}{z^{i+1}}\right]_z.$$

En portant ici les expressions (27), (10) des fonctions

$$\theta_m(x), \quad \Phi_m(x, z)$$

et en divisant par g_m, nous trouvons

$$\frac{\partial \Sigma (-1)^\eta Y_\eta x^\eta}{\partial e_i} = (-1)^i \left[\frac{\psi_{m-1}(z)\,\psi_m(x) - \psi_m(z)\,\psi_{m-1}(x)}{(x-z)\, z^{i+1}}\, \psi_m(z) \right]_z,$$

ce qui pour

$$x = x_l,$$

x_l étant une racine de l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

donne

$$\frac{\partial \Sigma (-1)^\eta Y_\eta (x_l)^\eta}{\partial e_i} = (-1)^i \left[\frac{-\psi^2{}_m(z)\, \psi_{m-1}(x_l)}{(x_l - z)\, z^{i+1}} \right]_z;$$

d'où, en observant que Y_η s'annule pour $e_0 = 0$, $e_1 = 0$, $e_2 = 0 \ldots$, nous obtenons

$$(47) \qquad \sum (-1)^\eta \frac{\partial Y_\eta}{\partial e_i} (x_l)^\eta = (-1)^i\, \psi_{m-1}(x_l) \left[\frac{\psi^2{}_m(z)}{(z - x_l)\, z^{i+1}} \right]_z.$$

Puisque les racines

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_l, \ldots,\ x_m,$$

de l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

ont, d'après le § 1, des valeurs réelles et positives, les termes du polynôme

$$C^2 (z - x_1)^2 \ldots (z - x_l) \ldots (z - x_m)^2,$$

auquel se réduit la fraction

$$\frac{\psi^2{}_m(z)}{z - x_l} = \frac{C^2 (z - x_1)^2 (z - x_2)^2 \ldots (z - x_l)^2 \ldots (z - x_m)^2}{z - x_l},$$

ont alternativement les signes + et —. Si nous observons que le premier terme $C^2 z^{2m-1}$ a un coefficient positif, nous trouverons que le coefficient de z^i sera représenté par la formule

$$-(-1)^i K,$$

où

$$K > 0.$$

Par conséquent il vient

$$\left[\frac{\psi^2{}_m(z)}{(z - x_l)\, z^{i+1}} \right]_z = -(-1)^i K,$$

et l'équation (47) donne

$$(48) \qquad \sum (-1)^\eta \frac{\partial Y_\eta}{\partial e_i} (x_l)^\eta = -K \psi_{m-1}(x_l).$$

Cette égalité aura lieu pour

$$x_l = x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m,$$

qui sont racines de l'équation

$$\psi_m(x) = 0;$$

tandis que pour les racines de l'équation (46) que nous avons désignées par

$$x_l^{(0)},$$

nous aurons

$$\psi_m(x_l^{(0)}) + \sum (-1)^\eta\, Y_\eta\, (x_l^{(0)})^\eta = 0;$$

d'où nous obtenons, en différentiant par rapport à e_i

$$\psi'_m(x_l^{(0)}) \frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i} + \sum (-1)^\eta \frac{\partial Y_\eta}{\partial e_i} (x_l^{(0)})^\eta + \sum (-1)^\eta\, \eta Y_\eta (x_l^{(0)})^{\eta-1} \frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i} = 0.$$

En appliquant cette équation au cas, où

$$e_0 = 0,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0, \ldots,$$

et en observant qu'on a ici, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$Y_{m-1} = 0,\ Y_{m-2} = 0, \ldots,\ Y_1 = 0,\ Y_0 = 0,\ x_l^{(0)} = x_l,$$

nous trouvons que dans le voisinagé de

$$e_0 = 0\ \ e_1 = 0,\ e_2 = 0, \ldots$$

aura lieu l'égalité

$$\psi'_m(x_l) \frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i} + \sum (-1)^\eta \frac{\partial Y_\eta}{\partial e_i} (x_l)^\eta = 0,$$

d'où il suit

$$\frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i} = - \frac{\Sigma (-1)^\eta \frac{\partial Y_\eta}{\partial e_i} (x_l)^\eta}{\psi'_m(x_l)},$$

ce qui, d'après (48), donne

(49) $$\frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i} = K \frac{\psi_{m-1}(x_l)}{\psi'_m(x_l)}.$$

Cette relation détermine la valeur de la dérivée

$$\frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i}$$

dans le voisinage de

$$e_0 = 0,\ e_1 = 0_1\ e_2 = 0 \ldots,$$

et il est aisé de montrer que dans le cas considéré on en obtient

$$\frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i} > 0.$$

En effet, de ce que nous avons montré au § 1 relativement aux équations

$$\psi_1(x)=0,\ \psi_2(x)=0,\ \psi_3(x)=0,\ldots$$

on voit qu'entre deux racines voisines de l'équation

$$\psi_m(x)=0$$

se trouve une racine de l'équation

$$\psi_{m-1}(x)=0$$

en même temps qu'une racine de l'équation

$$\psi'_m(x)=0;$$

donc la fraction

$$\frac{\psi_{m-1}(x)}{\psi'_m(x)}$$

change de signe deux fois dans chacune de ces intervalles, en reprenant le même signe pour

$$x=x_1,\ x_2,\ldots,\ x_l,\ldots,\ x_m$$

En observant que, pour la même raison, les équations

$$\psi'_m(x)=0,\ \psi_{m-1}(x)=0$$

n'ont pas de racines entre $x=x_m$, $x=+\infty$, nous en concluons que les fractions

$$\frac{\psi_{m-1}(x_l)}{\psi'_m(x_l)},\quad \frac{\psi_{m-1}(x_m)}{\psi'_m(x_m)}$$

ont le même signe que la fraction

$$\frac{\psi_{m-1}(+\infty)}{\psi'_m(+\infty)}.$$

Il en suit

$$\frac{\psi_{m-1}(x_l)}{\psi'_m(x_l)}>0,$$

puisque, d'après § 1, on doit avoir

$$\psi_{m-1}(+\infty)>0,\ \psi'_m(+\infty)>0.$$

Ayant ainsi établi que

$$\frac{\psi_{m-1}(x_l)}{\psi'_m(x_l)}>0,$$

nous obtenons de (49), où l'on a, comme on l'a vu, $K>0$,

(50) $$\frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_l}>0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'inégalité que nous venons de démontrer fournit la limite inférieure de la dérivée

$$\frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i}$$

dans le voisinage de

$$e_0 = 0,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0, \ldots$$

Pour déduire de l'équation (49) la limite supérieure de cette dérivée, déterminons $\psi_{m-1}(x)$ par (25), en y posant

$$n = m - 1,\ x = x_l,$$

ce qui donne

$$\psi_{m-1}(x_l) = \sum (-1)^{m-i-1} K_i^{(m-1)} (x_l)^i.$$

De cette même formule, en y posant $n = m$ et en observant que les racines de l'équation

$$\psi_m(x) = 0$$

sont égales à

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_l, \ldots,\ x_m,$$

nous avons

$$\psi'_m(x_l) = K_m^{(m)} (x_l - x_1) \ldots (x_l - x_{l-1}) (x_l - x_{l+1}) \ldots (x_l - x_m).$$

Par conséquent il vient de l'équation (49)

$$\frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i} = \frac{K \Sigma (-1)^{m-i-1} K_i^{(m-1)} (x_l)^i}{K_m^{(m)} (x_l - x_1) \ldots (x_l - x_{l-1}) (x_l - x_{l+1}) \ldots (x_l - x_m)}.$$

En observant que d'après (25) $K_m^{(m)}$ est différent de zéro, lorsque $\psi_m(x)$ est du degré m, et que d'après § 1 les quantités

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_l, \ldots,\ x_m,$$

racines de l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

sont toutes différentes entre elles, nous concluons de cette égalité, où

$$K,\ K_i^{(m-1)},\ x_l,$$

sont des quantités finies, que la dérivée

$$\frac{\partial x_l^{(0)}}{\partial e_i}$$

dans le cas considéré ne surpasse pas une certaine limite finie qui peut être trouvée d'après les coefficients des fonctions

$$\psi_{m-1}(x),\ \psi_m(x)$$

et les racines de l'équation

$$\psi_m(x) = 0.$$

On voit de là que lorsque les quantités

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots$$

subissent une variation continue dans le voisinage de

$$e_0=0,\ e_1=0,\ e_2=0,$$

toutes les racines de l'équation (46) subiront aussi des variations continues et que d'après (50) ces racines croîtront avec e_0, e_1, $e_2\ldots$

§ 14. Pour étendre ces résultats au cas, où

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\ldots$$

diffèrent plus ou moins de zéro, nous remarquons que les proprietés des fonctions

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots,\ \psi_m(x),$$

qui ont servi de fondement à tous nos raisonnements, subsistent, d'après le théorème que nous avons démontré, si au lieu de la série

$$\frac{c_0}{x}+\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}+\ldots$$

on prend la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots+\frac{C_{2m-1}}{x^{2m}}+\frac{C_{2m}}{x^{2m+1}}+\ldots,$$

où les quantités

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots C_{2m-1}$$

ne dépassent pas les limites

$$c_0-\frac{1}{H_0},\quad c_1-\frac{h}{H_0},\quad c_2-\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad c_{2m-1}-\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$c_0+\frac{1}{H_0},\quad c_1+\frac{h}{H_0},\quad c_2+\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad c_{2m-1}+\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

h, H_0 satisfaisant aux conditions indiquées dans ce théorème.

Il en suit que pour ces valeurs de

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ldots$$

on peut répéter pour la série

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots$$

tout ce qui a été démontré pour la série

$$\frac{c_0}{x}+\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}+\ldots,$$

et que par suite, en remplaçant la série

$$\frac{c_0-c_0}{x}+\frac{c_1+e_1}{x^2}+\frac{c_2-e_2}{x^3}+\ldots$$

par la série

$$\frac{C_0 - e_0}{x} + \frac{C_1 + e_1}{x^2} + \frac{C_2 - e_2}{x^3} + \dots$$

dans la formation de l'équation

$$\Psi_m(x) = 0$$

par la méthode du § 9, nous n'altérerons pas les proprietés de cette équation déduites au paragraphe précédent et d'après lesquelles toutes ses racines croissent d'une manière continuée, lorsque les quantités

$$e_0,\ e_1,\ e_2, \dots$$

dans le voisinage de

$$e_0 = 0,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0 \dots$$

croissent également d'une manière continue.

Par conséquent, en observant que pour

$$E_0 = c_0 - C_0 + e_0,$$
$$E_1 = C_1 - c_1 + e_1,$$
$$E_2 = c_2 - C_2 + e_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

l'on obtient

$$\frac{C_0 - e_0}{x} + \frac{C_1 + e_1}{x^2} + \frac{C_2 - e_2}{x^3} + \dots = \frac{c_0 - E_0}{x} + \frac{c_1 + E_1}{x^2} + \frac{c_2 - E_2}{x^3} + \dots,$$

$$\partial E_0 = \partial e_0,\ \partial E_1 = \partial e_1,\ \partial E_2 = \partial e_2, \dots$$

et qu'aux valeurs de

$$e_0,\ e_1,\ e_2, \dots$$

voisines de

$$e_0 = 0,\ e_1 = 0,\ e_2 = 0, \dots$$

correspondent les valeurs de

$$E_0,\ E_1,\ E_2, \dots$$

voisines de

$$E_0 = c_0 - C_c,\ E_1 = C_1 - c_1,\ E_2 = c_2 - C_2, \dots,$$

nous en concluóns qu'en remplaçant la série

$$\frac{c_0 - e_0}{x} + \frac{c_1 + e_1}{x^2} + \frac{c_2 - e_2}{x^3} + \dots$$

par la série

$$\frac{c_0 - E_0}{x} + \frac{c_1 + E_1}{x^2} + \frac{c_2 - E_2}{x^3} + \dots$$

dans la formation de l'équation

$$\Psi_m(x) = 0$$

d'après les méthodes du § 9, nous obtiendrons une équation dont toutes les racines croissent d'une manière continue en même temps que E_0, E_1, E_2,... dans le voisinage de

$$E_0 = c_0 - C_0,\ E_1 = C_1 - c_1,\ E_2 = c_2 - C_2, \dots$$

Quant à ces quantités

$$E_0, \; E_1, \; E_2, \ldots,$$

les $2m$ premières entre elles ne peuvent pas dépasser les limites

$$-\frac{1}{H_0}, \quad -\frac{h}{H_0}, \quad -\frac{h^2}{H_0}, \ldots, \quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

$$+\frac{1}{H_0}, \quad +\frac{h}{H_0}, \quad +\frac{h^2}{H_0}, \ldots, \quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

puisque d'après les conditions du théorème du § 12 les coefficients

$$C_0, \; C_1, \; C_2, \ldots, \; C_{2m-1}$$

sont supposés ne pas dépasser les limites

$$c_0 - \frac{1}{H_0}, \quad c_1 - \frac{h}{H_0}, \quad c_2 - \frac{h^2}{H_0}, \ldots, \quad c_{2m-1} - \frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

$$c_0 + \frac{1}{H_0}, \quad c_1 + \frac{h}{H_0}, \quad c_2 + \frac{h^2}{H_0}, \ldots, \quad c_{2m-1} + \frac{h^{2m-1}}{H_0}.$$

§ 15. Dans le cas particulier lorsque l'on a

$$E_0 = \frac{1}{H_0}, \quad E_1 = \frac{h}{H_0}, \quad E_2 = \frac{h^2}{H_0}, \ldots,$$

la série

$$\frac{c_0 - E_0}{x} + \frac{c_1 + E_1}{x^2} + \frac{c_2 - E_2}{x^3} + \ldots$$

est égale à

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots - \frac{1}{H_0(x+h)}.$$

Par conséquent, d'après le § 9, l'équation

$$\Psi_m(x) = 0$$

se réduit pour ces valeurs de E_0, E_1, $E_2 \ldots$ à l'équation

(51) $$\psi_m(x) + \frac{\psi_m(-h)}{H_0 - H_m} \, \frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h} = 0.$$

En observant que ces valeurs de

$$E_0, \; E_1, \; E_2, \ldots,$$

pour $h > 0$, $H_0 > 0$, croissent en même temps que $\frac{1}{H_0}$, nous voyons d'après le paragraphe précédent que les racines de cette équation croissent avec $\frac{1}{H_0}$.

De même, en posant

$$E_0 = -\frac{1}{H_0}, \quad E_1 = -\frac{h}{H_0}, \quad E_2 = -\frac{h^2}{H_0}, \ldots,$$

nous nous convainquons que les racines de l'équation

$$(52)\qquad \psi_m(x) - \frac{\psi_m(-h)}{H_0+H_m}\,\frac{\psi_{m-1}(-h)\,\psi_m(x) - \psi_m(-h)\,\psi_{m-1}(x)}{x+h} = 0$$

décroissent lorsque $\frac{1}{H_0}$ croît.

D'après cela il n'est pas difficile d'obtenir les limites des racines des équations (51), (52), racines que nous désignerons par

$$x_1',\ x_2',\ldots,\ x_l',\ldots,\ x'_m,$$
$$x_1'',\ x_2'',\ldots,\ x_l'',\ldots,\ x''_m,$$

en les supposant disposées de manière que l'on ait pour $\frac{1}{H_0} = 0$

$$x_1' \leqq x_2' \leqq \ldots \leqq x_l' \leqq \ldots \leqq x'_m,$$
$$x_1'' \leqq x_2'' \leqq \ldots \leqq x_l'' \leqq \ldots \leqq x''_m.$$

En observant que ces équations se réduisent pour $H_0 = \infty$ à l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

dont les racines disposées dans l'ordre croissant forment la série

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_l,\ldots,\ x_m,$$

nous concluons que pour

$$\frac{1}{H_0} = 0$$

l'on aura généralement

$$(53)\qquad x_l' = x_l,\ x_l'' = x_l.$$

Puisque ainsi la racine x_l' de l'équation (51) se réduit à la racine x_l de l'équation

$$\psi_m(x) = 0$$

pour

$$\frac{1}{H_0} = 0,$$

et qu'elle croît avec cette dernière quantité, qui, d'après le § 10, ne peut pas être inférieure à 0, il en suit que la limite inférieure de la racine x_l' est x_l. Quant à la limite supérieure de x_l', cette racine, en augmentant avec $\frac{1}{H_0}$, n'atteint jamais la valeur x_{l+1} de la racine de l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

qui suit x_l dans la série

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_l,\ x_{l+1},\ldots,\ x_m;$$

parce que, comme il est aisé de le montrer, l'équation (51) n'est pas satisfaite pour $x = x_{l+1}$, tant que H_0 n'est pas infini. En effet, en posant

$$x = x_{l+1}$$

dans le premier membre de cette équation et en observant que

$$\psi_m(x_{l+1}) = 0,$$

nous trouvons qu'il se réduit à la fraction

$$\frac{-\psi^2_m(-h)\,\psi_{m-1}(x_{l+1})}{(H_0 - H_m)(x_{l+1} + h)},$$

qui ne peut pas s'annuler pour une valeur finie de H_0 puisque, d'après le § 1, l'équation

$$\psi_m(x) = 0$$

ne peut pas être satisfaite par la valeur négative $x = -h$, et sa racine x_{l+1} ne peut pas donner

$$\psi_{m-1}(x_{l+1}) = 0.$$

On voit de là que la racine x_l' de l'équation (51) sera contenue entre les racines x_l, x_{l+1} de l'équation

$$\psi_m(x) = 0,$$

et que par conséquent

(54) $$x_l < x'_l < x_{l+1}.$$

En répétant le même raisonnement pour la racine

$$x_l'',$$

de l'équation (52), qui, comme on l'a vu, se réduit à x_l pour $\frac{1}{H_0} = 0$ et diminue lorsque $\frac{1}{H_0}$ croît, nous trouvons

(55) $$x_{l-1} < x_l'' < x_l.$$

Ainsi s'obtiennent les limites des racines des équations (51), (52) et au moyen de ces racines l'on pourra trouver, comme nous le verrons, les limites des racines de l'équation

$$\Psi_m(x) = 0,$$

que l'on obtient d'après le § 9, en remplaçant dans la série

$$\frac{c_0 - e_0}{x} + \frac{c_1 + e_1}{x^2} + \frac{c_2 - e_2}{x^3} + \ldots$$

les quantités

$$e_0,\ e_1,\ e_2, \ldots,\ e_{2m-1}$$

par les quantités

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ldots,\ E_{2m-1},$$

ne dépassant pas les limites

$$-\frac{1}{H_0},\quad -\frac{h}{H_0},\quad -\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$+\frac{1}{H_0},\quad +\frac{h}{H_0},\quad +\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

où h est une quantité positive quelconque et H_0 une quantité positive qui n'est pas inférieure à la limite trouvée au § 12.

Dans le cas particulier, où l'on a

$$\frac{1}{H_0}=0,$$

ces limites se réduisent à zéro et nous avons

$$E_0=0,\ E_1=0,\ E_2=0,\ldots,\ E_{2m-1}=0;$$

l'équation

$$\Psi_m(x)=0$$

devient donc ici

$$\psi_m(x)=0,$$

et nous avons d'après § 13

$$x_l^{(0)}=x_l.$$

En passant au cas, où $\frac{1}{H_0}$ diffère de zéro, et se rappelant, comme nous l'avons montré, que les racines de l'équation

$$\Psi_m(x)=0$$

croissent avec les quantités

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ldots,\ E_{2m-1},$$

nous en concluons que lorsque

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ldots,\ E_{2m-1},$$

ne sortent pas des limites

$$-\frac{1}{H_0},\quad -\frac{h}{H_0},\quad -\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$+\frac{1}{H_0},\quad +\frac{h}{H_0},\quad +\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

le maximum de la racine

$$x_l^{(0)}$$

correspondra à

$$E_0=\frac{1}{H_0},\quad E_1=\frac{h}{H_0},\quad E_2=\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad E_{2m-1}=\frac{h^{2m-1}}{H_0}.$$

Mais puisque, comme on l'a vu, pour ces valeurs de

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\dots,\ E_{2m-1}$$

l'équation

$$\Psi_m(x)=0$$

se réduit à l'équation (51) dont les racines sont

$$x_1',\ x_2',\dots,\ x_l',\dots,\ x_m',$$

il en suit qu'une de ces quantités fournira le maximum de la racine $x_l^{(0)}$.

Il est aisé de reconnaître celle d'entre ces quantités qui donne le maximum de la racine $x_l^{(0)}$, si $\frac{1}{H_0}$ est infiniment petit. Dans ce cas on voit, d'après les formules qui déterminent les limites des quantités

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\dots,\ E_{2m-1},$$

que ces quantités restent voisines de zéro et par suite toutes les valeurs de la racine $x_l^{(0)}$ restent voisines de x_l, à laquelle elles se réduisent pour $\frac{1}{H_0}=0$. Par conséquent le maximum de la racine $x_l^{(0)}$ pour $\frac{1}{H_0}$ infiniment petit ne peut être égal qu'à celle des quantités

$$x_1',\ x_2',\dots,\ x_l',\dots,\ x_m',$$

qui se réduit à x_l pour $\frac{1}{H_0}$ et cette quantité est, comme, on l'a vu, x_l'.

D'après cela et observant que dans le cas que nous discutons le maximum de la racine $x_l^{(0)}$ augmente d'une manière continue avec la croissance continue de $\frac{1}{H_0}$, nous concluons que pour toutes les valeurs de $\frac{1}{H_0}$ qui satisfont aux conditions du théorème du § 12 ce maximum sera représenté par la même racine x_l' de l'équation (51), puisque autrement pour une certaine valeur de $\frac{1}{H_0}$, à laquelle s'appliquent toutes les formules obtenues, ce maximum passerait brusquement de la valeur x_l' à une autre valeur prise dans la série

$$x_1',\ x_2',\dots,\ x_l',\dots,\ x_m',$$

ce qui est impossible.

On voit de là que lorsque

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\dots,\ E_{2m-1},$$

ne dépassent pas les limites

$$-\frac{1}{H_0},\quad -\frac{h}{H_0},\quad -\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$+\frac{1}{H_0},\quad +\frac{h}{H_0},\quad +\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

la racine $x_l^{(0)}$ de l'équation

$$\Psi_m(x)=0$$

ne peut pas être plus grande que x_l' et que par conséquent

$$x_l^{(0)}\leqq x_l'.$$

En détérminant de même la plus petite valeur de la racine

$$x_l^{(0)}$$

lorsque

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ldots,\ E_{2m-1},$$

ne dépassent pas les limites

$$-\frac{1}{H_0},\quad -\frac{h}{H_0},\quad -\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad -\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$+\frac{1}{H_0},\quad +\frac{h}{H_0},\quad +\frac{h^2}{H_0},\ldots,\quad +\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$

nous trouvons que ce minimum est égal à la racine x_l'' de l'équation (52) et que par conséquent l'on a

$$x_l^{(0)}\geqq x_l''.$$

Comme on a par (54)

$$x_l'<x_{l+1},$$

et que par (55)

$$x_{l-1}<x_l'',$$

les inégalités que nous venons d'obtenir donnent

$$x_{l-1}<x_l^{(0)}<x_{l+1}.$$

D'après cela, connaissant les racines de l'équation

$$\psi_m(x)=0,$$

nous pouvons trouver les limites des racines de l'équation

$$\Psi_m(x)=0,$$

lorsque

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ldots,\ E_{2m-1}$$

ne dépassent pas les limites indiquées ci-dessus.

29.

SUR LES POLYNÔMES REPRÉSENTANT LE MIEUX LES VALEURS DES FONCTIONS FRACTIONNAIRES ÉLÉMENTAIRES POUR LES VALEURS DE LA VARIABLE CONTENUES ENTRE DEUX LIMITES DONNÉES.

TRADUIT PAR B. C. MLODZEJEVSKY.

(Lu le 2 décembre 1892.)

О полиномахъ, наилучше представляющихъ значенія простѣйшихъ дробныхъ функцій при величинахъ перемѣнной, заключающихся между двумя данными предѣлами.

(Приложеніе къ LXXII тому Записокъ Императорской Академіи Наукъ, № 7.)

Sur les polynômes représentant le mieux les valeurs des fonctions fractionnaires élémentaires pour les valeurs de la variable contenues entre deux limités données.

---

§ 1. Dans plusieurs cas les calculs approchés se simplifient considérablement, en remplaçant les expressions fractionnaires par des fonctions entières qui en représentent avec une exactitude suffisante toutes les valeurs dont dépend le résultat cherché. Les expressions approchées de cette sorte pour les fonctions fractionnaires se déterminent au moyen des théorèmes que nous avons démontrés dans notre Mémoire *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* *). Nous allons montrer à présent, comment au moyen de ces théorèmes on trouve les polynômes de différents degrés qui représentent le mieux les valeurs de la fraction élémentaire

$$\frac{1}{H-x}$$

pour les valeurs de la variable x, ne dépassant pas les limites

$$x=-h,\ x=+h.$$

Nous supposons les quantités H, h positives et pour que la fraction reste finie entre

$$x=-h,\ x=+h,$$

nous prenons

$$H>h.$$

En désignant par

$$p_0+p_1 x+\ldots+p_{n-2} x^{n-2}+p_{n-1} x^{n-1}$$

---

*) T. I, pag. 273—378.

le polynôme cherché, nous observons que l'erreur *absolue* qu'on commet en représentant par ce polynôme les valeurs de la fraction

$$\frac{1}{H-x}$$

est égale à la différence

$$\frac{1}{H-x}-p_0-p_1\,x-\ldots-p_{n-2}\,x^{n-2}-p_{n-1}\,x^{n-1}.$$

Puisque le quotient de la division de cette différence par

$$\frac{1}{H-x}$$

se réduit à l'expression

$$1+(x-H)\;(p_{n-1}\,x^{n-1}+p_{n-2}\,x^{n-2}+\ldots+p_1\,x+p_0),$$

l'erreur *relative* de la représentation approchée de la fraction

$$\frac{1}{H-x}$$

par le polynôme

$$p_0+p_1\,x+\ldots+p_{n-2}\,x^{n-2}+p_{n-1}\,x^{n-1}$$

sera d'autant plus petite que l'expression

$$1+(x-H)\;(p_{n-1}\,x^{n-1}+p_{n-2}\,x^{n-2}+\ldots+p_1\,x+p_0).$$

diffèrera moins de zéro. Par conséquent, pour abaisser autant que possible la limite supérieure de cette erreur entre

$$x=-h,\; x=+h,$$

il faut donner aux coefficients

$$p_0,\, p_1,\ldots p_{n-2},\, p_{n-1}$$

les valeurs pour lesquelles l'expression

$$1+(x-H)\;(p_{n-1}\,x^{n-1}+p_{n-2}\,x^{n-2}+\ldots+p_1\,x+p_0)$$

s'éloigne le moins possible de zéro entre

$$x=-h,\; x=+h.$$

Les quantités

$$p_0,\, p_1,\ldots p_{n-2},\, p_{n-1},$$

qui satisfont à cette condition s'obtiennent aisément au moyen des théorèmes démontrés dans le Mémoire cité plus haut, comme on le voit dans notre Mémoire *Sur les fonctions s'éloignant peu de zéro pour certaines*

valeurs de la variable *), où, au moyen de ces formules, sont déterminés les coefficients

$$p_{n-1},\ p_{n-2}, \ldots p_1,\ p_0,$$

avec lesquels la fonction

$$M+(H-x)\,(p_{n-1}\,x^{n-1}+p_{n-2}\,x^{n-2}+\ldots+p_1\,x+p_0)$$

s'éloigne le moins de zéro, x étant contenu entre $x=-h$, $x=+h$. La quantité M est supposée ici connue et pouvant recevoir une valeur quelconque.

En posant

$$M=1,$$

nous obtenons d'après les formules de ce Mémoire que l'expression

$$1+(x-H)\,(p_{n-1}\,x^{n-1}+p_{n-2}\,x^{n-2}+\ldots+p_1\,x+p_0)$$

s'éloigne le moins de zéro entre

$$x=-h,\ x=+h$$

si les coefficients

$$p_{n-1},\ p_{n-2}, \ldots p_1,\ p_0,$$

sont déterminés par l'égalité

$$(1)\quad \begin{cases} 1+(x-H)\,(p_{n-1}\,x^{n-1}+p_{n-2}\,x^{n-2}+\ldots+p_1\,x+p_0) \\ \qquad =\dfrac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}, \end{cases}$$

et que l'expression

$$1+(x-H)\,(p_{n-1}\,x^{n-1}+p_{n-2}\,x^{n-2}+\ldots+p_1\,x+p_0)$$

formée avec ces coefficients

$$p_{n-1},\ p_{n-2}, \ldots p_1,\ p_0$$

atteint dans l'intervalle $x=-h$, $x=+h$, les limites

$$-\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n},\quad +\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n},$$

sans les dépasser.

Il s'ensuit que toutes les valeurs de la fraction

$$\frac{1}{H-x},$$

*) T. II, pag. 335—356.

de $x = -h$ à $x = +h$ ne peuvent être représentées par aucun polynôme du degré n — 1 avec une telle approximation que l'erreur relative n'atteigne ni la limite

$$-\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n},$$

ni la limite

$$+\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n},$$

et qu'elle ne dépasse pas ces limites seulement dans le cas où les coefficients $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots p_1, p_0$ satisfont à l'égalité (1), ce qui détérmine le polynôme

$$p_{n-1}\, x^{n-1} + p_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots + p_1\, x + p_0$$

du degré $(n-1)$ qui représente le mieux la valeur de la fraction

$$\frac{1}{H-x}$$

dans l'intervalle

$$x = -h, \quad x = +h.$$

§ 2. En déterminant le polynôme cherché

$$p_0 + p_1\, x + \ldots + p_{n-2}\, x^{n-2} + p_{n-1}\, x^{n-1}$$

au moyen de l'égalité (1), nous voyons qu'il est représenté par la fraction

$$\frac{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n-(x+\sqrt{x^2-h^2})^n-(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n]\,(H-x)}.$$

Pour obtenir le polynôme

$$p_0 + p_1\, x + \ldots + p_{n-2}\, x^{n-2} + p_{n-1}\, x^{n-1},$$

auquel se réduit cette fraction, observons que, la somme

$$(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n,$$

étant une fonction homogène du degré n—1 des quantités H, h, en ouvrant les parenthèses, elle prendra la forme

$$(2)\quad (H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n = A_n H^n + A_{n-2} h^2 H^{n-2} + A_{n-4} h^4 H^{n-4} + \ldots,$$

les coefficients

$$A_n,\ A_{n-2},\ A_{n-4}, \ldots$$

ne dépendant pas de H, h.

En remplaçant dans cette égalité H par x, on trouve

$$(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n=A_n x^n+A_{n-2}h^2x^{n-2}+A_{n-4}h^4x^{n-4}+\dots,$$

ce qui, retranché de l'égalité précédente, donne

$$(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n-(x+\sqrt{x^2-h^2})^n-(x-\sqrt{x^2-h^2})^n$$
$$=A_n(H^n-x^n)+A_{n-2}\,h^2(H^{n-2}-x^{n-2})+A_{n-4}\,h^4(H^{n-4}-x^{n-4})+\dots;$$

en divisant par $H-x$, on a

$$\frac{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n-(x+\sqrt{x^2-h^2})^n-(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{H-x}$$
$$=A_n(H^{n-1}+H^{n-2}\,x+H^{n-3}\,x^2+\dots)$$
$$+A_{n-2}\,h^2(H^{n-3}+H^{n-4}\,x+H^{n-5}\,x^2+\dots)$$
$$+A_{n-4}\,h^4(H^{n-5}+H^{n-6}\,x+H^{n-7}\,x^2+\dots)$$
$$+\dots\dots\dots\dots,$$

ou encore

$$\frac{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n-(x+\sqrt{x^2-h^2})^n-(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{H-x}$$
$$=A_n\,H^{n-1}+A_{n-2}h^2H^{n-3}+A_{n-4}h^4H^{n-5}+\dots$$
$$+(A_nH^{n-2}+A_{n-2}h^2H^{n-4}+A_{n-4}h^4H^{n-6}+\dots)\,x$$
$$+(A_nH^{n-3}+A_{n-2}h^2H^{n-5}+A_{n-4}h^4H^{n-7}+\dots)\,x^2$$
$$+\dots\dots\dots\dots$$

En comparant les expressions qui multiplient ici

$$x^0,\ x,\ x^2,\dots,$$

avec le développement (2) de la fonction

$$(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n,$$

nous observons qu'elles représentent les parties entières des quotients de la division de cette fonction par

$$H,\ H^2,\ H^3,\dots.$$

On a donc, en désignant par le symbole E ces parties entières des quotients,

$$\frac{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n-(x+\sqrt{x^2-h^2})^n-(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{H-x}$$
$$=\mathrm{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H}+$$
$$\mathrm{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H^2}\cdot x+$$
$$\mathrm{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H^3}\cdot x^2+$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui, divisé par

$$(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n,$$

donne

$$\frac{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n-(x+\sqrt{x^2-h^2})^n-(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n]\,(H-x)}$$

$$=\frac{\mathrm{E}\,[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n]\,\frac{1}{H}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}+$$

$$\frac{\mathrm{E}\,[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n]\,\frac{1}{H^2}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\,x+$$

$$\frac{\mathrm{E}\,[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n]\,\frac{1}{H^3}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\,x^2+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Par conséquent, d'après ce qui a été démontré sur le polynôme

$$p_0+p_1\,x+\ldots+p_{n-2}\,x^{n-2}+p_{n-1}\,x^{n-1}$$

représentant le mieux la fraction

$$\frac{1}{H-x}$$

dans l'intervalle

$$x=-h,\ x=+h,$$

ce polynôme sera représenté par la formule

$$\frac{\mathrm{E}\,[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n]\,\frac{1}{H}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}+\frac{\mathrm{E}\,[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n]\,\frac{1}{H^2}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\,x$$

$$+\frac{\mathrm{E}\,[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n]\,\frac{1}{H^3}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\,x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si nous comparons cette expression approchée de la fraction

$$\frac{1}{H-x}$$

sous la forme d'un polynôme du degré $n-1$ avec l'expression

$$\frac{1}{H}+\frac{x}{H^2}+\ldots+\frac{x^{n-2}}{H^{n-1}}+\frac{x^{n-1}}{H^n},$$

que l'on obtient en développant cette fraction en série suivant les puissances croissantes de x, nous voyons que cette dernière est la limite vers laquelle tend la première expression lorsque h converge vers zéro.

Comme la formule

$$\frac{1}{H}+\frac{x}{H^2}+\ldots+\frac{x^{n-2}}{H^{n-1}}+\frac{x^{n-1}}{H^n}$$

diffère de la fraction

$$\frac{1}{H-x}$$

par la quantité

$$\frac{x^n}{H^n(H-x)},$$

l'erreur relative que l'on commet en représentant par cette formule la fraction

$$\frac{1}{H-x}$$

entre

$$x=-h,\ x=+h$$

peut atteindre les limites

$$-\frac{h^n}{H^n},\quad +\frac{h^n}{H^n};$$

tandis que pour la formule que nous venons d'obtenir cette erreur ne dépasse pas les limites

$$-\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n},\quad +\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}.$$

§ 3. L'expression approchée de la fraction

$$\frac{1}{H-x}$$

que nous avons obtenue peut être utilement employée dans plusieurs cas.

Pour donner un exemple, nous allons en montrer l'application à l'évaluation approchée de l'intégrale

$$\int_{-h}^{+h}\frac{f(x)}{H-x}\,dx.$$

Nous supposerons que la fonction $f(x)$, de même que $H-x$, ne devient pas négative entre $x=-h$, $x=+h$.

En désignant par F l'erreur relative de notre expression approchée pour les différentes valeurs de la fraction

$$\frac{1}{H-x},$$

nous trouvons que son erreur absolue sera donnée par la formule

$$\frac{F}{H-x};$$

par suite, nous obtenons, d'après la formule du § 2, pour la valeur exacte de

$$\frac{1}{H-x}$$

l'expression

$$\frac{1}{H-x} = \frac{\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}$$

$$+\frac{\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H^2}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\,x$$

$$+\frac{\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H^3}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\,x^2+\ldots\ldots+\frac{F}{H-x}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $f(x)\,dx$ et en intégrant de $x=-h$ à $x=+h$, nous avons

$$\int_{-h}^{+h}\frac{f(x)}{H-x}\,dx = \frac{\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\int_{-h}^{+h}f(x)\,dx$$

$$+\frac{\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H^2}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\int_{-h}^{+h}xf(x)\,dx$$

$$+\frac{\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H^3}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}\int_{-h}^{+h}x^2f(x)\,dx$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\int_{-h}^{+h}\frac{F}{H-x}f(x)\,dx,$$

ce qui peut s'écrire plus succinctement ainsi

$$\int_{-h}^{+h}\frac{f(x)}{H-x}\,dx = \frac{\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\int_{-h}^{+h}Sf(x)\,dx}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n}+\int_{-h}^{+h}\frac{f(x)}{H-x}\,F\,dx,$$

en posant

$$\frac{1}{H}+\frac{x}{H^2}+\frac{x^2}{H^3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{H^n}=S.$$

En observant que cette égalité donne

$$S=\frac{1}{H-x}-\frac{x^n}{H^n(H-x)},$$

où le terme

$$\frac{x^n}{H^n(H-x)}$$

est du degré inférieur à $-n$ par rapport à H, nous trouvons

$$\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]S=$$

$$\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\left[\frac{1}{H-x}-\frac{x^n}{H^n(H-x)}\right]$$

$$=\mathbf{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n+(H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right]\frac{1}{H-x};$$

par conséquent, l'expression précédente de l'intégrale

$$\int_{-h}^{+h} \frac{f(x)}{H-x}\, dx$$

se réduit à celle-ci:

$$\int_{-h}^{+h} \frac{f(x)}{H-x}\, dx = \frac{\mathrm{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right] \int_{-h}^{+h} \frac{f(x)\,dx}{H-x}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n} + \int_{-h}^{+h} \frac{f(x)}{H-x}\, F\, dx.$$

En observant que, F étant l'erreur relative de l'expression approchée de la fraction

$$\frac{1}{H-x},$$

cette quantité, d'après le § 2, ne peut pas dépasser les limites

$$-\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n}, \quad +\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n},$$

et que les fonctions

$$f(x), \quad \frac{1}{H-x},$$

d'après nos suppositions, restent positives entre $x = -h$, $x = +h$, nous trouvons que le dernier terme

$$\int_{-h}^{+h} \frac{f(x)}{H-x}\, F(x)\, dx$$

de l'égalité précédente ne pourra pas sortir des limites

$$-\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n} \int_{-h}^{+h} \frac{f(x)\,dx}{H-x},$$

$$+\frac{2h^n}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n} \int_{-h}^{+h} \frac{f(x)\,dx}{H-x}.$$

Il s'en suit que la fraction

$$\frac{\mathrm{E}\left[(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n\right] \int_{-h}^{+h} \frac{f(x)\,dx}{H-x}}{(H+\sqrt{H^2-h^2})^n + (H-\sqrt{H^2-h^2})^n},$$

dont le dénominateur est le polynôme

$$\left(H+\sqrt{H^2-h^2}\right)^n+\left(H-\sqrt{H^2-h^2}\right)^n,$$

donne l'expression approchée de l'intégrale

$$\int_{-h}^{+h}\frac{f(x)\,dx}{H-x}$$

avec une erreur relative ne dépassant pas les limites

$$-\frac{2h^n}{\left(H+\sqrt{H^2-h^2}\right)^n+\left(H-\sqrt{H^2-h^2}\right)^n},$$

$$+\frac{2h^n}{\left(H+\sqrt{H^2-h^2}\right)^n+\left(H-\sqrt{H^2-h^2}\right)^n}.$$

30.

SUR LES SOMMES QUI DÉPENDENT DES VALEURS POSITIVES D'UNE FONCTION QUELCONQUE.

(TRADUIT PAR I. PTASZYCKI.)

(Lu le 16 février 1894.)

О суммахъ, зависящихъ отъ положительныхъ значенiй какой либо функцiи.

(Записки Императорской Академiи Наукъ, VIII серiя, Т. I, № 7, 1895 г.)

Sur les sommes qui dépendent des valeurs positives d'une fonction quelconque.

§ 1. De notre Mémoire *Sur les sommes composées des valeurs de monômes simples multipliés par une fonction qui reste toujours positive**) on voit quel intérêt se rattache aux valeurs réelles des inconnues

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_{p-1},$$

propres à fournir des valeurs données aux sommes

$$\sum_0^p u_i^2,\ \sum_0^p z_i u_i^2,\ \sum_0^p z_i^2 u_i^2, \ldots \sum_0^p z_i^{2k-1} u_i^2.$$

La recherche des inconnues

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_{p-1}$$

sous de telles conditions se ramène à la résolution des équations

$$(1)\quad \sum_0^p u_i^2 = C_0,\ \sum_0^p z_i u_i^2 = C_1,\ \sum_0^p z_i^2 u_i^2 = C_2, \ldots \sum_0^p z_i^{2k-1} u_i^2 = C_{2k-1},$$

où

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots C_{2k-1}$$

sont des quantités données.

En faisant

$$u_0^2 = Y_0,\ u_1^2 = Y_1,\ u_2^2 = Y_2, \ldots u^2_{p-1} = Y_{p-1},$$

*) T. II, pag. 561—610.

nous pouvons remplacer ces équations par les suivantes

$$\sum_0^p Y_i = C_0, \quad \sum_0^p z_i Y_i = C_1, \quad \sum_0^p z_i^2 Y_i = C_2, \ldots \quad \sum_0^p z_i^{2k-1} Y_i = C_{2k-1},$$

plus simples, en ayant toutefois en vue que les valeurs réelles des inconnues

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \ldots u_{p-1}$$

ne s'obtiennent que pour

$$Y_0, \; Y_1, \; Y_2, \ldots Y_{p-1}$$

positifs.

En écrivant les valeurs des inconnues

$$z_0, \; z_1, \; z_2, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0, \; u_1, \; u_2, \ldots u_{p-1}$$

dans une solution quelconque des équations (1), nous les supposerons toujours rangées de sorte que les quantités

$$z_0, \; z_1, \; z_2, \ldots z_{p-1}$$

présentent une série croissante. Après avoir fixé ainsi l'ordre de disposition des quantités

$$z_0, \; z_1, \; z_2, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0, \; u_1, \; u_2, \ldots u_{p-1}$$

pour toutes les solutions des équations, remarquons que, d'après le § 3 du Mémoire précité, pour $p = k$, quand le nombre des inconnues ne surpasse pas celui des équations, celles-ci ne peuvent avoir qu'une seule solution que l'on obtient à l'aide du développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_{2k-1}}{x^{2k}}$$

en fraction continue; nous en concluons que, dans ce cas particulier, les quantités

$$z_0, \; z_1, \; z_2, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0^2, \; u_1^2, \; u_2^2, \ldots u_{p-1}^2$$

se déterminent complètement par leurs indices et peuvent être trouvées sans difficulté. Pour distinguer ces quantités de toutes les autres qui satisfont aux équations (1) pour $p > k$, nous conviendrons de les désigner

$$z_0 = x_0, \quad z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \ldots \quad z_{p-1} = x_{p-1},$$
$$u_0^2 = y_0, \quad u_1^2 = y_1, \quad u_2^2 = y_2, \ldots u_{p-1}^2 = y_{p-1}.$$

Les quantités z_i, u_i^2 fournissant la solution des équations (1), pour $p=k$ on aura

$$(2)\ \sum_0^k y_i = C_0,\ \sum_0^k x_i y_i = C_1,\ \sum_0^k x_i^2 y_i = C_2, \ldots \sum_0^k x_i^{2k-1} y_i = C_{2k-1},$$

où, d'après ce qu'on a posé concernant $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$, on doit avoir

$$x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{k-1}.$$

Nous allons maintenant montrer que de ces inégalités et des équations (2) on peut déduire les inégalités auxquelles satisfont toutes les solutions réelles des équations (1), quelque grand que soit le nombre des inconnues

$$z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_{p-1}.$$

C'est de là qu'on tire les valeurs limites des intégrales et des sommes qui ont fait le sujet de nos Mémoires intitulés: 1) *Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux* *), 2) *Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales* **), ainsi que de notre Mémoire précité *Sur les sommes.*

Quant aux quantités

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{k-1},$$
$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots y_{k-1},$$

qui se déterminent par les équations (2), elles s'obtiennent, comme nous l'avons dit, à l'aide de la fraction continue résultant du développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_{2k-1}}{x^{2k}}.$$

En présentant cette fraction sous la forme

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \cdots}}},$$

nous trouvons que, d'après le § 2 du Mémoire précité, on doit y avoir

$$q_1 = \alpha_1 x + \beta_1,\ q_2 = \alpha_2 x + \beta_2, \ldots q_k = \alpha_k x + \beta_k,$$
$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \ldots \alpha_k > 0,$$

*) T. II, pag. 421—440.

**) T. II, pag. 443—478.

si les équations (1) peuvent être satisfaites par les valeurs réelles

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ldots z_{p-1},$$
$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots u_{p-1}$$

pour un certain p.

En supposant ces conditions remplies, et en désignant par

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},\ldots \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)},\ldots$$

les réduites résultant du développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\ldots+\frac{C_{2k-1}}{x^{2k}}$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1-\cfrac{1}{q_2-\cfrac{1}{q_3+\ldots}}},$$

nous concluons, en vertu de ce qu'on a démontré dans le Mémoire précité, que les inconnues

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{k-1}$$

dans les équations (2) sont égales aux racines de l'équation

$$\psi_k(x)=0,$$

et que, d'après ces racines, les inconnues

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots y_{k-1}$$

se déterminent par la formule générale que voici

$$y_i=\frac{\varphi_k(x_i)}{\psi_k'(x_i)}. \tag{3}$$

§ 2. En posant

$$y_0=u_0^2,\ y_1=u_1^2,\ y_2=u_2^2,\ldots y_{k-1}=u_{k-1}^2,$$
$$z_0=x_0,\ z_1=x_1,\ z_2=x_2,\ldots z_{k-1}=x_{k-1},$$

de la solution des équations (2) nous déduisons celle des équations (1) pour le cas $p=k$, quand le nombre des inconnues ne surpasse pas celui des équations. En passant au cas du nombre plus grand des inconnues, quand les équations (1) deviennent indéterminées, nous remarquons que, pour toutes les solutions réelles de ces équations, la somme

$$u_0^2+u_1^2+u_2^2+\ldots+u_q^2,$$

où q désigne l'un des nombres

$$0,\ 1,\ 2, \ldots p-1,$$

ne dépassera pas une certaine limite qui peut être obtenue en s'appuyant sur le résultat du § 8 du Mémoire précité concernant la détermination du maximum de la somme

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_q^2.$$

Ce maximum, dans l'hypothèse

$$z_0 \geqq a,\ z_q = v,\ z_{p-1} \leqq b,$$

s'obtient pour z_0, z_1, $z_2, \ldots z_{p-1}$, satisfaisant à l'équation

$$\psi_{k+1}(z) = 0,$$

où $\psi_{k+1}(z)$ désigne le dénominateur de la fraction ordinaire

$$\frac{\varphi_{k+1}(z)}{\psi_{k+1}(z)},$$

à laquelle se réduit la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_k z + \beta_k - \cfrac{1}{\alpha_{k+1} z + \beta_{k+1}}}}},$$

quand on y met à la place de α_{k+1} la plus grande des deux quantités

$$\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(a)}{\psi_k(a)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right],\quad \frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{k-1}(b)}{\psi_k(b)} - \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)}\right],$$

et l'on pose

$$\beta_{k+1} = \frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)} - \alpha_{k+1} v.$$

En faisant ici

$$v = x_i,$$

où x_i désigne, d'après notre notation, une racine de l'équation $\psi_k(x) = 0$, nous trouvons

$$\frac{\psi_{k-1}(v)}{\psi_k(v)} = \infty;$$

en vertu de quoi, et d'après ce que nous venons de dire sur le coefficient α_{k+1}, on obtient

$$\alpha_{k+1} = \infty,$$

et par conséquent la fraction continue

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_k z + \beta_k - \cfrac{1}{\alpha_{k+1} z + \beta_{k+1}}}}},$$

qui détermine la fraction ordinaire

$$\frac{\varphi_{k+1}(z)}{\psi_{k+1}(z)},$$

se réduit à la fraction

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \frac{1}{\alpha_k z + \beta_k}}},$$

égale, d'après le § 1, à

$$\frac{\varphi_k(z)}{\psi_k(z)}.$$

Comme cette fraction est composée des mêmes fonctions que la fraction

$$\frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)},$$

qui détermine, d'après le § 1, la solution des équations (2), nous en concluons que, dans le cas considéré, quand

$$z_q = v = x_i,$$

les quantités

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \ldots,$$

$$u_0^2, \quad u_1^2, \quad u_2^2, \ldots,$$

qui donnent le maximum de la somme

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_q^2,$$

seront trouvées d'après les formules

$$u_0^2 = y_0, \qquad u_1^2 = y_1, \qquad u_2^2 = y_2, \ldots u_q^2 = y_q,$$

$$y_0 = \frac{\varphi_k(x_0)}{\psi'_k(x_0)}, \; y_1 = \frac{\varphi_k(x_1)}{\psi'_k(x_1)}, \; y_2 = \frac{\varphi_k(x_2)}{\psi'_k(x_2)}, \ldots y_q = \frac{\varphi_k(x_q)}{\psi'_k(x_q)}$$

pour $q = i$.

On voit par là que la somme

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_i^2 = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_i$$

est la limite supérieure que ne peut dépasser la somme

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_q^2,$$

qui s'obtient pour la solution réelle quelconque des équations (1), quand

$$z_q = x_i.$$

Or, d'après ce qui a été dit (§ 1) sur la série

$$z_0, \; z_1, \; z_2 \ldots z_{p-1}$$

on voit qu'en général z_η ne peut être inférieur à z_q que pour $\eta<q$, et comme dans ce cas la somme

$$u_0^2+u_1^2+u_2^2+\ldots+u_\eta^2$$

est évidemment moindre que celle-ci

$$u_0^2+u_1^2+u_2^2+\ldots+u_q^2,$$

dont la limite supérieure est

$$y_0+y_1+y_2+\ldots+y_i,$$

nous en concluons que pour

$$z_\eta<x_i$$

on doit avoir

$$(4)\qquad u_0^2+u_1^2+u_2^2+\ldots+u_\eta^2<y_0+y_1+y_2+\ldots+y_i.$$

En répétant les mêmes raisonnements par rapport au maximum de la somme

$$u^2_{q_1}+u^2_{q_1+1}+u^2_{q_1+2}+\ldots+u^2_{p-1},$$

le maximum qui s'obtient d'après le § 16 du Mémoire précité, nous trouvons que pour

$$z_\eta>x_i$$

on aura l'inégalité

$$(5)\qquad u^2_\eta+u^2_{\eta+1}+\ldots+u^2_{p-1}<y_i+y_{i+1}+\ldots+y_{k-1}.$$

Or, en remarquant d'après (1), (2) que

$$u_0^2+u_1^2+u_2^2+\ldots+u^2_{p-1}=C_0,$$
$$y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{k-1}=C_0,$$

nous déduisons

$$u_0^2+u_1^2+u_2^2+\ldots+u_\eta^2=C_0-u^2_{\eta+1}-u^2_{\eta+2}-\ldots-u^2_{p-1},$$
$$y_0+y_1+y_2+\ldots+y_i=C_0-y_{i+1}-y_{i+2}-\ldots-y_{k-1};$$

en vertu de quoi l'inégalité (4) donne

$$u^2_{\eta+1}+u^2_{\eta+2}+\ldots+u^2_{p-1}>y_{i+1}+y_{i+2}+\ldots+y_{k-1}.$$

D'où l'on voit que pour

$$z_\eta<x_i,$$

outre l'inégalité (4), on aura encore

$$u^2_{\eta+1}+u^2_{\eta+2}+\ldots+u^2_{p-1}>y_{i+1}+y_{i+2}+\ldots+y_{k-1},$$

et à plus forte raison

$$u_\eta^2 + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1} > y_{i+1} + y_{i+2} + \ldots + y_{k-1}.$$

Ce résultat, joint à l'inégalité (5), nous donne le moyen de déterminer les limites entre lesquelles doit rester la somme

$$u^2_\eta + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1}$$

pour toutes les solutions réelles des équations (1), quelque grand que soit le nombre des inconnues.

§ 3. D'après ce que nous venons d'établir, les limites de la somme

$$u^2_\eta + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1}$$

pour chaque nombre des inconnues dans les équations (1) peuvent être trouvées à l'aide de leur solution correspondant au nombre le plus petit possible des inconnues. Dans le dernier cas, comme nous l'avons déjà dit, les équations (1) se ramènent aux équations (2) qu'on résout aisément à l'aide du développement de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_{2k-1}}{x^{2k}}$$

en fraction continue. Nous allons maintenant examiner ce que devient cette fraction et les quantités qui en dépendent, lorsqu'on varie, plus ou moins considérablement, les coefficients

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots C_{2k-1}.$$

Nous profiterons ici du théorème démontré dans notre Mémoire intitulé: *Sur le développement en fractions continues des séries procédant suivant les puissances décroissantes de la variable* *); et à cet effet nous supposons que toutes les hypothèses de ce théorème sont remplies dans le cas présent, savoir, les suivantes:

1) pour

$$C_0 = c_0,\ C_1 = c_1,\ C_2 = c_2, \ldots C_{2k-1} = c_{2k-1}$$

l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_{2k-1}}{x^{2k}}$$

se développe en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 x + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_k x + \beta_k - \cdots}}}$$

*) T. II, pag. 613—666.

où

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \ldots \alpha_k > 0.$$

2) Les équations

$$\psi_0(x) = 0,\ \psi_1(x) = 0,\ \psi_2(x) = 0, \ldots \psi_k(x) = 0,$$

formées par les dénominateurs des réduites de cette fraction

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)},\ \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)},$$

n'ont pas de racines négatives.

3) Les quantités

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots C_{2k-1}$$

restent comprises entre les limites

$$c_0 - \frac{1}{H_0},\ c_1 - \frac{h}{H_0},\ c_2 - \frac{h^2}{H_0}, \ldots c_{2k-1} - \frac{h^{2k-1}}{H_0}$$

et

$$c_0 + \frac{1}{H_0},\ c_1 + \frac{h}{H_0},\ c_2 + \frac{h^2}{H_0}, \ldots c_{2k-1} + \frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

où h est une quantité positive quelconque et H_0 une quantité supérieure à la somme

$$\frac{h^k - 1}{h - 1} L^{(k)} + \frac{\psi_k(-h)}{\psi_k(0)} L_0^{(k)},$$

dans laquelle $L^{(k)}$ désigne la limite supérieure de la valeur absolue des coefficients du polynome

$$\frac{\psi_{k-1}(-h)\,\psi_k(x) - \psi_k(-h)\,\psi_{k-1}(x)}{x + h}$$

et $L_0^{(k)}$ son terme constant.

Dans ces hypothèses, comme nous l'avons vu, les équations

$$\psi_1(x) = 0,\ \psi_2(x) = 0, \ldots \psi_k(x) = 0,$$

formées par les dénominateurs des réduites

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\ \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}$$

de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_{2k-1}}{x^{2k}},$$

ont toutes leurs racines réelles et positives.

En désignant par

$$x_0^{(0)},\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots x^{(0)}_{k-1}$$

les racines de l'équation

$$\psi_k(x) = 0,$$

par

$$y_0^{(0)},\ y_1^{(0)}, \ldots y^{(0)}_{k-1}$$

les quantités

$$\frac{\varphi_k(x_0^{(0)})}{\psi_k'(x_0^{(0)})}, \frac{\varphi_k(x_1^{(0)})}{\psi_k'(x_1^{(0)})}, \ldots \frac{\varphi_k(x^{(0)}_{k-1})}{\psi_k'(x^{(0)}_{k-1})},$$

et posant

(6) $C_0=c_0-e_0,\ C_1=c_1+e_1,\ C_2=c_2-e_2, \ldots C_{2k-1}=c_{2k-1}+e_{2k-1},$

nous obtenons, d'après ce qui a été dit au § 1, les équations suivantes:

$$(7)\quad \sum_0^k y_i^{(0)}=c_0-e_0,\ \sum_0^k x_i^{(0)}y_i^{(0)}=c_1+e_1,\ \sum_0^k (x_i^{(0)})^2 y_i^{(0)}=c_2-e_2, \ldots$$

$$\ldots \sum_0^k (x_i^{(0)})^{2k-1} y_i^{(0)}= c_{2k-1}+e_{2k-1}.$$

Or, d'après les limites entre lesquelles doivent être comprises les quantités

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots C_{2k-1},$$

et en vertu des équations (6), on voit que les limites supérieures des quantités

$$e_0,\ e_1,\ e_2, \ldots e_{2k-1}$$

sont égales à

$$\frac{1}{H_0}, \frac{h}{H_0}, \frac{h^2}{H_0}, \ldots \frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

et les limites inférieures sont égales à

$$-\frac{1}{H_0}, -\frac{h}{H_0}, -\frac{h^2}{H_0}, \ldots -\frac{h^{2k-1}}{H_0}.$$

En désignant par

$$x_0',\ x_1',\ x_2', \ldots x'_{k-1},$$
$$x_0'',\ x_1'',\ x_2'', \ldots x''_{k-1}$$

les valeurs des inconnues

$$x_0^{(0)},\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots x^{(0)}_{k-1}$$

dans les équations (7) correspondant aux valeurs limites $e_0, e_1, e_2, \ldots e_{2k-1}$, et par

$$y_0',\ y_1',\ y_2', \ldots y'_{k-1},$$
$$y_0'',\ y_1''\ y_2'', \ldots y''_{k-1}$$

les valeurs respectives des inconnues $y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots y^{(0)}_{k-1}$, nous obtenons d'après (7)

$$(8)\quad \sum_0^k y_i'=c_0-\frac{1}{H_0},\ \sum_0^k x_i' y_i'=c_1+\frac{h}{H_0},\ \sum_0^k (x_i')^2 y_i'=c_2-\frac{h^2}{H_0}, \ldots$$

$$\ldots \sum_0^k (x_i')^{2k-1} y_i' = c_{2k-1}+\frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

$$(9)\quad \sum_0^k y_i''=c_0+\frac{1}{H_0},\ \sum_0^k x_i'' y_i''=c_1-\frac{h}{H_0},\ \sum_0^k (x_i'')^2 y_i''=c_2+\frac{h^2}{H_0}, \ldots$$

$$\ldots \sum_0^k (x_i'')^{2k-1} y_i'' = c_{2k-1}-\frac{h^{2k-1}}{H_0}.$$

Ces équations jointes aux équations (7) vont nous servir à déterminer le maximum et le minimum de la somme

$$y^{(0)}_{\mu} + y^{(0)}_{\mu+1} + \ldots + y^{(0)}_{k-1}$$

pour la solution des équations (7) auxquelles se réduisent les équations (2). Et, cette somme-là, comme nous l'avons vu, pour $\mu = i$, $\mu = i+1$, va nous fournir les limites entre lesquelles reste comprise la somme

$$u^2_{\eta} + u^2_{\eta+1} + u^2_{\eta+2} + \ldots + u^2_{p-1}$$

pour toutes les solutions réelles des équations (1), quelque grand que soit le nombre des inconnues.

§ 4. Pour trouver le maximum et le minimum de la somme

$$y^{(0)}_{\mu} + y^{(0)}_{\mu+1} + \ldots + y^{(0)}_{k-1},$$

composée des quantités $y^{(0)}_{\mu}, y^{(0)}_{\mu+1}, \ldots y^{(0)}_{k-1}$ données par les équations (7) pour $e_0, e_1, e_2, \ldots e_{2k-1}$ qui restent entre les limites

$$-\frac{1}{H_0}, \ -\frac{h}{H_0}, \ -\frac{h^2}{H_0}, \ldots -\frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

et

$$\frac{1}{H_0}, \ \frac{h}{H_0}, \ \frac{h^2}{H_0}, \ldots \frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

cherchons la différentielle de la somme

$$y^{(0)}_{\mu} + y^{(0)}_{\mu+1} + \ldots + y^{(0)}_{k-1}$$

par rapport aux quantités $e_0, e_1, e_2, \ldots e_{2k-1}$.

En désignant par σ un des nombres $0, 1, 2, \ldots 2k-1$, nous voyons que les équations (7), différentiées par rapport à e_σ, nous donnent les égalités suivantes

$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma}(x_i^{(0)})^0 = 0,$$
$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} x_i^{(0)} + \sum 1 \,.\, y_i^{(0)} (x_i^{(0)})^0 \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} = 0,$$
$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma}(x_i^{(0)})^2 + \sum 2\, y_i^{(0)} x_i^{(0)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma}(x_i^{(0)})^{\sigma-1} + \sum (\sigma-1)\, y_i^{(0)} (x_i^{(0)})^{\sigma-2} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} = 0,$$
$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma}(x_i^{(0)})^{\sigma} + \sum \sigma y_i^{(0)} (x_i^{(0)})^{\sigma-1} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} = -(-1)^\sigma,$$

$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma}(x_i^{(0)})^{\sigma+1} + \sum (\sigma+1) y_i^{(0)} (x_i^{(0)})^\sigma \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} = 0,$$

. . . .

$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma}(x_i^{(0)})^{2k-1} + \sum (2k-1) y_i^{(0)} (x_i^{(0)})^{2k-2} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} = 0.$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots k-1).$$

En multipliant ces équations par les constantes arbitraires

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_{2k-1}$$

et les additionnant, nous trouvons

$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma}\left[\lambda_0 + \lambda_1 x_i^{(0)} + \ldots + \lambda_{2k-1} (x_i^{0})^{2k-1}\right] +$$

$$+ \sum y_i^{(0)} \left[1.\lambda_1 + 2\lambda_2 x_i^{(0)} + \ldots + (2k-1) \lambda_{2k-1} (x_i^{0})^{2k-2}\right] \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} = -(-1)^\sigma \lambda_\sigma,$$

ce qu'on peut présenter, plus succinctement, comme il suit

$$\sum \frac{\partial y_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} \theta(x_i^{(0)}) + \sum y_i^{(0)} \theta'(x_i^{(0)}) \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial e_\sigma} = -(-1)^\sigma \lambda_\sigma,$$

à l'aide de la fonction entière $\theta(x)$ définie par l'égalité

$$\theta(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{2k-1} x^{2k-1}.$$

Pour déduire de là l'expression de la dérivée

$$\frac{\partial [y^{(0)}{}_\mu + y^{(0)}{}_{\mu+1} + \ldots + y^{(0)}{}_{k-1}]}{\partial e_\sigma},$$

donnons aux constantes arbitraires

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_{2k-1}$$

de telles valeurs que la fonction

$$\theta(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{2k-1} x^{2k-1}$$

satisfasse aux $2k$ conditions qui la déterminent complétement

(10) $$\theta'(x_0^{(0)}) = \theta'(x_1^{(0)}) = \ldots = \theta'(x^{(0)}{}_{k-1}) = 0,$$

(11) $$\theta(x_0^{(0)}) = \theta(x_1^{(0)}) = \ldots = \theta(x^{(0)}{}_{\mu-1}) = 0,$$

(12) $$\theta(x_\mu^{(0)}) = \theta(x^{(0)}{}_{\mu+1}) = \ldots = \theta(x^{(0)}{}_{k-1}) = 1.$$

Toutes ces conditions remplies à l'égard de la fonction $\theta(x)$, l'équation obtenue ci-dessus se réduira à l'égalité

(13) $$\frac{\partial [y^{(0)}{}_\mu + y^{(0)}{}_{\mu+1} + \ldots + y^{(0)}{}_{k-1}]}{\partial e_\sigma} = -(-1)^\sigma \lambda_\sigma,$$

qui donne l'expression de la dérivée cherchée d'après un des coefficients de la fonction entière

$$\theta(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_{2k-1} x^{2k-1},$$

déterminée par les équations (10), (11), (12)*). Pour déterminer le signe de cette dérivée, défini à l'aide de celui du coefficient λ_0 de la fonction $\theta(x)$, remarquons que d'après (10) on satisfait à l'équation

$$\theta'(x) = 0$$

par les k quantités

$$x_0^{(0)},\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots x^{(0)}_{k-1}.$$

De plus, on y doit satisfaire par certaines autres quantités situées dans chacun des $\mu - 1$ intervalles entre

$$x_0^{(0)},\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots x^{(0)}_{\mu-1},$$

et dans chacun des $k - \mu - 1$ intervalles entre

$$x^{(0)}_{\mu},\ x^{(0)}_{\mu+1},\ x^{(0)}_{\mu+2},\ldots x^{(0)}_{k-1},$$

car d'après (11), (12) on a

$$\theta(x_0^{(0)}) = \theta(x_1^{(0)}) = \theta(x_2^{(0)}) = \ldots = \theta(x^{(0)}_{\mu-1}),$$
$$\theta(x^{(0)}_{\mu}) = \theta(x^{(0)}_{\mu+1}) = \theta(x^{(0)}_{\mu+2}) = \ldots = \theta(x^{(0)}_{k-1}).$$

En remarquant que le nombre de ces intervalles plus le nombre des quantités

$$x_0^{(0)},\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots x^{(0)}_{k-1},$$

donne la somme $2k - 2$, égale au degré de l'équation

$$\theta'(x) = 0,$$

nous en concluons que

1) toutes les racines de l'équation

$$\theta'(x) = 0$$

ont de valeurs réelles;

2) toutes ces racines sont simples;

3) k de ces racines sont égales aux quantités

$$x_0^{(0)},\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots x^{(0)}_{k-1},$$

---

*) Ce polynome $\theta(x)$ peut être présenté par la formule

$$\Phi^2(x) \sum_{i=\mu}^{i=k} \frac{\Phi'(x_i^{(0)}) - (x - x_i^{(0)})\,\Phi''(x_i^{(0)})}{(x - x_i^{(0)})^2\,[\Phi'(x_i^{(0)})]^3},$$

où

$$\Phi(x) = (x - x_0^{(0)})\,(x - x_1^{(0)})\ldots(x - x^{(0)}_{k-1}).$$

et $k-2$ autres sont situées séparément dans chacun des intervalles entre les quantités

$$x_0^{(0)},\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots x^{(0)}_{\mu-1},$$
$$x^{(0)}_{\mu},\ x^{(0)}_{\mu+1},\ x^{(0)}_{\mu+2},\ldots x^{(0)}_{k-1}.$$

D'où l'on voit que l'équation

$$\theta'(x)=0$$

n'aura pas de racines ni hors des limites

$$x=x_0^{(0)},\ x=x^{(0)}_{k-1},$$

ni dans l'intervalle entre $x^{(0)}_{\mu-1}$, $x^{(0)}_{\mu}$ et, comme, d'après ce qui a été dit,

$$x_0^{(0)}>0,$$

il s'en suit que toutes les racines de cette équation ont de valeurs positives.

En s'appuyant sur ce résultat, il n'est pas difficile de déterminer les signes des coefficients

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots\lambda_{2k-1}$$

dans le polynome

$$\theta(x)=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\ldots+\lambda_{2k-1}x^{2k-1}.$$

De ce que l'équation

$$\theta'(x)=0$$

n'a pas de racines entre

$$x=x^{(0)}_{\mu-1},\ x=x_{\mu}^{(0)}$$

il s'en suit que dans cet intervalle la dérivée $\theta'(x)$ ne change pas de signe; de ce que d'après (11), (12)

$$\theta(x^{(0)}_{\mu-1})=0,\ \theta(x_{\mu}^{(0)})=1,$$

le signe constant de $\theta'(x)$ dans cet intervalle doit être $+$. D'où l'on voit que la fonction $\theta'(x)$, en s'annulant pour $x=x^{(0)}_{\mu-1}$, va nous présenter la variation de signes suivante: $-+$.

Il en est de même, lorsque x franchit

$$x=x_0^{(0)},\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ldots x^{(0)}_{\mu-2},$$

les racines simples de l'équation

$$\theta'(x)=0,$$

car dans chacun des intervalles entre ces racines il se trouve une racine

simple de notre équation. On voit de là que, x franchissant $x = x_0$, la fonction $\theta'(x)$ passe de — à +, et comme l'équation

$$\theta'(x) = 0$$

n'a pas de racines hors des limites $x = x_0^{(0)}$, $x = x^{(0)}_{k-1}$, il en résulte que la dérivée $\theta'(x)$ reste négative pour toutes les valeurs de x inférieures à $x_0^{(0)}$. D'où il suit que la dérivée $\theta'(x)$, pour $x = 0$, a une valeur négative et que la fonction primitive $\theta(x)$ décroît entre $x = 0$, $x = x_0^{(0)}$. Et cela, en vertu des égalités (11) qui donnent

$$\theta(x_0^{(0)}) = 0,$$

ne peut avoir lieu que pour $\theta(o) > 0$.

Après avoir établi ainsi que $\theta'(o) < 0$, $\theta(o) > 0$, nous en concluons que dans la fonction

$$\theta(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{2k-1} x^{2k-1}$$

le premier terme est positif et le deuxième est négatif. Quant à ses autres termes, leurs signes se déterminent aisément d'après celui de λ_1, en s'appuyant sur ce fait que toutes les racines de l'équation

$$\theta'(x) = \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \ldots + (2k-1)\lambda_{2k-1} x^{2k-2},$$

comme nous l'avons vu, ont de valeurs positives, et en conséquence la série

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_{2k-1}$$

ne présente que des variations de signes. Nous trouvons ainsi que le coefficient λ_σ, quelque soit σ, doit avoir le même signe que $(-1)^\sigma$.

§ 5. D'après ce que nous venons d'établir à l'égard du signe de λ_σ, l'équation (13) donne pour toutes les valeurs de σ

$$\frac{\partial(y_\mu^{(0)} + y^{(0)}_{\mu+1} + \ldots + y^{(0)}_{k-1})}{\partial e_\sigma} < 0.$$

D'où l'on voit que, lorsque les quantités e_0, e_1, $e_2, \ldots e_{2k-1}$ croissent entre les limites considérées

$$-\frac{1}{H_0},\ -\frac{h}{H_0},\ -\frac{h^2}{H_0}, \ldots -\frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

$$\frac{1}{H_0},\ \frac{h}{H_0},\ \frac{h^2}{H_0}, \ldots \frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

la somme

$$y_\mu^{(0)} + y^{(0)}_{\mu+1} + \ldots + y^{(0)}_{k-1}$$

diminue; on trouvera donc son minimum entre ces limites pour

$$e_0=\frac{1}{H_0},\ e_1=\frac{h}{H_0},\ e_2=\frac{h^2}{H_0},\dots e_{2k-1}=\frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

ou maximum pour

$$e_0=-\frac{1}{H_0},\ e_1=-\frac{h}{H_0},\ e_2=-\frac{h^2}{H_0},\dots e_{2k-1}=-\frac{h^{2k-1}}{H_0}.$$

Comme, d'après notre notation (§ 3),

$$y'_0,\ y'_1,\ y'_2,\dots y'_{k-1}$$

donnent les quantités auxquelles se réduisent

$$y_0^{(0)},\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\dots y^{(0)}_{k-1}$$

pour

$$e_0=\frac{1}{H_0},\ e_1=\frac{h}{H_0},\ e_2=\frac{h^2}{H_0},\dots e_{2k-1}=\frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

et

$$y_0'',\ y_1'',\ y_2'',\dots y''_{k-1}$$

ses mêmes quantités pour

$$e_0=-\frac{1}{H_0},\ e_1=-\frac{h}{H_0},\ e_2=-\frac{h^2}{H_0},\dots e_{2k-1}=-\frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

nous en déduisons, en vertu de ce qu'on a établi à l'égard du maximum et du minimum de la somme

$$y_\mu^{(0)}+y^{(0)}_{\mu+1}+\dots+y^{(0)}_{k-1},$$

les inégalités

(14) $$y^{(0)}_\mu+y^{(0)}_{\mu+1}+\dots+y^{(0)}_{k-1}>y'_\mu+y'_{\mu+1}+\dots+y'_{k-1},$$

(15) $$y_\mu^{(0)}+y^{(0)}_{\mu+1}+\dots+y^{(0)}_{k-1}<y_\mu''+y''_{\mu+1}+\dots+y''_{k-1}.$$

En passant aux solutions des équations (1) correspondant au nombre arbitrairement grand des inconnues, posons d'après (6)

$$C_0=c_0-e_0,\ C_1=c_1+e_1,\ C_2=c_2-e_2\dots C_{2k-1}=c_{2k-1}+e_{2k-1},$$

où

$$e_0,\ e_1,\ e_2,\dots e_{2k-1}$$

sont des quantités comprises entre les limites indiquées dans le § 3.

Comme, d'après notre notation, pour ces valeurs de

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\dots C_{2k-1}$$

on a

$$x_0=x_0^{(0)},\ x_1=x_1^{(0)},\ x_2=x_2^{(0)},\dots x_{k-1}=x^{(0)}_{k-1},$$

$$y_0=y_0^{(0)},\ y_1=y_1^{(0)},\ y_2=y_2^{(0)},\dots y_{k-1}=y^{(0)}_{k-1},$$

nous en concluons, d'après le § 2, que pour $s_\eta < x_i^{(0)}$ on doit avoir

$$u^2_\eta + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1} > y^{(0)}_{i+1} + y^{(0)}_{i+2} + \ldots + y^{(0)}_{k-1},$$

et dans le cas $s_\eta > x_i^{(0)}$ on doit avoir

$$u^2_\eta + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1} < y_i^{(0)} + y^{(0)}_{i+1} + \ldots + y^{(0)}_{k-1}.$$

Or, en remarquant que pour $\mu = i+1$ l'inégalité (14) donne

$$y^{(0)}_{i+1} + y^{(0)}_{i+2} + \ldots + y^{(0)}_{k-1} > y'_{i+1} + y'_{i+2} + \ldots + y'_{k-1},$$

et pour $\mu = i$ l'inégalité (15) donne

$$y_i^{(0)} + y^{(0)}_{i+1} + \ldots + y^{(0)}_{k-1} < y''_i + y''_{i+1} + \ldots + y''_{k-1},$$

nous en tirons

$$u_\eta^2 + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1} > y'_{i+1} + y'_{i+2} + \ldots + y'_{k-1}$$

pour le cas

(16) $$s_\eta < x_i^{(0)},$$

et

$$u_\eta^2 + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1} < y_i'' + y''_{i+1} + \ldots + y''_{k-1}$$

pour le cas

(17) $$s_\eta > x_i^{(0)}.$$

Mais, d'après ce qu'on a démontré à la fin du Mémoire mentionnée dans le § 3, on a dans nos hypothèses, pour chaque l,

$$x_l^{(0)} \leqq x_l^{(\prime)}, \quad x_l^{(0)} \geqq x_l^{(\prime\prime)};$$

donc l'inégalité (16) aura lieu necéssairement pour $s_\eta < x_i''$; ainsi que l'inégalité (17) pour $s_\eta > x_i'$.

Par conséquent nous aurons l'inégalité

$$u_\eta^2 + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1} > y'_{i+1} + y'_{i+2} + \ldots + y'_{k-1}$$

toutes les fois que $s_\eta < x_i''$ et l'inégalité

$$u_\eta^2 + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1} < y_i'' + y''_{i+1} + \ldots + y''_{k-1},$$

dans le cas $s_\eta > x_i'$.

Ainsi, de la solution des équations (8), (9) aux $2k$ inconnues on peut déduire les limites supérieure et inférieure de la somme

$$u^2_\eta + u^2_{\eta+1} + \ldots + u^2_{p-1},$$

composée des carrés des valeurs des inconnues

$$u_\eta,\ u_{\eta+1}, \ldots u_{p-1}$$

pour toutes les solutions réelles des équations, quelque grand que soit le nombre des inconnues. Les quantités données C_0, C_1, $C_2, \ldots C_{2k-1}$ peuvent plus ou moins différer ici des quantités c_0, c_1, $c_2, \ldots c_{2k-1}$, pourvu que les différences

$$C_0 - c_0,\ C_1 - c_1,\ C_2 - c_2, \ldots C_{2k-1} - c_{2k-1}$$

restent comprises respectivement entre les limites

$$-\frac{1}{H_0},\ -\frac{h}{H_0},\ -\frac{h^2}{H_0}, \ldots -\frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

et

$$\frac{1}{H_0},\ \frac{h}{H_0},\ \frac{h^2}{H_0}, \ldots \frac{h^{2k-1}}{H_0},$$

où h, H_0 sont des quantités positives assujetties aux conditions énoncées dans le § 3. Quant aux quantités

$$x_0',\ x_1',\ x_2', \ldots x'_{k-1},$$
$$y_0',\ y_1',\ y_2', \ldots y'_{k-1},$$
$$x_0'',\ x_1'',\ x_2'', \ldots x''_{k-1},$$
$$y_0'',\ y_1'',\ y_2'', \ldots y''_{k-1},$$

elles s'obtiennent aisément, comme nous l'avons déjà dit dans le § 1, à l'aide du développement des expressions

$$\frac{c_0 - \frac{1}{H_0}}{x} + \frac{c_1 + \frac{h}{H_0}}{x^2} + \frac{c_2 - \frac{h^2}{H_0}}{x^3} + \ldots + \frac{c_{2k-1} + \frac{h^{2k-1}}{H_0}}{x^{2k}},$$

$$\frac{c_0 + \frac{1}{H_0}}{x} + \frac{c_1 - \frac{h}{H_0}}{x^2} + \frac{c_2 + \frac{h^2}{H_0}}{x^3} + \ldots + \frac{c_{2k-1} - \frac{h^{2k-1}}{H_0}}{x^{2k}},$$

en fractions continues qui, à leur tour, en vertu de ce qu'on a montré dans le Mémoire cité dans le § 3, s'obtiennent bien facilement à l'aide de la fraction continue résultant du développement de l'expression

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots + \frac{c_{2k-1}}{x^{2k}}.$$

NOTES ET EXTRAITS.

Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions.

Bulletin de la société mathématique de France, tome troisième, III, année 1874—75, p. 165.
Séance du 21 juillet 1875.

Si une fonction entière, entre deux limites quelconques de la variable, s'écarte peu de zéro, et qu'elle ait une valeur considérable en dehors de ces limites, il est certain que la fonction est d'un degré élevé. Quelle est donc la formule qui donne la limite du degré de la fonction entière, d'après ces écarts de zéro, pour des valeurs de la variable comprises entre certaines limites, et de sa valeur au delà de ce champ. En cherchant à resoudre ce problème d'après les méthodes exposées dans notre Mémoire *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*, nous sommes parvenu à ce théorème très-simple.

Théorème. Si $f(x)$ est une fonction entière du degré n, qui, depuis $x = -l$ jusqu'à $x = +l$, ne sorte des limites $-L$ et $+L$ et que pour toutes les valeurs de x en dehors des limites nommées $x = -l$, $x = +l$ les valeurs de la fonction $f(x)$ soient en dehors des limites $-L$ et $+L$, on aura

$$\left(\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-l^2}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-l^2}}\right)^n \geqq \frac{\sqrt{[f(x)]^2}+\sqrt{[f(x)]^2-L^2}}{\sqrt{[f(x)]^2}-\sqrt{[f(x)]^2-L^2}},$$

en donnant aux radicaux les valeurs positives.

Sur la généralisation de la formule de M. Catalan et sur une formule arithmétique qui en résulte.

Association française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 5-me session. Clermont-Ferrand. 1876. Séance du 22 août, p. 114—117. Nouvelle correspondance mathématique redigée par Eugène Catalan. T. II).

M. Catalan vient de faire cette remarque importante que la limite de la somme

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

pour $n=\infty$, qu'on trouve égale à log 2, résulte de l'identité

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

facile à vérifier. Cette identité, remarquée par M. Catalan, et qui rend très-nette la convergence de la somme

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

vers log 2, quand n croît indéfiniment, mérite d'autant plus d'attention qu'elle peut être facilement généralisée, et donner lieu à une formule arithmétique d'un genre tout nouveau. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans cette communication.

En effet, si dans les fractions qui composent le premier membre de l'identité

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

on remplace les unités par les termes d'une série quelconque

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,\ u_{2n},$$

on trouve que le second membre se réduit à

$$\frac{u_{2n+2}}{n+1}+\frac{u_{2n+4}}{n+2}+\ldots+\frac{u_{4n}}{2n}+\frac{u_1-u_2}{1}+\frac{u_2-u_4}{2}+\ldots+\frac{u_{2n}-u_{4n}}{2n}.$$

D'où il suit qu'en faisant

$$v_x=u_x-u_{2x},$$

on aura cette identité

$$\frac{u_1}{1}-\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}-\ldots-\frac{u_{2n}}{2n}=\frac{u_{2n+2}}{n+1}+\frac{u_{2n+4}}{n+2}+\ldots+\frac{u_{4n}}{2n}+\frac{v_1}{1}+\frac{v_2}{2}+\ldots+\frac{v_{2n}}{2n}.$$

Passant au cas de $n=\infty$, et en observant que, pour cette valeur de n, la somme

$$\frac{u_{2n+2}}{n+1}+\frac{u_{2n+4}}{n+2}+\ldots+\frac{u_{4n}}{2n}$$

devient

$$\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).\ \lim u_n=u_\infty \log 2,$$

on trouve

$$(1)\qquad u_\infty \log 2=\frac{u_1}{1}-\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}-\ldots-\left(\frac{v_1}{1}+\frac{v_2}{2}+\frac{v_3}{3}+\ldots\right),$$

où les quantités v_1, v_2, v_3. . . ., sont déterminées par la relation

$$(2)\qquad v_x=u_x-u_{2x}.$$

Pour montrer le parti qu'on peut tirer de la formule (1), nous poserons

$$u_x=\frac{E(ax)}{x},$$

où a est une quantité positive quelconque, et le signe E désigne à l'ordinaire la partie entière de la quantité placée sous ce signe.

Pour cette valeur de u_x, nous trouvons, d'après (2),

$$v_x=\frac{E(ax)}{x}-\frac{E(2ax)}{2x}=\frac{2E(ax)-E(2ax)}{2x};$$

d'ailleurs la différence

$$2E(ax)-E(2ax)$$

se réduit évidemment à 0 ou à -1, suivant que le nombre $E(2ax)$ est pair ou impair; par conséquent, on a

$$2E(ax)-E(2ax)=-\frac{1-(-1)^{E(2ax)}}{2},$$

et, par suite,

$$v_x=-\frac{1-(-1)^{E(2ax)}}{4x}.$$

En portant ces valeurs de u_x et v_x dans la formule (1), et en observant que pour x infini

$$u_x=\frac{E(ax)}{x}$$

devient a, on obtient cette formule

$$a \log 2 = \frac{E(a)}{1^2} - \frac{E(2a)}{2^2} + \frac{E(3a)}{3^2} - \dots\dots$$
$$+ \frac{1-(-1)^{E(2a)}}{4\,.\,1^2} + \frac{1-(-1)^{E(4a)}}{4\,.\,2^2} + \frac{1-(-1)^{E(6a)}}{4\,.\,3^2} + \dots\dots,$$

qui se réduit à celle-ci:

$$a \log 2 = \frac{4E(a)-(-1)^{E(2a)}}{4\,.\,1^2} - \frac{4E(2a)+(-1)^{E(4a)}}{4\,.\,2^2} + \frac{4E(3a)-(-1)^{E(6a)}}{4\,.\,3^2} - \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots\right);$$

Mais on a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots = \frac{\pi^2}{6};$$

il en résulte

$$a \log 2 = \frac{4E(a)-(-1)^{E(2a)}}{4\,.\,1^2} - \frac{4E(2a)+(-1)^{E(4a)}}{4\,.\,2^2} + \frac{4E(3a)-(-1)^{E(6a)}}{4\,.\,3^2} - \dots + \frac{\pi^2}{24}.$$

D'après cette formule nous trouvons

$$4a \log 2 - \frac{\pi^2}{6} = \frac{4E(a)-(-1)^{E(2a)}}{1^2} - \frac{4E(2a)+(-1)^{E(4a)}}{2^2} + \frac{4E(3a)-(-1)^{E(6a)}}{3^2} - \dots;$$

et, en posant ici

$$4a \log 2 - \frac{\pi^2}{6} = X,$$

ce qui suppose

$$a = \frac{6X+\pi^2}{24 \log 2},$$

nous parvenons à ce développement de la quantité X en série composée de fractions ayant pour dénominateurs 1^2, 2^2, 3^2,....

$$X = \frac{4E\left(\frac{6X+\pi^2}{24 \log 2}\right) - (-1)^{E\left(2\,\frac{6X+\pi^2}{24 \log 2}\right)}}{1^2}$$
$$- \frac{4E\left(2\,\frac{6X+\pi^2}{24 \log 2}\right) + (-1)^{E\left(4\,\frac{6X+\pi^2}{24 \log 2}\right)}}{2^2}$$
$$+ \frac{4E\left(3\,\frac{6X+\pi^2}{24 \log 2}\right) - (-1)^{E\left(6\,\frac{6X+\pi^2}{24 \log 2}\right)}}{3^2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sur une transformation de séries numériques.

(Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Paris. Séance du 26 août 1878
Nouvelle correspondance mathématique redigée par Eugène Catalan. T. IV. 1878, p. 305—308).

1. Il y a déjà plus d'un quart de siècle, Alphonse de Polignac et moi, nous avons publié nos recherches sur la Répartition des nombres premiers. Ces recherches diffèrent, essentiellement, de ce qu'on a fait, avant nous, sur le même sujet. Nous avons donné des valeurs *limitatives* de fonctions dont on n'avait que des valeurs *asymptotiques*. La base de ces recherches est une *formule qui remplace la somme des logarithmes de tous les nombres entiers (jusqu'à une certaine limite) par des sommes relatives à des nombres premiers*. Voici cette formule:

$$\log 2 + \log 3 + \log 4 + \ldots + \log(a) = \psi(a) + \psi\left(\frac{a}{2}\right) + \psi\left(\frac{a}{3}\right) + \ldots \quad \text{(A)}$$

Dans le second membre,

$$\psi\left(\frac{a}{n}\right) = \theta\left(\frac{a}{n}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{a}{n}}\right) + \theta\left(\sqrt[4]{\frac{a}{n}}\right) + \ldots, \quad \text{(B)}$$

$\theta(k)$ désignant, en général, *la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas k.*

La formule (A) diffère essentiellement, nous venons de le dire, de celles que l'on connaissait autrefois. Parmi celles-ci, l'une des plus importantes est la relation

$$1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} + \frac{1}{4^\rho} + \ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^\rho} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^\rho} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^\rho} \cdots, \quad \text{(C)}$$

dont le second membre ne contient que les nombres premiers.

2. En cherchant à rapprocher les formules (A) et (C), je suis parvenu à reconnaitre qu'elles découlent d'une même égalité:

$$\left.\begin{aligned} &\log 2 . f(2) + \log 3 . f(3) + \log 4 . f(4) + \log 5 . f(5) + \ldots \\ &= \log 2 . F(2) + \log 3 . F(3) + \log 5 . F(5) + \log 7 . F(7) + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad \text{(D)}$$

les fonctions $f(x)$, $F(x)$ ayant une relation convenable. Cette relation, très-simple, est

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty} f(nx^m)\ ^{*)} \tag{E}$$

3. Soit $f(x)=\frac{1}{x^\rho}$, la variable x et l'exposant ρ étant supérieurs à l'unité. Nous aurons

$$f(nx^m)=\frac{1}{(nx^m)^\rho};$$

puis

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^\rho}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{x^{m\rho}}.$$

Comme

$$\sum_1^\infty \frac{1}{x^{m\rho}}=\frac{1}{x^\rho}+\frac{1}{x^{2\rho}}+\frac{1}{x^{3\rho}}+\ldots=\frac{1}{x^\rho-1},$$

la valeur de $F(x)$ se réduit à

$$\frac{1}{x^\rho-1}\sum_1^\infty\frac{1}{n^\rho},$$

et l'égalité (D) devient

$$\frac{\log 2}{2^\rho}+\frac{\log 3}{3^\rho}+\frac{\log 4}{4^\rho}+\frac{\log 5}{5^\rho}+\ldots=\left[\frac{\log 2}{2^\rho-1}+\frac{\log 3}{3^\rho-1}+\frac{\log 5}{5^\rho-1}+\frac{\log 7}{7^\rho-1}+\ldots\right]\sum_1^\infty\frac{1}{n^\rho}.$$

Le premier membre est, au signe près, la dérivée de $\sum_1^\infty\frac{1}{n^\rho}$, par rapport à ρ. Ainsi

$$-\frac{\dfrac{d.\sum_1^\infty\frac{1}{n^\rho}}{d\rho}}{\sum_1^\infty\frac{1}{n^\rho}}=\frac{\log 2}{2^\rho-1}+\frac{\log 3}{3^\rho-1}+\frac{\log 5}{5^\rho-1}+\frac{\log 7}{7^\rho-1}+\ldots.$$

Intégrant, de ρ quelconque à ρ infini, on a donc

$$\log\sum\frac{1}{n^\rho}=-\log\left(1-\frac{1}{2^\rho}\right)-\log\left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)-\log\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)-\ldots$$
$$=\log\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{3^\rho}\right)\left(1-\frac{1}{5^\rho}\right)\ldots};$$

puis la formule (C).

*) Les fonctions $f(x)$, $F(x)$ peuvent être continues ou discontinues: il suffit que les séries résultantes soient convergentes.

4. Si l'on suppose

$$f(x) = 1$$

pour $x \overline{\overline{<}} a$, et

$$f(x) = 0$$

pour $x > a$, nous trouvons que la somme

$$\log 2\, f(2) + \log 3\, f(3) + \log 4\, f(4) + \ldots$$

se réduit à la somme des logarithmes des nombres 2, 3, 4,.... $E(a)$; et alors notre formule (D) donne la décomposition de cette somme en plusieurs sommes composées des seuls nombres premiers, décomposition qui était la base des recherches faites sur les nombres premiers par A. de Polignac et moi.

5. En donnant d'autres valeurs à la fonction $f(x)$, on obtient de nouvelles formules, qui peuvent avoir d'utiles applications. On trouve, par exemple, que *la somme*

$$e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - e^{-13c} - e^{-17c} + \ldots$$

croît indéfiniment, quand c tend vers zéro.

Comme les termes de la série, pour $c = 0$, se réduisent à ± 1, selon que les facteurs correspondants ont la forme $4n + 3$ ou la forme $4n + 1$, on est conduit à cette conclusion: *Il y a une différence notable dans la répartition des nombres premiers des deux formes* $4n + 3$, $4n + 1$: *la première forme en contient beaucoup plus que la seconde.*

Sur la coupe des vêtements.

(Association française pour l'avancement des sciences. 7 session. Paris. Séance du 28 août 1878).

Après avoir indiqué que l'idée de cette étude lui est venue lors de la communication faite, il y a deux ans, au Congrès de Clermont-Ferrand, par M. Edouard Lucas, sur la géometrie du tissage des étoffes à fils rectilignes, M. Tchébichef pose les principes généraux pour déterminer les courbes suivant lesquelles on doit couper les differents morceaux d'une étoffe, pour en faire une gaine bien ajustée, servant à envelopper un corps de forme quelconque.

En prenant pour point de départ ce principe d'observation que dans la déformation d'un tissu on ne doit considérer d'abord, dans une première approximation, que l'altération des angles respectifs formés par les fils de chaîne et les fils de trame, sans tenir compte de l'allongement des fils, il donne les formules qui permettent de déterminer les contours imposés à deux, trois ou quatre morceaux d'étoffe pour recouvrir la surface d'une sphère, avec la meilleure approximation désirable. M. Tchébichef présente à la section une balle de caoutchouc recouverte d'une étoffe dont les deux morceaux ont été coupés suivant ses indications; il fait observer que le problème différerait essentiellement si l'on remplaçait l'étoffe par une peau. D'ailleurs les formules proposées par M. Tchébichef donnent aussi la méthode à suivre pour la juxtaposition des pièces par la couture.

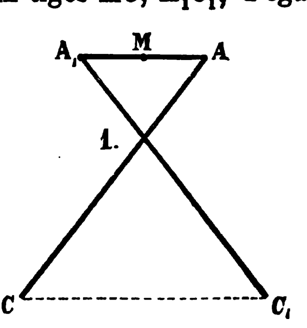
Conformément à la volonté de Tchebychef, l'étude «Sur la coupe des habits» trouvée dans ses papiers ne doit pas être imprimée, car le manuscrit ne porte pas l'inscription: «*imprimer*».

Sur les parallélogrammes les plus simples symétriques autour d'un axe.

(Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Paris. Séance du 29 août 1878
Школа Математики чистой и прикладной 1885).

§ 1. A l'Exposition universelle on peut voir actuellement les différentes applications d'un parallélogramme articulé, que j'ai trouvé d'après un théorème sur les fonctions qui s'approchent le plus de zéro. Ce parallélogramme, ne contenant que trois tiges droites, donne le mouvement rectiligne avec une approximation très-notable, qui surpasse celle qu'on obtient par les parallélogrammes composés des mêmes éléments, c'est-à-dire par le parallélogramme simple de Watt et le mécanisme d'Evans.

§ 2. Ce parallélogramme est composé de deux tiges AC, A_1C_1, d'égale longueur, qui tournent autour de deux points fixes C, C_1 et sont reliées à leurs bouts A, A_1 par une troisième tige AA_1 (fig. 1). C'est le milieu M de cette dernière tige qui décrit une ligne droite avec une précision considérable, toutes les fois que les longueurs des tiges AC, A_1C_1 et la distance CC_1 des points fixes C, C_1 remplissent les conditions suivantes:

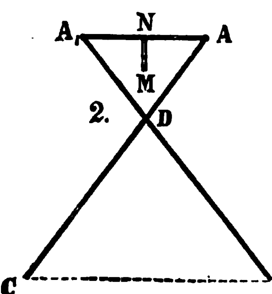


1. La distance CC_1 doit être rigoureusement égale au tiers de la somme de lignes AC, AA_1, A_1C_1.

2. La longueur de la tige AA_1 doit surpasser le quart de celle des tiges AC, A_1C_1, mais ne doit pas différer notablement de cette limite.

A mesure que la différence $AA_1 - \frac{1}{4} AC$ tend vers zéro, la longueur de la portion sensiblement rectiligne de la courbe décrite par le point M diminue, mais en même temps la rigueur avec laquelle elle représente une ligne droite croît plus rapidement que ne diminue sa longueur.

§ 3. Je vais montrer maintenant les résultats auxquels je suis parvenu en examinant un mécanisme un peu plus compliqué que le précédent. Ce mécanisme est composé des mêmes éléments, cependant le point qui décrit sensiblement une ligne droite ne se trouve plus sur la ligne AA_1, mais sur une perpendiculaire NM, menée de son milieu (fig. 2).



D'après la méthode que nous venons de mentionner, on reconnaît que pour la précision du jeu de ce mécanisme, il est indispensable que $c=MN$ ait la valeur suivante:

$$(1)\quad c=\frac{a}{r\cos^2\varphi}\left[\left(\frac{3}{2}r\cos\varphi-a\right)\sin\varphi-(r\cos\varphi-a)\sqrt{\frac{2r\cos\varphi-a}{r\cos\varphi-a}}\right].$$

Dans cette formule r et a désignent les longueurs des lignes $AC=A_1C_1$ et AA_1, et φ la valeur commune des angles ACC_1, A_1C_1C, A_1AC, AA_1C_1 dans la position moyenne du mécanisme.

§ 4. Toutes les fois que le lieu du point M est choisi conformément à la formule (1) et que la différence

$$(2)\qquad \sqrt{\frac{2r\cos\varphi-a}{r\cos\varphi-a}}-2\sin\varphi$$

ne s'éloigne pas trop de zéro, ce mécanisme donne le mouvement rectiligne avec une précision notable. Cette précision croît à mesure que la différence (2) s'approche de zéro, mais en même temps la longueur de l'arc qui jouit de cette précision diminue.

Dans le cas où l'on a rigoureusement

$$(3)\qquad \sqrt{\frac{2r\cos\varphi-a}{r\cos\varphi-a}}-2\sin\varphi=0,$$

cette longueur se réduit à zéro, et alors la courbe décrite par le point M a un contact du 5me ordre avec une ligne droite.

Nous allons nous arrêter sur ce cas-limite, vers lequel converge notre mécanisme à mesure que la précision de son jeu va en augmentant, et dont il diffère peu, si cette précision est suffisante.

§ 5. Pour ce cas-limite, d'après les équations (1), (3), nous trouvons:

$$a=\frac{2\cos^2\varphi\cos2\varphi}{\cos3\varphi}r;\qquad c=\frac{\cos^2\varphi\cos2\varphi\,\mathrm{tang}\,3\varphi}{\cos3\varphi}r.$$

En partant de ces valeurs de $AA_1=a$, $MN=c$ et remarquant que l'on a $AC=A_1C_1=r$, on trouve au moyen des triangles CDC_1 et ADA_1 la formule suivante pour la détermination de $CC_1=b$, à savoir

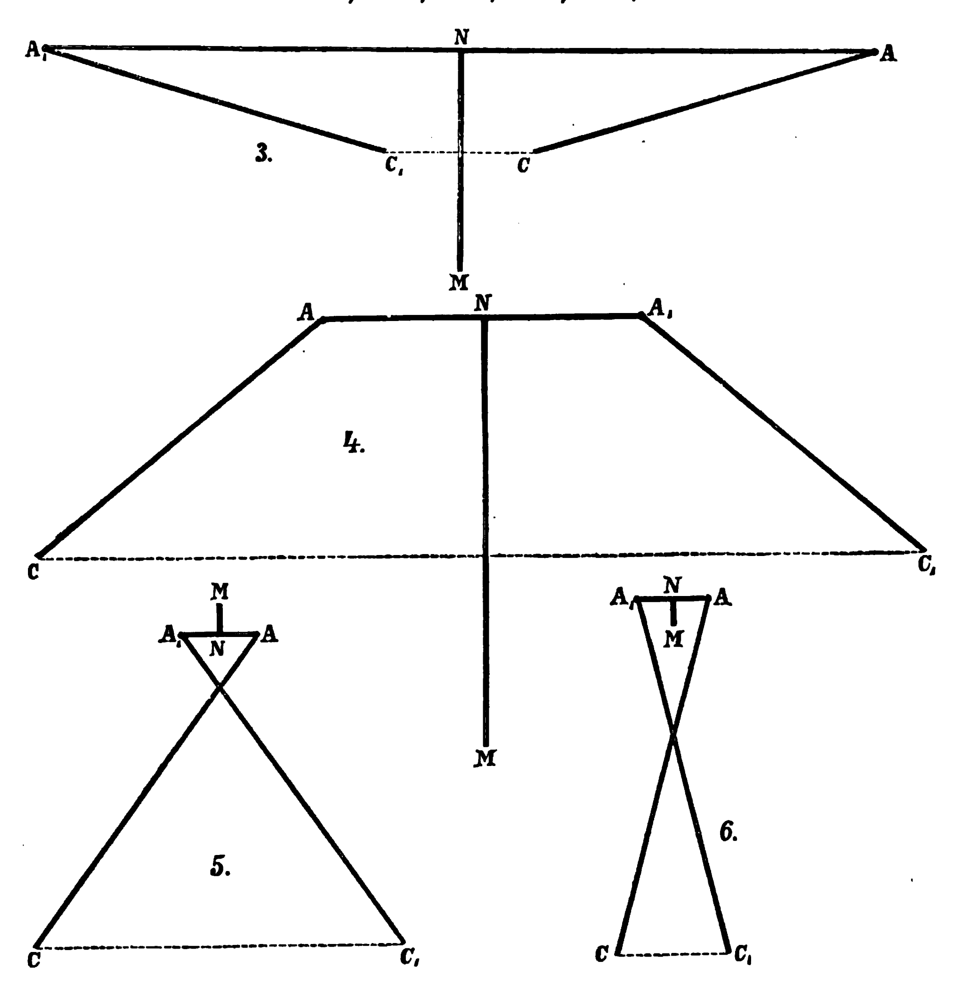
$$b=-\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos3\varphi}r.$$

Ces expressions des quantités a, b, c ne changent de signe que pour les valeurs de l'angle φ qui annulent

$$\sin 2\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 3\varphi,\ \cos 3\varphi$$

et qui seront

$$0°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 90°,$$



d'où il suit que notre mécanisme ne peut changer d'aspect entre les limites indiquées, c. à d.

de $\varphi = 0°$ jusqu'à $\varphi = 30°$; de $\varphi = 45°$ jusqu'à $\varphi = 60°$;
» $\varphi = 30°$, » $\varphi = 45°$; » $\varphi = 60°$ » $\varphi = 90°$.

Pour rendre bien compte de toutes les modifications que ce mécanisme peut subir, nous avons calculé, d'après les formules précédentes, les éléments pour quatre valeurs de φ, prises à égales distances de ces limites, savoir:

$$\varphi = 15°;\ 37°\ 30';\ 52°\ 30';\ 75°.$$

Les figures (3), (4), (5), (6) représentent notre mécanisme avec les éléments qu'on trouve comme nous le venons de dire, et en prenant r égal à 0.05 mètre.

Toutes ces modifications donnent le mouvement rectiligne avec le même degré de précision; notamment la courbe décrite par le point M a toujours un contact du 5e ordre avec une ligne droite. Sous ce rapport, toutes ces modifications sont également bonnes; mais on remarque une grande différence entre elles, quand on passe au cas où l'on cherche à obtenir le mouvement rectiligne pour une course plus ou moins grande.

§ 6. Dans le cas où la différence

$$\sqrt{\frac{2r\cos\varphi - a}{r\cos\varphi - a}} - \sin 2\varphi,$$

ne se réduit pas à zéro, mais en diffère peu, le mécanisme articulé, pour lequel c a la valeur (1), donne le mouvement rectiligne avec une grande précision, et cette précision aura lieu le long d'une courbe d'une certaine longueur. La détermination de la longueur de cette courbe se fera de la manière suivante. En posant

$$\sqrt{\frac{2r\cos\varphi - a}{r\cos\varphi - a}} = T,$$

et en désignant par t celle des racines de l'équation

$$2\sin\varphi\,(1 + t^2) + t\,(3 + t^2) - (1 - t^2)\,T = 0,$$

qui se rapproche le plus de 0, on cherche l'angle α_1 d'après la formule

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{2\,(1 - T^2)^2}{T^2\,(2 - T^2)}\left[\left(\frac{1 + 2t\sin\varphi + t^2}{1 - 2T\sin\varphi + T^2}\right)^2 - 1\right].$$

Cet angle, pris avec les signes + et —, donne les inclinaisons-limites de la ligne AA_1 sur la ligne CC_1 pour le commencement et pour la fin de la course en question. Ayant trouvé l'angle α_1, nous aurons la longueur de la course cherchée par la formule

$$(4)\qquad l = \frac{2\,(2 - T^2)}{1 - T^2}\left[\frac{T - \sin\varphi}{T^2 - 1} + \frac{2\,(1 + 2t\sin\varphi + t^2)\,t}{(1 - t^2)^2}\right] r\sin\alpha_1.$$

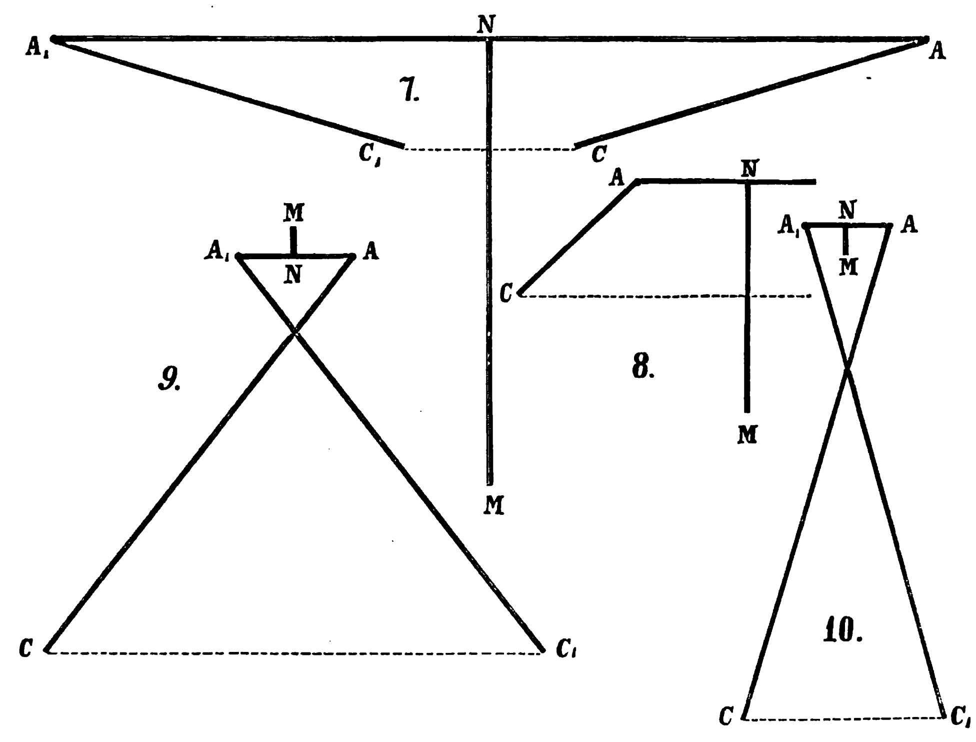
Le long de toute cette course, les écarts de la courbe tracées par le point M d'une droite restent comprises entre $+E$ et $-E$, la valeur E étant déterminée par la relation

$$(5)\qquad E = \frac{2r\,(1 + 2t\sin\varphi + t^2)\,t^3}{(2\sin\varphi + 3t + 2t^2\sin\varphi + t^3)^2}.$$

§ 7. Dans le cas où l'on se propose d'obtenir une *précision* et une *course* préalablement données, on prendra pour a, r, φ, c des valeurs qui satisfont aux équations (1), (4), (5), et dans lesquelles l, E doivent avoir

des valeurs données. Comme l'on doit verifier seulement trois équations, on pourra choisir l'angle φ à volonté. Dans ce cas, en donnant à l'angle φ les valeurs que nous avons indiquées ci-dessus, on aura les quatre formes différentes du mécanisme que nous avons déjà vues. Toutes ces formes jouiront de la même précision le long de la même *course*; mais elles différeront notablement entre elles par la longueur de leurs éléments et par leur disposition.

§ 8. Pour comparer entre elles ces quatre modifications, nous allons chercher les expressions approximatives de leurs éléments, en supposant



que le rapport $\frac{E}{l}$ a une valeur très-petite, ce qui a lieu toujours dans les mécanismes à grande précision.

En cherchant, dans cette hypothèse, le développement de r, a, b, c en série, on trouve que ces développements, arrêtés aux premiers termes, donnent:

$$r = \frac{l \cos 3\varphi}{8 \sin 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}};$$

$$a = \frac{l \cos^2 \varphi}{4 \operatorname{tang} 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}};$$

$$b = \frac{-l \sin 2\varphi}{8} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}};$$

$$c = \frac{l \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{tang} 3\varphi}{8 \operatorname{tang} 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}}.$$

Les figures (7), (8), (9), (10) représentent les quatre formes du mécanisme en question avec leurs éléments déduits des formules précédentes en y faisant

$$\varphi = 15°; \quad 37° \ 30'; \quad 52° \ 30'; \quad 75°$$

et en posant

$$l \sqrt[5]{\frac{l}{E}} = 0^{m},25.$$

Théorème relatif a la courbe de Watt.

(Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, II série, T. V, 1881, p. 216).

Si deux sommets A, A_1 du triangle AA_1M glissent respectivement sur deux circonférences de centres C, C_1, la courbe décrite par le sommet M ne peut avoir avec sa tangente un contact d'ordre 5 (limite qui ne pourra jamais être dépassée) que dans le cas où les angles $\widehat{CAA_1}$, $\widehat{C_1A_1A}$ ont les valeurs

$$\widehat{CAA_1} = \frac{A_1AM + 2n\pi}{3}, \quad \widehat{C_1A_1A} = \frac{AA_1M + 2n_1\pi}{3},$$

où n, n_1 sont des nombres entiers quelconques.

Avec ces valeurs des angles $\widehat{CAA_1}$, $\widehat{C_1A_1A}$ le contact est toujours de l'ordre 5 lorsque les rayons AC, A_1C_1 des deux cercles ont les valeurs suivantes

$$AC = AM \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\left(2CAA_1 + \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{\cos^2(3CAA_1 + \gamma)}{\cos^2(CAA_1 + \gamma)},$$

$$A_1C_1 = A_1M_1 \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\left(2C_1A_1A - \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{\cos^2(3C_1A_1A - \gamma)}{\cos^2(C_1A_1A - \gamma)},$$

où γ est l'angle sous lequel se coupent la ligne AA_1 et la tangente en M.

Sur les expressions approximatives des intégrales définies par les autres prises entre les mêmes limites.

Сообщенія и протоколы засѣданій математическаго общества при Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ 1882 г., II, стр. 93—98.

(Traduit par M. A. Tichomandritsky).

Lorsqu'on connait les valeurs de la fonction $F(x)$ pour toutes les valeurs de la variable x de $x=a$ jusqu'à $x=b$, la dernière des formules que nous avons déduites dans le Mémoire *Sur les fractions continues* *), après le changement des sommes en intégrales, donne le développement de la fonction $F(x)$:

$$F(x)=\frac{\int F\psi_0\vartheta dx}{\int\psi_0^2\vartheta dx}\psi_0+\frac{\int F\psi_1\vartheta dx}{\int\psi_1^2\vartheta dx}\psi_1+\frac{\int F\psi_2\vartheta dx}{\int\psi_2^2\vartheta dx}\psi_2+\ldots\ldots,$$

où ϑ est une fonction quelconque, continue ou discontinue, qui conserve le signe $+$ entre les limites $x=a$, $x=b$, entre lesquelles sont prises toutes les intégrales, et $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots.$ sont les dénominateurs des réduites qu'on obtient, en développant l'intégrale

$$\int_a^b\frac{\vartheta(z)}{x-z}dz$$

en fraction continue.

En développant d'après cette formule deux fonctions quelconques u, v, et en intégrant le produit $uv\vartheta dx$ depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, on trouve que l'intégrale

$$\int_a^b uv\vartheta dx$$

se ramène à une série composée de termes de la forme:

$$\frac{\int u\psi_m\vartheta dx\,.\int v\psi_n\vartheta dx}{\int\psi_m^2\vartheta dx\,.\int\psi_n^2\vartheta dx}\cdot\int\psi_m\psi_n\vartheta dx,$$

où les nombres m, n prennent toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à ∞.

*) T. I, pag. 203—230.

En remarquant que par la propriété connue des fonctions $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ l'intégrale

$$\int \psi_m \psi_n \vartheta dx$$

s'évanouit pour des valeurs différentes de m, n, on déduit de cette série le développement suivant de l'intégrale $\int uv\vartheta dx$:

$$\int uv\vartheta dx = \frac{\int u\psi_0 \vartheta dx \,.\int v\psi_0 \vartheta dx}{\int \psi_0^2 \vartheta dx} + \frac{\int u\psi_1 \vartheta dx \,.\int v\psi_1 \vartheta dx}{\int \psi_1^2 \vartheta dx} + \frac{\int u\psi_2 \vartheta dx \int v\psi_2 \vartheta dx}{\int \psi_2^2 \vartheta dx} + \ldots.$$

En arrêtant cette série sur le terme

$$\frac{\int u\psi_{n-1} \vartheta dx \,.\int v\psi_{n-1} \vartheta dx}{\int \psi^2_{n-1} \vartheta dx}$$

et en désignant par R_n le terme complémentaire, nous aurons l'égalité:

$$\int uv\vartheta dx = \frac{\int u\psi_0 \vartheta dx \,.\int v\psi_0 \vartheta dx}{\int \psi_0^2 \vartheta dx} + \ldots. + \frac{\int u\psi_{n-1} \vartheta dx \,.\int v\psi_{n-1} \vartheta dx}{\int \psi^2_{n-1} \vartheta dx} + R_n.$$

En déterminant l'expression de R_n dans ce développement de l'intégrale $\int uv\vartheta dx$, nous avons trouvé qu'il possède les propriétés suivantes:

1) *Sa valeur numérique ne surpasse pas*

$$\frac{\int \psi^2_n \vartheta dx}{\left(\frac{d^n \psi_n(x)}{dx^n}\right)^2} AB,$$

où A, B, sont les plus grandes valeurs numériques des dérivées $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ entre les limites d'intégration.

2) *Si entre les mêmes limites les dérivées $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ ne changent pas de signes, le reste R_n a le même signe que le produit $\frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{d^n v}{dx^n}$.*

Pour en faire une application, considérons le cas de $n = 1$.

Comme les premières réduites de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)}{x-z} dz$$

qu'on reçoit par son développement en fraction continue sont

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{\int \vartheta dx}{\int \vartheta dx \,. x - \int x\vartheta dx},$$

les fonctions ψ_0, ψ_1, qui entrent dans nos formules, seront

$$\psi_0 = 1; \quad \psi_1 = \int \vartheta dx . x - \int x\vartheta dx.$$

En posant dans nos formules

$$n = 1$$

et en y portant ces valeurs des fonctions ψ_0, ψ_1, nous obtenons l'égalité

$$\int uv\vartheta dx = \frac{\int u\vartheta dx . \int v\vartheta dx}{\int \vartheta dx} + R_1$$

et pour la limite supérieure de valeur numérique du terme complémentaire l'expression

$$\frac{\int \vartheta dx . \int x^2 \vartheta dx - (\int x\vartheta dx)^2}{\int \vartheta dx} AB,$$

où A, B sont les plus grandes valeurs numériques des dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ entre les limites d'intégration. Dans le cas, où les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ ne changent pas de signes entre les limites d'intégration, le reste R_1 aura, d'après ce que nous avons dit plus haut, le même signe que le produit $\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$.

En posant $\vartheta = 1$ et en prenant 0 et 1 pour les limites des intégrations, nous aurons par la formule trouvée plus haut l'égalité

$$\int_0^1 uvdx = \int_0^1 udx . \int_0^1 vdx + R_1,$$

où la limite supérieure de la valeur numérique du reste R_1 sera

$$\frac{1}{12} AB.$$

Pour une autre application considérons le cas, où

$$\vartheta = 1$$

et les limites des intégrations sont -1 et $+1$. Dans ce cas les fonctions ψ_0, ψ_1, ψ_2,.... se reduisent, comme on le sait, aux fonctions X_0, X_1, X_2,.... de Legendre, en vertu de quoi on obtient d'après notre formule l'égalité:

$$\int_{-1}^{+1} uvdx = \frac{\int_{-1}^{+1} uX_0\, dx . \int_{-1}^{+1} vX_0\, dx}{\int_{-1}^{+1} X_0^2\, dx} + \ldots . + \frac{\int_{-1}^{+1} uX_{n-1}\, dx . \int_{-1}^{+1} vX_{n-1}\, dx}{\int_{-1}^{+1} X^2_{n-1}\, dx} + R_n,$$

d'où l'on tire, après y avoir porté les valeurs des intégrales

$$\int_{-1}^{+1} X_0^2\,dx,\quad \int_{-1}^{+1} X_1^2\,dx,\ldots\int_{-1}^{+1} X^2_{n-1}\,dx,$$

la formule

$$\int_{-1}^{+1} uv\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} uX_0\,dx.\int_{-1}^{+1} vX_0\,dx + \ldots + \frac{2n-1}{2}\int_{-1}^{+1} uX_{n-1}\,dx.\int_{-1}^{+1} vX_{n-1}\,dx + R_n.$$

En rémarquant que dans le cas considéré on a

$$\int_{-1}^{+1} \psi^2_n\,\vartheta\,dx = \int_{-1}^{+1} X^2_n\,dx = \frac{2}{2n+1},$$

$$\frac{d^n\,\psi_n(x)}{dx^n} = \frac{d^n\,X_n}{dx^n} = 1.3.5\ldots.(2n-1),$$

nous trouvons, d'après l'expression ci-dessus de la limite supérieure de la valeur numérique du reste R_n, que dans le développement trouvé par nous de l'intégrale

$$\int uv\,dx$$

la valeur numérique du reste ne surpassera pas la quantité

$$\frac{2AB}{1^2.3^2.5^2\ldots.(2n-1)^2\,(2n+1)},$$

où A, B sont les plus grandes valeurs numériques des dérivées $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ entre $x=-1$ et $x=+1$. Quant au signe du reste, il sera certainement le même que celui du produit $\frac{d^n u}{dx^n}\cdot\frac{d^n v}{dx^n}$, si les dérivées $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ ne changent pas de signes entre $x=-1$ et $x=+1$.

Remarquons en terminant, que ce que nous avons montré par rapport au reste du développement de l'intégrale

$$\int uv\vartheta\,dx$$

peut servir à la détermination du degré d'exactitude, avec laquelle le développement cité de la fonction $F(x)$, arrêté à un terme quelconque, donne la valeur de la fonction.

Sur la rectification des courbes.

Association française pour l'avancement des sciences. 11 Session, La Rochelle. Séance du 25 août 1882.

M. Tchebichef montre dans cette communication le parti que l'on peut tirer, pour la rectification des courbes, de l'emploi des points dont les ordonnées servent à trouver l'aire d'après la méthode de quadrature qu'il a communiquée au Congrès de Lyon, méthode qui vient d'être enrichie par les recherches très intéressantes de M. Radau. En traitant de cette façon le cas le plus simple, on parvient à reconnaître que l'arc d'une courbe peut être représenté, avec une approximation notable par la somme des deux côtés égaux du triangle isocèle construit sur la corde de l'arc comme base, et ayant pour hauteur les $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^{\text{ièmes}}$ de la flèche élevée perpendiculairement au milieu de la corde jusqu'à sa rencontre avec l'arc.

Une machine arithmétique à mouvement continu.

La Revue Scientifique de la France et de l'étranger. Troisième Série. Tome IV (XXX de la collection). Numéro 13 du 23 septembre 1882.

Quelque simple que soit la règle de l'addition, il n'est pas facile de l'effectuer par des moyens mécaniques. La difficulté que la mécanique y rencontre vient du changement brusque des chiffres de la somme, qui ne peut être réalisé qu'à l'aide des organes compliqués et délicats. Les nombreuses tentatives, faites avant le docteur Roth pour construire une machine pouvant produire le changement brusque de plusieurs chiffres dans la somme, et la machine du docteur Roth elle-même qui a pu le faire, ont montré clairement combien il est important, pour la simplification des additionneurs, de les délivrer de la nécessité de changer brusquement leurs indications. Il n'y a aucun doute que ces machines, aussi bien que toutes les autres machines arithmétiques qui ne font que répéter l'addition ou la soustraction, deviendraient bien plus faciles à exécuter, si l'on se contentait des changements continuels dans leurs indications. Mais la lecture des chiffres devenant alors plus difficile, il se présente la question suivante: N'est-il pas possible d'affaiblir l'inconvénient provenant de la continuité des changements des indications dans l'additionneur au point où il peut être admis sans risques, en raison des avantages que cette continuité offre pour la construction?

Dans la machine à additionner que j'ai eu l'honneur de présenter au congrès de Clermont-Ferrand, et qui est maintenant complétée par un mécanisme pour opérer la multiplication et la division, cet inconvénient est presque écarté. Dans les lucarnes de cette machine on voit les bandes

blanches, parmi lesquelles on distingue aisément la principale qui paraît dans toutes les lucarnes. Comme dans la première lucarne à droite il n'y a que le commencement de cette bande, il est facile de la suivre en allant de droite à gauche. C'est cette bande qui contient tous les chiffres de la somme.

Passons maintenant aux conditions qui doivent être remplies par le mouvement des tambours qui portent les chiffres de la somme. Nous nommerons *réceptrices* les roues dentées que l'on tourne pour ajouter des nombres et dont chacune correspond à l'unité d'un certain ordre. Conformément à la règle de l'addition, le mouvement de chaque tambour doit être composé de deux autres: du mouvement déterminé par le chiffre du rang correspondant du nombre ajouté et de celui déterminé par le report des chiffres des rangs inférieurs. La vitesse du premier mouvement doit être en rapport constant avec celle de la réceptrice correspondante; ce rapport sera égal à celui du nombre de dents de la réceptrice et du nombre total des chiffres gravés sur le tambour. En vertu du second mouvement ce tambour tournera d'un angle égal à la distance de deux chiffres, quand le tambour qui le précède tourne d'un angle dix fois plus grand. Donc, dans le cas du mouvement continu et uniforme, ce mouvement d'un tambour quelconque doit être dix foix plus lent que celui du tambour qui le précède. Par conséquent, la vitesse de chaque tambour doit être composée de la vitesse de la réceptrice correspondante, multipliée par un coefficient constant, et de la dixièmc partie de celle du tambour précédent Or, le mouvement des tambours composé de cette manière est facile à réaliser au moyen *des trains épicycloïdaux*, si toutes les *roues réceptrices* et tous les tambours sont montés sur le même axe et si chaque *roue réceptrice* se trouve entre le tambour qui lui correspond et celui qui la précède. Pour y parvenir on n'a qu'à faire porter à chaque *roue réceptrice* un train épicycloïdal dont les roues engrènent avec les roues solidaires aux tambours entre lesquelles elle est placée.

D'après la propriété de ce rouage on trouve que pour donner aux tambours une vitesse, composée conformément à ce que nous venons de voir, il est nécessaire et suffisant de remplir ces deux conditions:

1) Le nombre de dents sur les *roues réceptrices* et celui des chiffres des tambours doivent être dans le rapport 9 à 10.

2) Le rapport des nombres de dents des roues qui composent chacun des trains épicycloïdaux doit être dix fois plus grand que celui de dents des roues avec lesquelles elles engrènent.

Ces conditions sont très faciles à remplir. Dans la machine que j'ai fait construire, la première condition est remplie, en donnant aux *roues réceptrices* 27 dents et en gravant trois fois les dix chiffres 0, 1, 2,..., 9

sur les tambours. Conformément à la seconde condition, les roues composantes des trains épicycloïdaux ont 48 et 12 dents, et les roues avec lesquelles elles engrènent portent 24 et 60 dents. De cette façon les échappements qui produisent les changements brusques des chiffres de la somme provenant du report sont remplacés par les trains épicycloïdaux qui produisent le même effet graduellement.

La différence entre la vraie valeur du report et celle que donnent les trains épicycloïdaux étant toujours au-dessous de 1, les écarts angulaires entre la position des tambours dans cette machine et celle qu'ils occuperaient dans une machine à mouvements brusques restent plus petits que la distance de deux chiffres. Par conséquent, en faisant les lucarnes assez grandes pour qu'on puisse y voir à la fois deux chiffres du tambour, il est certain que les vrais chiffres de la somme ne peuvent manquer d'y paraître. Quant à l'ambiguïté qui se présente toutes les fois qu'on voit dans la même lucarne deux chiffres, elle est aisément écartée, comme nous l'avons dit, au moyen des bandes qui sont tracées sur chaque tambour, en ayant égard aux écarts angulaires dans la position des chiffres du tambour suivant.

Telle est la partie essentielle de la machine à additionner. Les organes accessoires sont les suivants:

1) Des arrêts avec des ressorts qui obligent les roues réceptrices de revenir toujours dans leurs positions normales et d'y rester jusqu'à ce qu'on les fasse tourner, ce qui est important pour la justesse du jeu de la machine.

2) Une barre munie de griffes qui arrêtent successivement tous les tambours sur 0, en commençant par le premier à droite, et qu'on fait agir en ramenant vers soi le bouton que l'on voit au côté gauche de la machine. On s'en sert pour réduire à zéro le nombre que l'on lit sur les tambours, après quoi on doit pousser le bouton en arrière pour rendre mobiles tous les tambours et toutes *les roues réceptrices.*

En considérant le mouvement des tambours nous n'avons parlé que de l'additton; mais il est clair que pour opérer la soustraction on n'a qu'à tourner *les roues réceptrices* en sens inverse.

En complétant cette machine par un mécanisme qui ferait ajouter ou soustraire le nombre donné autant de fois que l'on veut, on pourra s'en servir pour opérer la multiplication ou la division. Un tel mécanisme est facile à composer à l'aide des roues dentées qui peuvent engrener avec *les roues réceptrices*, en montant sur les prolongements de leurs axes des pignons qui peuvent glisser le long de ces axes et qui, à leur tour, suivant la place qu'ils occupent, engrènent avec les roues munies de 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 dents et collées ensemble, de manière à présenter un cylindre denté. Il est clair qu'en faisant tourner ce cylindre une fois dans l'un ou

l'autre sens, on ajoutera ou on soustraira le nombre dont les chiffres do différents rangs sont égaux aux nombres de dents qui pousseront les pignons correspondants.

Pour l'exactitude du jeu de ce mécanisme il est important que les pignons s'arrêtent aussitôt que les dents du cylindre cessent de les pousser. En cherchant à rendre absolument impossibles les fautes qui naissent de ce que les pignons ne s'arrêtent pas toujours assez vite, même sous l'action des ressorts, nous avons donné aux dents des pignons et du cylindre une forme telle que les pignons ne restent jamais libres et, par conséquent, cessent de tourner au moment où les dents du cylindre ne les poussent plus.

Sur les fractions algébriques qui représentent approximativement la racine carrée d'une variable, comprise entre les limites données.

Bulletin de la société mathématique de France. T. XII, 1884, p. 167—168.

Quand on cherche parmi toutes les fractions de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

$f(x)$, $F(x)$ n'étant pas d'un degré supérieur à m, celle dont le logarithme, depuis $x=\frac{1}{a}<1$ jusqu'à $x=a>1$, s'écarte le moins du logarithme de $\sqrt{x}$, on trouve une fraction qui peut être présentée de la manière suivante:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x^m\varphi\left(\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)\varphi\left(-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)}{\varphi(\sqrt{1-ax})\,\varphi(-\sqrt{1-ax})},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction d'un degre m, qui, à un facteur constant près (tout à fait arbitraire), peut être déterminée à l'aide de cette équation

$$x^m\,\frac{\left(1+\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)\varphi^2\left(\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)+\left(1-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)\varphi^2\left(-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)}{\varphi(\sqrt{1-ax})\,\varphi(-\sqrt{1-ax})}=\text{const.}$$

Ainsi, en prenant $m=1$, on trouve, pour l'expression aproximative de $\sqrt{x}$ entre $x=\frac{1}{a}$, $x=a$, la fraction

$$\frac{kx+1}{x+k},$$

où k est une constante dont la valeur est donnée par l'équation

$$k^4-6k^2-4\left(a+\frac{1}{a}\right)k-3=0,$$

et d'où, en posant

$$x=\frac{Z}{\sqrt{AB}},\quad a=\sqrt{\frac{A}{B}},$$

on tire, pour l'expression approximative de $\sqrt{Z}$ entre $Z=A$, $Z=B$, cette formule

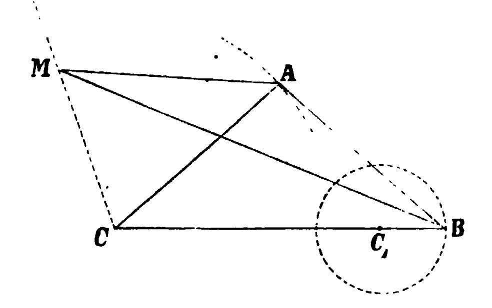
$$\sqrt[4]{AB}\,\frac{kZ+\sqrt{AB}}{Z+k\sqrt{AB}}.$$

Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes, à l'aide de systèmes articulés.

Bulletin de la société mathématique de France. T. II, 1884. p. 179—187. Школа Математики чистой и прикладной. 1885.

1. Soient (fig. 1) *ABC*, *ABM* deux triangles isocèles, ayant un côté commun *AB*, égal aux côtés *AC*, *AM*. Si l'on fait mouvoir les sommets *A*, *B* du triangle *ABM* sur les cercles décrits du sommet *C* du triangle *ABC* et d'un point quelconque C_1 pris sur son côté *BC*, le sommet *M* du triangle *ABM* décrit, comme il n'est pas difficile de s'en assurer, une courbe symétrique autour de l'axe passant par les points *M*, *C*. Si la ligne BC_1 n'est pas trop longue, elle peut faire un tour complet autour du centre C_1, et alors le point *M* décrit une courbe fermée, symétrique autour d'un axe, comme nous venons de le dire. Ceci nous présente une transformation très

Фиг. 1.



simple du mouvement rotatoire en mouvement sur les lignes fermées, de formes très variées et symétriques autour de certains axes. Une telle transformation du mouvement rotatoire pourra être avantageusement employée dans la pratique, si l'on trouve les conditions sous lesquelles la courbe décrite par le point *M* s'approche suffisamment près de celles qui donnent la solution de quelques problèmes cinématiques. C'est ce que nous allons faire maintenant pour les cas les plus simples et les plus fréquents dans la pratique: à savoir, quand on cherche à avoir le mouvement sur un cercle ou sur une ligne droite.

2. Arrêtons-nous d'abord au cas où le point M doit décrire approximativement le cercle complet, quand la ligne BC_1 tourne une fois autour du centre C_1. Nous supposerons données les longueurs $AC = AB$, BC_1 et la distance CC_1 des centres C, C_1, et nous chercherons le cercle duquel, par un choix convenable de l'angle BAM, s'approche le plus la courbe décrite par le point M. D'après l'expression de la limite des écarts que présentera cette courbe avec le cercle duquel elle s'approche le plus possible, il sera aisé de voir les conditions que doivent remplir la longueur des lignes $AC = AB$, BC_1 et la distance des centres C, C_1, pour que ces écarts soient admissibles dans la pratique.

Pour y parvenir, nous calculons d'abord les inclinaisons de la ligne AC sur CC_1 (ligne des centres C, C_1) pour deux positions qui correspondent aux moments où le point B se trouve sur la ligne CC_1 ou son prolongement.

En désignant par φ_1, φ les angles de ces inclinaisons, on les trouvera à l'aide des formules

$$\cos\varphi = \frac{CC_1 + BC_1}{2AC}; \quad \cos\varphi_1 = \frac{CC_1 - BC_1}{2AC}.$$

D'après les angles φ, φ_1, on cherchera deux angles auxiliaires θ, ψ, qui se déterminent ainsi:

$$\sin(2\theta - \varphi_1) = \frac{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}; \quad \cos\psi = \frac{\cos^2\theta}{\cos\varphi_1}.$$

Au moyen des angles φ, φ_1, θ, ψ on trouve aisément tout ce qu'il est important de savoir:

1) L'angle BAM avec lequel le triangle ABM, par son sommet M, décrit la courbe la plus proche possible d'un cercle; 2) le rayon du cercle auquel s'approche le plus cette courbe; 3) la distance de son centre du point C; 4) enfin la limite des écarts de ce cercle et de la courbe décrite par le sommet M. On y parvient à l'aide des formules suivantes:

$$BAM = 2\pi - 2\theta - \varphi - \psi,$$

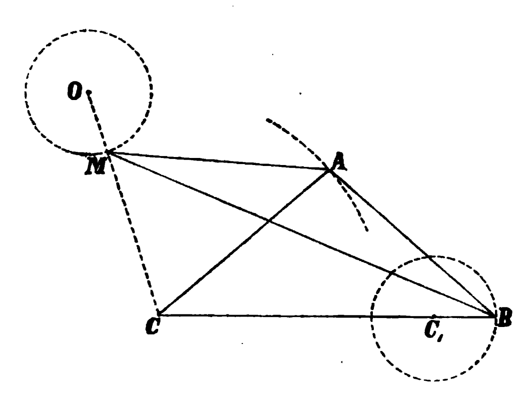
$$R = \frac{\sin\frac{2\theta - \varphi_1 + \psi}{2}}{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}} BC_1,$$

$$OC = \frac{\cotg\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}\cos\psi}{\tang\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}\cos\frac{2\theta + \varphi - \psi}{2}} BC_1,$$

$$E = \pm\frac{\sin\frac{\psi + \varphi_1 - 2\theta}{2}\sin\frac{2\theta + \varphi + \psi}{2}}{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}\tang\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}\cos\frac{2\theta + \varphi - \psi}{2}} BC_1,$$

où R (fig. 2) est le rayon du cercle décrit approximativement par le sommet M, OC la distance de son centre O du point C, et E la limite des écarts de cette courbe.

Фиг. 2.



3. D'après la valeur de E et les équations qui déterminent les angles auxiliaires θ, φ, il est clair que la courbe décrite par le sommet M s'approche très près d'un cercle toutes les fois que la différence des angles φ_1, φ est très petite. Pour appliquer les formules précédentes à ce cas particulier, qui est le plus intéressant pour la pratique, nous ferons

$$\frac{\varphi_1+\varphi}{2}=\varphi_0,$$
$$\frac{\varphi_1-\varphi}{2}=\delta,$$

en supposant que δ ait une petite valeur. D'après ces égalités, on a

$$\varphi_1=\varphi_0+\delta, \quad \varphi=\varphi_0-\delta.$$

En portant ces valeurs de φ, φ_1 dans les formules précédentes, nous obtenons, en développant en série et ne tenant compte que des premiers termes avec δ,

$$BAM=2\pi-4\varphi_0-\frac{8\operatorname{tang}^2\varphi_0-1}{4\operatorname{tang}\varphi_0}\delta^2, \quad R=\left(1+\frac{8\operatorname{tang}^2\varphi_0-1}{8\operatorname{tang}^2\varphi_0}\delta^2\right)BC_1,$$
$$OC=\left(\frac{\cot\varphi_0}{\delta}+\frac{5-8\operatorname{tang}^2\varphi_0}{24\operatorname{tang}\varphi_0}\delta\right)BC_1, \quad E=\pm\frac{\delta}{\sin 2\varphi_0}BC_1.$$

Ces formules nous donnent, au δ^2 près,

$$\frac{E}{R}=\pm\frac{\delta}{\sin 2\varphi_0}.$$

D'un autre côté, en cherchant la différence

$$\cos\varphi-\cos\varphi_1,$$

d'après les formules qui déterminent les angles φ, φ_1, on obtient

$$\cos\varphi - \cos\varphi_1 = \frac{BC_1}{AC};$$

d'où, en substituant les valeurs de φ, φ_1, on tire, à δ^2 près,

$$\frac{BC_1}{AC} = 2\delta \sin\varphi_0.$$

D'après cela, on voit que les rapports

$$\frac{E}{R},\quad \frac{BC_1}{AC}$$

tendent en même temps vers zéro quand la différence $\varphi_1 - \varphi = \delta$, s'approche elle-même de zéro, et comme on trouve, en divisant l'un de ces rapports par l'autre,

$$\frac{E}{R} : \frac{BC_1}{AC} = \pm \frac{1}{2 \sin 2\varphi_0 \sin\varphi_0},$$

il est clair que, pour diminuer autant que possible les valeurs du rapport $\frac{E}{R}$, correspondant avec les valeurs données de $\frac{BC_1}{AC}$, voisines de zéro, on doit prendre, pour φ_0, l'angle qui rend *maximum* la valeur numérique de la fonction

$$\sin 2\varphi_0 \sin\varphi_0.$$

Ainsi l'on parvient à un système articulé, où le mouvement circulaire du point B autour du centre C_1 se transforme en un autre mouvement du point M sur une ligne différant peu du cercle décrit du centre O. En remarquant que, dans ce système, les points M, B se meuvent autour des centres O, C_1 dans les sens opposés, on conclut que ce système donne la solution du même problème que les *manivelles antirotatives*. Dans cette transformation de rotation, on ne rencontre pas du tout de points morts, et l'on peut faire varier la loi qui lie entre elles les vitesses de deux manivelles, en transportant le centre d'oscillation de l'élément AC.

4. Passons au cas où l'on cherche à rapprocher, le plus près possible, d'une ligne droite toute la courbe fermée, décrite par le sommet M. Nous supposerons que le triangle MAB est placé, comme on le voit, sur la fig. 3. Dans cette hypothèse, et en désignant par t une quantité auxillaire plus grande que 0, on trouve $AC = AB = BM$, CC_1 et la limite des écarts E se déterminant par les formules suivantes:

$$AC = AB = AM = \frac{1+t^2}{t\sqrt{2-t^2}} BC_1,\quad \cos MAB = -\frac{1}{2} t^2,$$

$$CC_1 = \frac{1}{t\sqrt{2+t^2}} BC_1,\quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2-t^2} - t(t^2+2)}{2(1+t^2)},\quad E = \pm \frac{t^2}{\sqrt{2-t^2}} BC_1.$$

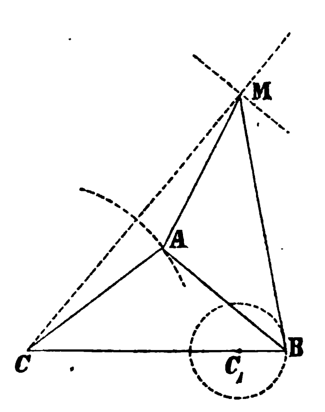
La ligne droite que le sommet M décrira approximativement est normale à l'axe de symétrie CM, et sa distance du centre C a pour valeur

$$\left(\frac{2}{t}-\frac{t^2}{\sqrt{2-t^2}}\right) BC_1.$$

En cherchant la loi du mouvement du sommet M par rapport à l'axe de symétrie MC, on trouve que la distance de M à cet axe s'exprime par la formule

$$\pm BC_1 \sin\alpha \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\varphi + F(1-\cos\alpha)}{1-F(1-\cos\alpha)}} - \sqrt{\frac{2-t^2}{2+t^2}},$$

Фиг. 3.



où α désigne l'angle variable que fait la ligne BC_1 pendant sa rotation avec le prolongement de la ligne des centres CC_1, et F une quantité constante égale à

$$\frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t})^2}.$$

D'après cette formule, il n'est pas difficile d'assigner les limites entre lesquelles reste le point M pendant son mouvement, et qui déterminent la longueur de la ligne droite décrite approximativement.

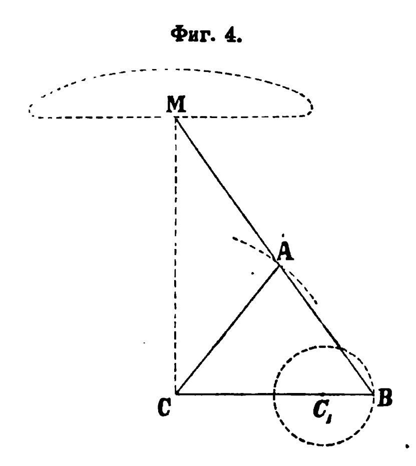
D'autre part, cette formule fait voir que les courses d'aller et de retour du point M ne correspondent pas aux mêmes angles de rotation de la ligne BC_1 autour du centre C_1, et que la différence entre ces deux angles est d'autant plus grande que la quantité t s'éloigne plus de 0; par conséquent, ce système présente une transformation directe d'un mouvement rotatoire continu en mouvement rectiligne alternatif, et *vice versa*, où les courses d'aller et de retour se feront dans des temps inégaux, la vitesse de rotation étant constante. Ce système peut donc être employé comme un *mécanisme à retour rapide*. De plus, comme le point M effectue une de ses courses, presque rectiligne, dans le temps où la ligne BC_1 fait autour du

centre C_1 plus d'un demi-tour, ce système peut être avantageusement employé pour faire tourner un axe à l'aide d'un pied. En appliquant de tels systèmes à deux manivelles coudées à un axe sous l'angle 180°, on obtiendra un mécanisme pour tourner l'axe avec deux pieds, qui aura l'avantage de ne pas présenter de points morts.

5. Dans le cas précédent, nous avons cherché à rapprocher le plus près possible d'une ligne droite toute la courbe fermée décrite par le point M, quand la ligne BC_1 fait un tour complet autour du centre C_1. Nous allons nous occuper maintenant du cas où l'on cherche ce rapprochement pour une partie de cette courbe correspondant à un demitour de la ligne BC_1 autour du centre C_1, savoir: depuis $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{\pi}{2}$.

Nous nous bornerons au cas le plus simple, où le triangle MAB se réduit à une ligne droite MAB (fig. 4), ce qui revient à donner à l'angle

Фиг. 4.



MAB une valeur égale à 180°. Dans ce cas, les lignes $AC = AB = AM$, CC_1 et la limite des écarts E se déterminent par les formules suivantes:

$$AC = AB = AM = \frac{8+\sqrt{7}}{2} BC_1, \quad CC_1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3} BC_1,$$

$$E = \pm \frac{\sqrt{272+104\sqrt{7}} - \sqrt{305+92\sqrt{7}}}{12} BC_1.$$

D'après l'équation de la courbe que décrit le point M dans ce système, on reconnaît aisément que la partie qui correspond à la rotation de la ligne BC_1 d'un quart de tour en haut et en bas de sa position primitive est presque rectiligne. Après avoir parcouru cette partie de sa trajectoire, le point M se lève et fait sa marche de retour, en montant peu à peu jusqu'au milieu de sa course et en s'abaissant suivant la même loi, après avoir dépassé ce

milieu. Un tel mouvement du point M, dans lequel se transforme directement le mouvement rotatoire de la ligne BC_1, dans notre système, peut avoir des applications utiles. Si l'on applique de tels systèmes à deux manivelles coudées à un axe sous l'angle 180°, on obtient un mécanisme où la rotation d'un axe se transforme en mouvement de deux points qui, tour à tour, parcourent la même ligne presque droite, et dont chacun se lève au-dessus de cette ligne après l'avoir parcouru quand l'autre s'abaisse sur elle pour la parcourir à son tour. En ne considérant que l'espace où se trouve la partie presque rectiligne de la trajectoire de ces points, on reconnaît aisément qu'ils produisent approximativement le même effet que les points équidistants de la circonférence d'une roue tournante quand son rayon est infiniment grand. Donc, sous ce rapport, le système dont nous venons de parler peut bien jouer le rôle d'une roue infiniment grande.

Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs.

Lettre adressée à M-me Sophie Kowalevski.

(Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler, t. 9, 1887, p. 182—184).

Je ne peux trop me féliciter de l'honneur que vous m'avez fait, en ayant bien voulu traduire ma Note sur les valeurs limites des intégrales. L'intérêt que vous avez porté à mes recherches sur ce sujet m'engage de vous présenter un résultat que je viens d'en tirer par rapport à la détermination des limites entre lesquelles reste comprise la somme d'un nombre quelconque de premiers coefficients de la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots,$$

ou

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \ldots,$$

dans le cas, où tous les termes sont positifs. Pour la détermination de ces limites d'après les valeurs réelles des séries infinies

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots,$$

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \ldots,$$

j'ai cherché les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u F(z)\, dz,$$

en supposant que $F(z)$ est une fonction qui ne devient pas negative pour $z > 0$ et que l'on connaît la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-tz} F(z)\, dz$$

pour t réel et positif.

Parmi les différentes valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u F(z)\,dz,$$

que j'ai obtenues, les plus remarquables par leur simplicité peuvent être presentées par les formules suivantes:

$$\int_0^{-\frac{\Phi''(\rho)}{\Phi'(\rho)}} F(z)\,dz \geqq \Phi(\rho) - \frac{[\Phi'(\rho)]^2}{\Phi''(\rho)}, \quad \int_0^{\frac{1}{\sigma}\log\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)}} F(z)\,dz \leqq \frac{\Phi^2(\sigma)}{\Phi(2\sigma)},$$

où ρ, σ sont des quantités positives quelconques, et $\Phi(t)$ est une fonction déterminée, pour $t > 0$, par l'équation

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tz} F(z)\,dz$$

et qui se réduit à ∞ pour $t = 0$.

D'après ces formules on trouve aisément les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u F(z)\,dz$$

pour u quelconque, en donnant à ρ et σ des valeurs qui remplissent ces conditions:

$$-\frac{\Phi''(\rho)}{\Phi'(\rho)} \leqq u, \quad \frac{1}{\sigma}\log\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)} \geqq u.$$

Pour appliquer ces formules à la détermination des limites, entre lesquelles reste comprise la somme de n premiers coefficients de la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots.$$

on prendra

$$\Phi(t) = A_0 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + A_3 e^{-3t} + \ldots.$$

et

$$u = n - 1.$$

En prenant

$$\Phi(t) = \frac{B_1}{1^t} + \frac{B_2}{2^t} + \frac{B_3}{3^t} + \frac{B_4}{4^t} + \ldots.$$

et

$$u = \log n,$$

on trouvera les limites de la somme de n premiers coefficients de la série

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \frac{B_4}{4^x} + \ldots.$$

Ainsi, par exemple, en prenant pour $\Phi(t)$ une série infinie

$$\frac{1}{1^{1+t}}+\frac{1}{2^{1+t}}+\frac{1}{3^{1+t}}+\frac{1}{5^{1+t}}+\frac{1}{7^{1+t}}+\ldots,$$

composée seulement des nombres premiers, on obtiendra des formules pour évaluer les limites de la somme finie

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{n}$$

d'après les séries infinies de la forme

$$\frac{1}{1^{1+t}}+\frac{1}{2^{1+t}}+\frac{1}{3^{1+t}}+\frac{1}{5^{1+t}}+\ldots$$

$$\frac{\log 2}{2^{1+t}}+\frac{\log 3}{3^{1+t}}+\frac{\log 5}{5^{1+t}}+\frac{\log 7}{7^{1+t}}+\ldots$$

$$\frac{\log^2 2}{2^{1+t}}+\frac{\log^2 3}{3^{1+t}}+\frac{\log^2 5}{5^{1+t}}+\frac{\log^2 7}{7^{1+t}}+\ldots$$

St.-Pétersbourg.
20 sept. (2 oct.) 1886.

Règle de Tchebychef pour l'évaluation approximative des distances sur la surface de la Terre.

(Мѣсяцесловъ на 1869 годъ, стр. 128. Изданіе Императорской Академіи Наукъ).

1) Exprimez en minutes les différences des longitudes et des latitudes des deux lieux;

2) doublez la différence des latitudes;

3) des deux nombres, à savoir, la différence des longitudes et la double différence des latitudes, multipliez le plus petit par 3, le plus grand par 7, et additionnez les résultats;

4) la somme divisée par 8 donnera la distance cherchée en verstes.

